UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

BAZILÍCIO MANOEL DE ANDRADE FILHO

OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO NO ESTUDO DAS INTEGRAIS DEFINIDAS

Tubarão

2011

BAZILÍCIO MANOEL DE ANDRADE FILHO

OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO NO ESTUDO DAS INTEGRAIS DEFINIDAS

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Educação Matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Msc. Marleide Coan Cardoso.

Tubarão

2011

BAZILÍCIO MANOEL DE ANDRADE FILHO

OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO NO ESTUDO DAS INTEGRAIS DEFINIDAS

Esta monografia foi julgada adequada à obtenção do título de Especialista em Educação Matemática e aprovada em sua forma final pelo Curso de Especialização em Educação Matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Tubarão, 15 de outubro de 2011.

____

Professora e orientadora Marleide Coan Cardoso, Msc.
Universidade do Sul de Santa Catarina

____

Prof. Mário Selhorst, Msc.
Universidade do Sul de Santa Catarina

____

Prof. Dalmo Gomes de Carvalho, Msc.
Universidade do Sul de Santa Catarina

A meu pai (in memoriam) e a minha esposa, pelo apoio e incentivo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que em todos os momentos tem direcionado meus passos.

À minha orientadora, mestre Marleide Coan Cardoso, que acompanhou cada passo da construção deste trabalho.

Aos componentes da banca avaliadora.

Ao corpo docente do curso de pós-graduação Lato Sensu em Educação Matemática.

A minha esposa, que compreendeu meus momentos de ausência.

A minha mãe, amigos e familiares.

À Secretaria do Estado de Educação do estado de Santa Catarina, por meio do FUMDES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Esta pesquisa busca conhecer as possibilidades que as representações semióticas podem oferecer no processo de transposição didática dos objetos de ensino do Cálculo Diferencial e Integral no R^3. Para dar conta desse objetivo esta pesquisa discute os registros de representação semiótica, a formação de professores e transposição didática. Em seguida, apresenta-se uma proposta de sequência didática que possibilite ao aluno mobilizar os diferentes registros de representação semiótica no estudo do objeto matemático Integral Dupla. A proposta apresentada não tem a pretensão de ser um modelo acabado, mas, sim, proporcionar aos leitores e pesquisadores um modelo que considere os diferentes registros de representação no processo de transposição didática dos objetos matemáticos, visando possibilitar a compreensão do objeto em questão.

Palavras-chave: Registro de representação semiótica. Transposição didática. Conversão de registros. Ensino da Integral Dupla.

ABSTRACT

This research seeks to understand the possibilities that can provide semioticrepresentations in the process of didactic transposition of the objects of teaching Differential and Integral Calculus in R^3. To realize this objective this research discusses the semiotic registers of representaion, teacher training and didactic transposition. Then, we presen a proposal for instructional sequence that enables students to mobilize the different registers of semiotic representation in the study of mathematical object Double Integral. The proposal does not pretend to be a finished model, but rather to provide readers and researchers a model that considers the different registers of represatation in the process of didactic transposition of mathematical objects, in order to facilitate understanding of the subject matter.

Keywords: Record semiotic representation. Didatic transposition. Conversion of records. Teaching Double Integral.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Enquanto acadêmico do curso de Matemática licenciatura da Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL), o pesquisador presenciou e também vivenciou constantes discussões relacionadas ao processo ensino aprendizagem da Matemática, as tendências em Educação Matemática e, consequentemente, as questões relacionadas ao seu currículo.

Pires (2000) é uma das pesquisadoras que têm enfatizado em suas pesquisas a importância do currículo no ensino da matemática e a necessidade de transformá-lo numa rede de relações, buscando torná-lo significativo ao aluno. Nos currículos escolares presentes nas diretrizes curriculares nacionais e estaduais estão os conteúdos mínimos que devem ser abordados em sala de aula durante um período letivo, caracterizando cada disciplina. No ensino superior, tais características dos currículos não são diferentes, estes presentificam-se na formação do acadêmico de acordo com a área de atuação.

> Um desenho curricular deve ser composto por uma pluralidade de pontos, ligados entre si por uma pluralidade de ramificações / caminhos, em que nenhum ponto (ou caminho) seja privilegiado em relação a outro, nem univocamente subordinado a qualquer um. Os caminhos percorridos, embora lineares, não devem ser vistos como os únicos possíveis; um percurso pode incluir tantos pontos quantos desejarmos e, em particular, todos os pontos da rede. Então, não existe um caminho logicamente necessário e, eventualmente, o mais curto pode ser mais difícil e menos interessante que outro mais longo. Escolhidos alguns temas (nós), não importa quais, os primeiros fios começam a ser puxados, dando início a percursos ditados pelas significações numa ampliação de eixos temáticos. [...]. Esse procedimento abre perspectivas para a abordagem interdisciplinar, pois na medida em que cada professor busca relações de cada tema com outros assuntos – estejam eles no interior de sua disciplina ou fora dele -, ela muito provavelmente ocorrerá. (PIRES, 2000, p. 204).

Em relação às mudanças curriculares envolvendo o ensino da matemática, uma dos mais marcantes foi a provocada pelo Movimento Matemática Moderna, a partir deste o currículo de Matemática passou a considerar a abstração como objetivo maior a ser alcançado na disciplina.

Após inúmeras discussões envolvendo o ensino da matemática, principalmente nas décadas de 70 e 80, novas perspectivas se apresentam e, na atualidade, estas estão presentes nas diferentes tendências da educação matemática. Além das tendências, outros pesquisadores se dedicaram ao estudo de metodologias do ensino da matemática e, neste contexto, destacam-se, também, os estudos de Duval relacionado com as representações semióticas.

Duval relaciona os aspectos semióticos encontrados nas representações matemáticas ao processo de ensino e aprendizagem da matemática, considerando que a utilização dessas representações está diretamente ligada ao processo de raciocínio, visualização e análise matemática, já que nesta ciência toda comunicação se dá por meio das representações. O estudo de linguagens matemáticas diversificadas, objeto de estudo das representações semióticas, deve ser vinculado ao currículo, buscando estimular a capacidade cognitiva do aluno.

Em relação aos objetos matemáticos em geral, estes necessitam ser representados para serem compreendidos.

> Os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando, para sua apreensão, o uso de uma representação. Nesse caso, as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos é bastante significativa, pois permite a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático. Por exemplo, a função pode ser representada através da expressão algébrica, tabelas e/ou gráficos, que são diferentes registros de representação. (DAMM, 2008, p. 169-170).

No entanto, a Matemática permite representar seus objetos de diferentes formas, sendo que a escolha correta do sistema de representação pode facilitar a construção do conhecimento pelo aluno. Essa possibilidade de se trabalhar um mesmo conteúdo com diferentes representações é abordada pela Semiótica.

> [...] a utilização de diferentes registros de representações semióticas é uma maneira didática/metodológica que o professor pode usar quando ele busca a conceitualização, a aquisição de conhecimento. [...] Para isso, é necessário que o professor tenha claro o objeto matemático a ser ensinado: isso lhe possibilitará definir quais os registros de representação semiótica que possibilitarão a construção do mesmo. (DAMM, 2008, p. 176).

Segundo Damm (2008, p. 173), “a noção de representação semiótica surgiu com um problema de modelização da linguagem.” Entretanto, Émile Benveniste ampliou essa discussão com a inclusão de sistemas semióticos. Mais tarde, surgiram trabalhos sobre a aquisição do conhecimento matemático e a utilização dos sistemas de representação semiótica na transposição didática dos objetos matemáticos.

Hoje as representações semióticas desempenham papel fundamental na matemática.

> [...] elas são relativas a um sistema particular de signos, linguagem natural, língua formal, escrita algébrica ou gráficos cartesianos, figuras, de um objeto matemático [...] De onde a diversidade de representações para um mesmo objeto representado ou ainda a dualidade das representações: forma (o representante) e conteúdo (o representado). (DUVAL, 1994 apud DAMM, 2008, p. 173).

Concordando com Damm (2008), a aquisição do conhecimento matemático está diretamente relacionada com as representações semióticas. Sobre esta relação, Duval (2009, p. 15) chama “[...] *semiósis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e *noésis* os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto [...].”

> Para que ocorra a apreensão de um objeto matemático, é necessário que a *noésis* (conceitualização) ocorra através de significativas *semiósis* (representações). A apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente será possível com a coordenação, pelo sujeito que aprende, de vários registros de representação, ou seja, quanto maior for a mobilidade com registros de representações diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão deste objeto. (DAMM, 2008, p. 177).

São objetos de estudo da matemática os elementos do cálculo em geral. Assim, por exemplo, o Cálculo Diferencial e Integral no R^3 é parte componente da grade curricular dos cursos de ciências exatas, bem como de outras áreas do conhecimento, como das engenharias em geral.

Os conceitos de cálculo em geral são importantes ferramentas ao processo de resolução de diferentes problemas. O Cálculo Diferencial e Integral no R^3 é um conteúdo que exige o domínio das técnicas de derivação e integração, construções geométricas em R^3 e, ainda, um conhecimento geral dos objetos matemáticos considerados pré-requisitos, sua transposição didática em sala de aula exige do professor o domínio de diferentes sistemas de representações e a criação de situações didáticas que possam facilitar sua compreensão e, consequentemente, a sua significação.

Em relação ao processo de significação, Damm (2008, p. 167) considera que “existe uma preocupação muito grande entre os pesquisadores em Educação Matemática com a aquisição do conhecimento, com a forma como que se processa a aprendizagem.” Essa preocupação emergiu, principalmente, a partir dos estudos relacionados à Educação Matemática.

> A Educação Matemática é uma grande área de pesquisa educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao

> ensino e à aprendizagem da matemática, nos diversos níveis da escolaridade, quer sejam em sua dimensão teórica ou prática. (PAIS, 2005, p. 10).

No curso de pós-graduação, em nível de especialização, em Educação Matemática da Unisul, especificamente na disciplina de Representações Gráficas, podem-se realizar discussões em torno das representações semióticas, as quais, de acordo com Almoulond (2008), disponibilizam ao professor instrumentos que devem ajudá-lo a tornar mais acessível a compreensão dos objetos de ensino da matemática. Observando a necessidade e curiosidade em aprofundar os conhecimentos referentes ao tema, busca-se relacioná-lo ao Cálculo Diferencial e Integral no R^3, conteúdo este componente do curso de Matemática Licenciatura da UNISUL.

De acordo com Duval (2008), é suficiente observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático. Para o autor (2008), a originalidade da atividade matemática está na mobilização de ao menos dois registros de representações ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar, a todo o momento, de registro de representação.

Buscar auxiliar os acadêmicos no processo de ensino-aprendizagem de um dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral no R^3, as integrais duplas, por meio das representações semióticas, será um dos desafios desta pesquisa, que apresenta o seguinte problema: como auxiliar o processo de ensino-aprendizagem das integrais duplas a partir dos registros de representações semióticas?

Para responder a este questionamento, esta pesquisa apresenta, de maneira geral, o seguinte objetivo: conhecer as possibilidades que as representações semióticas podem oferecer no processo de transposição didática das integrais duplas.

Especificamente destacam-se:

a) Conceituar os registros de representações semióticas;
b) Discutir a formação do professor de matemática;
c) Discutir o processo de transposição didática;
d) Identificar as integrais duplas enquanto objeto de estudo do Cálculo Diferencial e Integral;
e) Relacionar as representações semióticas e as integrais duplas;
f) Elaborar uma sequência didática envolvendo as representações semióticas na transposição didática dos objetos matemáticos relacionados com as integrais duplas.

Para alcançar os objetivos propostos, o presente trabalho é constituído por quatro capítulos. Na introdução do trabalho, que corresponde ao primeiro capítulo, descrevem-se os motivos que levaram a elaborar o presente trabalho, a problemática, os objetivos e a estruturação deste.

No segundo capítulo, apresenta-se a fundamentação teórica com revisão das bibliografias referentes ao tema da pesquisa, tratando principalmente dos registros de representação semiótica, do processo de transposição didática e da formação do professor. No terceiro capítulo apresentam-se os procedimentos metodológicos e a proposta de sequência didática envolvendo os registros de representação semiótica na abordagem das integrais duplas.

No quarto e último capítulo, expõem-se as considerações finais relacionadas ao referencial teórico a partir dos objetivos didáticos e da problemática proposta por esta pesquisa.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

De acordo com Moretti (2008), existe frequentemente uma preocupação relacionada ao ensino e aprendizagem dos conceitos em matemática sobre como realizar a transposição destes objetos em objetos de ensino. Neste contexto, os objetos matemáticos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral no R^3 não ficam isolados desta realidade. No ambiente acadêmico o cálculo é considerado um conteúdo que apresenta dificuldades em sua aprendizagem. Para Duval (2009), uma das causas para este quadro está relacionada à dificuldade que os estudantes têm em diferenciar o objeto matemático estudado da representação que o torna acessível, sendo essencial à distinção entre o objeto e suas possíveis representações.

> Em matemática, toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para seu ensino, precisamos levar em consideração as diferentes formas de representações de um mesmo objeto matemático. (DAMM, 2008, p. 167).

É comum os alunos confundirem um objeto matemático com a sua representação, sendo que o importante é a aquisição do conteúdo e não a forma como este é representado.

> O que se constatou em diversas pesquisas em Educação Matemática é a dificuldade que o aluno encontra em passar de uma representação a outra. Ele consegue fazer tratamentos em diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, porém, é incapaz de fazer as conversões necessárias para a apreensão deste objeto. Essa apreensão é significativa a partir do momento que o aluno consegue realizar tratamentos em diferentes registros de representação e ‘passar’ de um a outro o mais naturalmente possível. (DAMM, 2008, p. 168).

Para Flores e Moretti (2006, p. 28), fundamentados na teoria de Duval, “ensinar matemática é antes de tudo possibilitar o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização.” Sendo assim, o campo da ação matemática caracteriza-se pela necessidade de utilização de uma grande variedade de representações semióticas. Os autores (2006), concordando com Duval, apresentam os seguintes registros de representação: a língua natural, as escritas algébricas e formais, as figuras geométricas e as representações gráficas. Essas diferentes formas de representação possibilitam a comunicação entre o sujeito e a atividade cognitiva, permitindo a visualização de um mesmo objeto matemático por meio de diferentes registros.

A matemática, assim como todo conhecimento, é uma ciência construída ao longo da história. Ao estudá-la constata-se que o desenvolvimento das representações semióticas foi essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Para Duval (2008, p. 13) duas razões justificam a importância das representações semióticas no desenvolvimento da matemática. “Primeiramente, há o fato de que as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado.” E ainda ocorre que os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis, sendo necessário recorrer a um sistema de representação.

Um dos grandes diferenciais da matemática está relacionado à possibilidade de se converter um registro de representação para outro a qualquer momento, sendo que a compreensão em matemática supõe a coordenação de no mínimo dois registros de representações.

> [...] quanto maior a acessibilidade a representações distintas do mesmo objeto, tanto maior será a possibilidade de compreensão integral desse objeto matemático, já que o número de qualidade de informações que estará em jogo também será maior, ampliando as chances de compreensão. (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2005, p. 45).

Duval (2008, p. 14) ressalta a existência de quatro tipos muito diferentes de registros, assim definidos:

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
Registros Multifuncionais: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua Natural Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: -argumentação a partir observações, de crenças...; -dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). -apreensão operatória e não somente perceptiva; -construção com instrumentos.
Registros Monofuncionais: Os tratamentos são principalmente algoritmos	Sistemas de escritas: - numéricas (binária, decimal, fracionária...); -algébricas; -simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. -mudança de sistemas de coordenadas; -interpolação, extrapolação.

Figura 1: Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática).

Fonte: DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. 4. ed. Campinas: Papirus, 2008, p. 14.

Ainda consoante com Duval (2009), existem três atividades cognitivas fundamentais de representação que são inerentes à semiósis: a formação, os tratamentos e as conversões.

Para o autor (2009) a formação de representações em um mesmo registro semiótico tem o objetivo de “exprimir” uma representação mental, ou ainda “evocar” um objeto real. Para que a formação ocorra torna-se importante uma seleção no conjunto de caracteres e determinações que se busca representar.

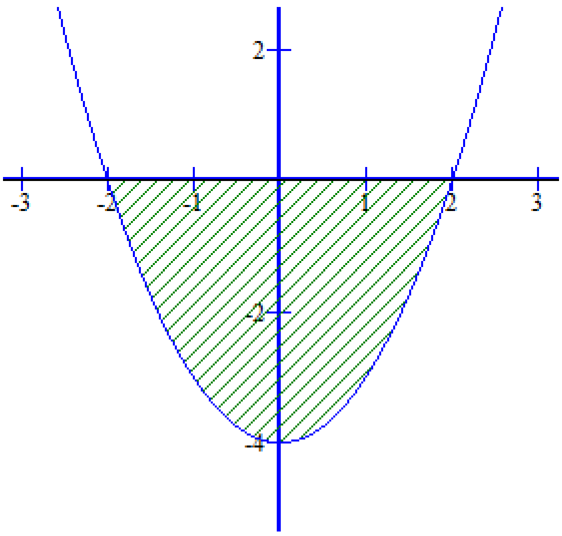
> A formação de uma representação semiótica é o recurso a um (ou a muitos) signo (s) para atualizar a atenção voltada para um objeto ou para se substituir essa atenção. [...] os signos utilizados pertencem a um sistema semiótico já constituído e já utilizado por outros: a língua materna, um código icônico de representação gráfica ou artística, uma língua formal, etc. (DUVAL, 2009, p. 54-55).

Os tratamentos e conversões das representações semióticas devem respeitar regras próprias ao sistema utilizado para possibilitar a comunicabilidade e ainda permitir a compreensão do objeto matemático estudado.

O tratamento ocorre quando o objeto representado é transformado, permanecendo no mesmo registro. Por exemplo, ao se efetuar o cálculo da integral $\int (x^4 + 2x)dx = \frac{x^5}{5} + x^2 + c$ está sendo realizado um tratamento, pois ocorre apenas uma transformação dentro da representação algébrica.

> Um tratamento é a transformação de uma representação obtida como dado inicial em uma representação considerada como terminal em relação a uma questão, a um problema ou a uma necessidade, os quais fornecem o critério de parada na série de transformações efetuadas. Um tratamento é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema. (DUVAL, 2009, p. 57).

Em relação à conversão, esta consiste em representar o mesmo objeto matemático em diferentes registros. Por exemplo, ao se calcular a integral definida com o intuito de encontrar a área delimitada pela curva $y = x^2 - 4$ e o eixo das abscissas (x), pode-se resolver através da representação algébrica e realizar a visualização na representação geométrica conforme abaixo:



$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \right|_{-2}^{2} = \frac{32}{3} u.a.$$

Figura 2: Representação gráfica da função $y = x^2 - 4$.

Fonte: Elaboração do autor, 2011.

Para Damm (2008, p. 180):

> A conversão de uma representação é a transformação dessa em uma representação em um outro registro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático em questão. A conversão não pode ser confundida com o tratamento. O tratamento se estabelece 'dentro' do registro, já a conversão se dá entre registros diferentes.

Parafraseando Duval (2008, p. 16), a atividade de conversão, quando analisada sob o prisma matemático, possibilita apenas a escolha de um registro que apresente uma maior economia, que seja mais eficiente, podendo também servir de suporte para os tratamentos que venham a ser realizados em outro registro. Porém, quando observada do ponto de vista cognitivo, é esta atividade, a de conversão, que possibilita a compreensão do objeto matemático estudado.

As atividades de conversão, quando analisadas, podem apresentar duas situações, para isso basta comparar a representação no registro de partida com a representação no registro de chegada. Para Duval (2008) ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se, então, que há congruência entre os registros, ou ela não transparece absolutamente e se diz que ocorre a não-congruência entre os registros.

O nível de congruência ou não-congruência entre dois registros de representações distintos diz respeito à maior proximidade ou distanciamento entre os registros de partida e de chegada. De acordo com Duval (2009), a transição entre as representações ocorre de maneira espontânea quando elas são congruentes, para isso o autor estabelece três condições: correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações e conversão de uma unidade significante da representação de partida em uma só unidade significante na representação de chegada. O não cumprimento de uma dessas condições implicará na quebra da congruência, e a passagem de uma representação à outra não será mais imediata.

Segundo o autor (2008), a não congruência entre representações pode apresentar graus diferenciados, dependendo do número de critérios não atendidos, estando a dificuldade de conversão de uma representação diretamente relacionada ao grau de não congruência entre o registro de partida e o de chegada.

Duval (2008, p. 19) apresenta um exemplo de variação de congruência ou de não-congruência de uma conversão.

	Correspondência semântica das unidades de significado	A unicidade semântica terminal	Conservação de ordem das unidades
O conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa $y > x$	Sim	Sim	Sim
O conjunto dos pontos que tem uma abscissa positiva $x > 0$	Não “maior que zero” é uma perífrase (um só significado para várias palavras)	Sim	Sim
O conjunto dos pontos cuja abscissa e cuja ordenada tem o mesmo sinal $x.y > 0$ O produto da abscissa e da ordenada é maior que zero	Não	Não	Não Globalização descritiva (dois casos)

Figura 3: Exemplo de variação de congruência ou de não-congruência de uma conversão. A tomada em conta desses três fatores permite determinar os graus de congruência ou não-congruência que são geralmente correlacionadas às variações de sucesso ou fracasso nas operações de conversão.

Fonte: DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. 4. ed. Campinas: Papirus, 2008, p. 19.

Uma segunda análise que se pode realizar dentro das representações semióticas é a importância do sentido em que se realiza a conversão. De acordo com Duval (2008), nem sempre a conversão se efetua quando os registros de partida e de chegada são modificados.

O fato de um mesmo objeto ser representado por meio de registros distintos não garante que estas representações apresentem o mesmo conteúdo, tendo em vista que cada representação pode apresentar informações diferenciadas, ou que estejam mais evidentes em determinado registro.

> É no trânsito entre esses diversos registros de representação que se encontra a chave para a aprendizagem em matemática. Ainda, escolher o registro mais apropriado para aplicar os tratamentos implica numa desenvoltura do raciocínio e, consequentemente, leva à resolução dos problemas matemáticos, e por fim à aprendizagem. (DUVAL, 2008, p. 20).

Duval (1995 apud SOUSA; BARRETO, 2008, p. 10) considera que “a organização de situações de aprendizagem centrada sobre a coordenação de registros requer, então, que se tenha previamente identificado todas as variações cognitivamente pertinentes de uma representação dentro de um mesmo registro.”

Concordando com Damm (2008, p. 178), é necessária a formação de uma representação identificável para que um sistema semiótico seja um registro de representação.

> [...] para ocorrer uma representação identificável, é necessária uma seleção de características e de dados do conteúdo a ser representado e isso depende de regras, que asseguram o reconhecimento das representações e a possibilidade de sua utilização para tratamento. Em geral, são regras de conformidade que já estão estabelecidas na sociedade, não sendo competência do sujeito criá-las, mas sim usá-las para reconhecer as representações. (DAMM, 2008, p. 178-179).

Para a autora (2008, p. 178), fundamentada em Duval, a necessidade da diversidade de registros de representações se dá por três razões:

a) Custos de tratamento e funcionamento de cada registro. A existência de inúmeros registros possibilita a escolha de um tratamento mais econômico e poderoso para a resolução de determinada situação/problema;
b) Limitações representativas específicas a cada registro com comparação entre diferentes modos de representação, donde a necessidade da complementaridade de registros.

> Em relação a essa complementaridade de registros, pode-se dizer que a natureza do registro semiótico escolhido para representar um contexto (objeto, conceito, situação) impõe uma seleção de elementos significativos ou informações do conteúdo que ele está representando. [...] Essa complementaridade entre os registros de representação escolhidos para representar um objeto é que acaba exigindo do

> professor o trabalhado com várias representações de um mesmo objeto. (DAMM, 2008, p. 184).

Um exemplo que se pode citar é o trabalho com funções, os gráficos, as tabelas e as equações são registros parciais de um mesmo objeto matemático, sendo que cada um desses possui uma especificação própria. Ao perceber a especificidade de cada registro e reforçá-lo, o aluno cria um caminho que possibilita a construção do conhecimento do objeto como um todo.

c) A conceitualização implica uma coordenação de registros de representação, sendo essa a condição essencial para a compreensão de um determinado objeto.

> A diversificação dos registros de representação semiótica é a constante do desenvolvimento dos conhecimentos tanto sob o ponto de vista individual quanto científico e cultural. Sua importância para o funcionamento de pensamento é geralmente explicada pelas diferenças de custo ou de limitação para a função de tratamento, e por aquelas possibilidades de apresentar para a função de comunicação, que existem entre os registros. (DUVAL, 2009, p. 80).

A utilização de diferentes registros de representação semiótica na prática docente constitui uma ferramenta fundamental para a compreensão e análise do processo cognitivo e ainda dos objetos matemáticos.

Buscando relacionar as representações semióticas e o ensino da matemática, na próxima seção discute-se a formação do professor enquanto uma das variáveis que interferem significativamente neste processo.

2.2 FORMAÇÃO DE PROFESSORES

De acordo com D'Ambrosio (2009), educar para a cidadania tornou-se uma das principais finalidades da educação, sendo responsabilidade da escola proporcionar ao aluno um ensino que o prepare para enfrentar a realidade social em que terão que viver. Frente a esse objetivo, espera-se do professor domínio dos conteúdos específicos de cada disciplina, os quais não podem ser desvinculados do mundo atual.

> A formação de professores – e especificamente a formação inicial – é um campo de onde intervém distintos estamentos (sociedade, instituições, pesquisadores, formadores de professores, professores, alunos) que se encontram em constante

> desenvolvimento e permanente evolução; isso faz com que a formação docente seja vista e sentida como problemática. (BLANCO, 2003, p. 51).

Blanco (2003) considera relevante refletir o processo de formação de professores sob duas dimensões. A primeira se refere ao conhecimento do professor, já a segunda se relaciona à aprendizagem do professor de matemática. A autora estrutura o conhecimento do professor de matemática em três perspectivas: aprender a ensinar, relativo à inquietação na busca por técnicas de aprender a ensinar; trabalho profissional, referente ao trabalho do professor no ambiente educacional; e a perspectiva cognitiva, que pressupõe que o ensino é uma habilidade cognitiva complexa.

Para Shulman (1986 apud COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2005, p. 43):

> O conhecimento-base para o ensino compreende três categorias: conhecimento da disciplina específica (no caso, a matemática), conhecimento curricular (que transcende ao específico da disciplina e refere-se também ao dos materiais curriculares) e conhecimento de conteúdo pedagógico (que incorpora a dimensão do conhecimento de matemática como matéria de ensino).

Colombo, Flores e Moretti (2005) consideram, direcionados pelas ideias de Shulman, que os estudos de Duval se relacionam a essas classes, já que as semióticas estão relacionadas ao objeto de estudo da matemática, sendo uma ferramenta auxiliar no processo de transposição didática dos conteúdos, facilitando o ensino e a aprendizagem da matemática.

Neste contexto, ressalta-se a formação do professor de matemática, considerada por Fiorentini e Castro (2003) como um movimento imerso nas práticas sociais e culturais, desta forma o saber docente pode ser considerado como um processo “reflexivo e experimental”. Neste modelo a constituição do professor se dá no exercício de sua atividade profissional, a partir da reflexão antes, durante e após a ação.

> [...] os professores mobilizam e produzem saberes e, nesse processo, constituem-se profissionais. Isso significa que o professor, sua prática e seus saberes formam uma tríade de entidades que “interdependem” e “co-pertencem” a uma situação e trabalho na qual “co-evoluem” e continuamente se transformam. (FIORENTINI, 2000 apud FIORENTINI; CASTRO, 2003, p. 124-125).

De acordo com Fiorentini e Castro (2003), a formação docente ocorre com as experiências vivenciadas em sua atividade profissional, porém não de forma isolada. Esse processo é resultado da relação estabelecida entre o que ele sabe, estudou e aprende por meio do contato com a leitura de materiais educacionais e ainda com o diálogo com todos os sujeitos envolvidos no processo educacional.

> O saber docente é um saber reflexivo, plural e complexo porque histórico, provisório, contextual, afetivo, cultural, formando uma teia, mais ou menos coerente e imbricada, de saberes científicos - oriundos das ciências da educação, dos saberes das disciplinas, dos currículos – e de saberes da experiência e da tradição pedagógica. (FIORENTINI; NACARATO; PINTO, 1999 apud FIORENTINI; CASTRO, 2003, p. 126).

Nesta perspectiva, a reflexão surge como um momento de mobilização, problematização e ressignificação dos saberes adquiridos pelo professor durante sua formação, permitindo um novo olhar do complexo mundo escolar. Portanto, reflexão e ressignificação são processos que devem ser adotados pelo docente, sendo a ressignificação consequência da reflexão. Para Fiorentini e Castro (2003, p. 127), “a ressignificação diz respeito ao processo criativo de atribuir novos significados a partir do já conhecido, validando um novo olhar sobre o contexto em que o sujeito está imerso.”

> É nesse processo de produção de significados e de ressignificação de saberes e ações que nos constituímos professores; ou seja, aprendemos a ser professor e professora no trabalho.
> É no trabalho, portanto, que o professor renova e ressignifica os saberes adquiridos durante todo o processo de escolarização, passando, então, a desenvolver seu próprio repertório de saberes. (FIORENTINI; CASTRO, 2003, p. 128).

Concordando com Freire (2004, p. 38), “a prática docente crítica, implicante do pensar certo, envolve o movimento dinâmico, dialético, entre o fazer e o pensar sobre o fazer.” A análise crítica da atividade docente permite uma busca constante pelo aperfeiçoamento, tornando-se um momento essencial na formação continuada do professor de matemática. Na visão de Freire (2004, p. 23), “quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender.”

Portanto, a formação de professores, baseada na reflexão sobre a prática docente, pode ser vista como um processo de desenvolvimento profissional, onde a análise dos resultados obtidos permite a busca por uma nova postura no processo de ensino e aprendizagem.

D’Ambrosio (1993 apud D’AMBROSIO, 2009, p. 87) propõe ao professor de matemática quatro características, as quais vêm ao encontro do novo papel do professor: “visão do que vem a ser a matemática; visão do que constitui a atividade matemática; visão do que vem a constituir a aprendizagem da matemática; visão do que constitui um ambiente propício à aprendizagem da matemática.”

Para Bicudo (2005) ser professor, especificamente de matemática, implica se preocupar com o aluno, buscando elaborar sequências didáticas que permitam a ele o acesso ao conhecimento que o professor considera relevante para sua formação.

A partir desta preocupação, Bicudo (2005) discute o ser do aluno, o processo de auxiliar o conhecimento de algo e ainda como definir o que é importante para o aluno conhecer. Analisar o ser do aluno torna-se relevante para que o professor saiba quem é o sujeito que ele está buscando auxiliar no processo de construção do conhecimento matemático.

Ao questionar o processo de construção do conhecimento, a autora (2005) ressalta a importância de se ter clareza sobre o sentido de ensinar e ainda refletir sobre o que ensinar. E na busca da definição do que é importante para o aluno conhecer, torna-se relevante que o professor compreenda a matemática como uma ciência que desvenda aspectos do mundo, não sendo ela uma disciplina isolada, estando, portanto, relacionada com o homem, com o mundo e com o conhecimento sobre o mundo. Nesse sentido, devem compor o currículo escolar da matemática conteúdos que permitam ao aluno uma nova visão de mundo.

> [...] o ser-professor-de-matemática envolve o entendimento do ser humano e do ser da própria matemática, vista como um corpo de conhecimentos organizado segundo uma lógica específica, possuidor de uma linguagem peculiar de expressão, revelador de certos aspectos do mundo. Aspectos esses que não são isolados de outros desvendados por outras áreas do conhecimento. E nem são apresentados num bloco uno, pois, embora a matemática seja uma ciência possuidora de uma unicidade conferida, por aquilo que revela sobre o mundo, apresentam, dentro de si, áreas que se dedicam, cada qual, a aspectos mais particulares daquilo que estuda. Assim, apresenta diferentes modos de trabalhar e de expressar o conhecido, os quais devem se entendidos à luz da sua unicidade e em relação às outras áreas do conhecimento humano. (BICUDO, 2005, p. 53).

Para Blanco (2003, p. 73) “é fundamental que os futuros professores tenham o conhecimento profundo e compreensão da matemática do curriculum escolar e de como ela vincula-se à disciplina matemática.” É necessário, ainda, que o professor saiba relacionar a matemática com as outras áreas que compõem o currículo escolar.

Na busca por um amplo conhecimento da matemática, a formação de professores, segundo Blanco (2003), deve contemplar a resolução de problemas em matemática, o raciocínio em matemática, a comunicação em matemática e as conexões dentro da disciplina com o mundo real. A implantação desses aspectos no processo de formação de professores permite ao futuro professor a busca pelo seu contínuo desenvolvimento.

Ao analisar o conhecimento do professor de matemática, algumas relações transversais podem ser estudadas a partir das idéias de Blanco (2003):

a) Relação entre conhecimento e prática profissional: esta relação pressupõe uma interpretação do conhecimento do professor de matemática, sendo necessária uma reflexão dos processos de uso do conhecimento do professor como uma forma de compreender a prática do ensino da disciplina;
b) Relação entre conhecimento e crenças: nesta relação se considera que as crenças influenciam a prática docente, podendo ainda serem vistas como parte do conhecimento de conteúdo pedagógico;
c) Relação entre conhecimento de pedagógico e conhecimento de matemática: dentro desta relação pode-se destacar:

> O conhecimento de conteúdo pedagógico específico da disciplina de ensino está interessado em como conteúdos específicos podem ser interpretados em situações de ensino; a integração de matemática e psicologia é um primeiro passo para definir o conhecimento de conteúdo pedagógico; uma das fontes de geração de conhecimento de conteúdo pedagógico específico de matemática é o conhecimento proveniente de investigações centradas no ensino e na aprendizagem de noções matemáticas concretas. (BLANCO, 2003, p. 63).

Segundo Blanco (2003), o conteúdo da formação de um professor de matemática deve contemplar os seguintes aspectos:

a) O conhecimento de e sobre a matemática, bem como de seus aspectos curriculares;
b) O conhecimento de e sobre a construção da matemática;
c) O conhecimento sobre as relações e negociações estabelecidas no ambiente escolar (contrato didático);
d) O conhecimento sobre o planejamento escolar e de ensino;
e) O conhecimento de didática, e ainda o conhecimento do papel do professor no processo de ensino e aprendizagem.

Além dos conhecimentos acima citados, torna-se necessária também a compreensão de como o conteúdo matemático relaciona-se com as demais disciplinas que compõem o currículo escolar. Essa preocupação de se trabalhar com os conceitos matemáticos de forma interdisciplinar surgiu com necessidade de o ensino proporcionar ao aluno uma aprendizagem significativa.

> A interdisciplinaridade, vista do ponto de vista estático, traria em si uma visão cartesiana de relação biunívoca sujeito-objeto, compreendendo o ponto de ligação entre diferentes mundos humanos – do artista, do poeta, do matemático, do historiador, do geógrafo, do educador. Enquanto dinâmica ultrapassaria a segmentação, recupera o homem da esfacelação e mutilação do seu ser e do seu pensar fragmentado. (ASSUMPÇÃO, 1999, p. 23).

Em relação ao processo ensino-aprendizagem da matemática, as representações semióticas e a formação do professor de matemática, Duval (2008) considera que as representações semióticas proporcionam ao professor uma compreensão das dificuldades que os alunos apresentam no ensino da matemática, bem como a natureza dessas dificuldades, sendo que a inserção desse estudo no processo de formação inicial e continuada do professor de matemática possibilitará a aquisição de um conhecimento sólido da matemática, permitindo ao docente uma reflexão e uma ressignificação de seus conhecimentos e de sua prática docente a partir das possibilidades das representações dos objetos de ensino da matemática.

Verificar como as representações semióticas podem auxiliar o professor em sua ação docente é o que será discutido na próxima seção na transposição didática.

2.3 O PROCESSO DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Brousseau (1996), ao discutir os diferentes papéis do professor, diferencia o trabalho realizado pelo professor de matemática daquele efetivado pelo matemático. Para ele o matemático, ao comunicar os resultados obtidos, busca reorganizar sua pesquisa, descontextualizando-a, tornando-a, desta forma, mais generalizada e comunicável. Em contrapartida, o professor, num primeiro momento, em sua prática pedagógica, realiza o caminho inverso, procurando situações que proporcionem um real significado ao objeto matemático a ser ensinado.

Pais (2005) ressalta a importância de relacionar o trabalho destes profissionais, já que o fazer matemático exerce uma influência relevante sobre o fazer pedagógico, sendo o saber matemático (saber referência/científico) objeto de estudo do pesquisador e, quando apresentado no âmbito educacional, o saber escolar é um instrumento para o desenvolvimento do aluno.

> O *saber científico* está associado à vida acadêmica, embora nem toda produção acadêmica represente um saber científico. Trata-se de um saber criado nas universidades e nos institutos de pesquisas, [...]. O *saber escolar* representa o conjunto dos conteúdos previstos na estrutura curricular das várias disciplinas escolares valorizados no contexto da história da educação. [...] Enquanto o *saber científico* é apresentado através de artigos, teses, livros e relatórios, o *saber escolar* é

> apresentado através de livros didáticos, programas e de outros materiais. [...] O processo de ensino leva finalmente ao *saber ensinado*, que é aquele registrado no plano de aula do professor e que não coincide necessariamente com a intenção prevista nos objetivos programados. (PAIS, 2005, p. 21-22).

Buscando referências na história da humanidade, percebe-se que a matemática foi construída a partir da necessidade de resolução de diferentes problemas, exercendo um papel considerável para o desenvolvimento da sociedade. Para Pais (2008, p. 11), "uma das questões centrais da Educação Matemática é o estudo do processo evolutivo pelo qual passa o seu próprio objeto de estudo." Portanto, o processo de ensino e aprendizagem da matemática exige uma ação reflexiva objetivando uma análise do saber historicamente acumulado, o qual requer um alto nível de abstração lógica e conceitual, influenciando o saber que compõe o currículo escolar e as práticas educativas a ele associados.

A fim de investigar o processo de ensino e aprendizagem da matemática, surge a Didática da Matemática.

> A Didática da Matemática é uma das tendências da grande área da educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. (PAIS, 2005, p. 11).

A partir dos estudos desenvolvidos envolvendo esta tendência, pode-se destacar o processo de Transposição Didática. Para Pais (2005) esta teoria permite visualizar as transformações sofridas pelo saber matemático, desde sua criação até chegar à sala de aula.

Tendo em vista os diversos fatores que influenciam o processo de ensino e aprendizagem, a transposição didática está intimamente relacionada a outras concepções didáticas – situação didática, contrato didático, vigilância didática, entre outras, podendo ela ser considerada como uma noção integradora da didática da matemática.

> A transposição didática permite uma visão panorâmica das transformações porque passa o saber matemático, desde sua gênese acadêmica, passando pelas idéias de autores de livros, por especialistas, pelas interpretações do professor, até chegar ao espaço conflituoso da sala de aula e, daí, para o nível intelectual do aluno. [...]. Tendo em vista essa diversidade de influências, a transposição didática está diretamente relacionada a outras noções matemáticas. [...] no planejamento de uma situação didática, deve-se levar em consideração informações fornecidas pela transposição didática, algumas delas de natureza puramente epistemológicas. Por esse motivo, a transposição didática é uma noção integradora da didática da matemática. (PAIS, 2005, p. 112).

Parafraseando Pais (2008) neste contexto, considerando o ensino da matemática, torna-se necessário distinguir conhecimento e saber. O saber relaciona-se ao problema de validação do conhecimento, sendo descontextualizado e mais associado ao caráter científico, utilizando, no caso da matemática, o raciocínio lógico-dedutivo. Já o conhecimento está vinculado ao aspecto experimental, onde o sujeito tem uma experiência mais direta e pessoal. O saber é o principal objeto da atividade do pesquisador, porém no âmbito escolar o conhecimento surge como um instrumento educacional com natureza própria, sendo justamente as diferenças entre conhecimento e saber que permitem a existência de uma situação didática.

De acordo com Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 11), "a teoria das situações didáticas de Guy Brousseau pretende dar forma e constatar, empiricamente, os fenômenos didáticos que surgem no âmbito de um sistema didático a partir da problematização e do questionamento de um 'conhecimento matemático ensinado.'" Para Freitas (2008) ela envolve a tríade professor, aluno e conhecimento. O autor considera que o sentido do saber escolar sofre influências da didática utilizada para apresentá-lo.

> O significado do saber matemático escolar, para o aluno, é fortemente influenciado pela forma didática pela qual o conteúdo lhe é apresentado. O envolvimento do aluno dependerá da estruturação das diferentes atividades de aprendizagem através de uma situação didática. Existirá uma situação didática sempre que ficar caracterizada uma intenção, do professor, de possibilitar ao aluno a aprendizagem de um determinado conteúdo. (FREITAS, 2008, p. 80).

Pais (2005) destaca que o professor, ao priorizar o saber matemático puro, ocasiona uma confusão entre o saber científico e o saber escolar. Portanto, a teoria da transposição didática auxilia na compreensão do fluxo das transformações do saber.

Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001), um conteúdo matemático, para ser estudado em uma instituição escolar, precisa passar por um processo de transformação, tornando-o acessível ao aluno. Tal transformação se torna necessária tendo em vista que os problemas que deram origem a este conhecimento são inadequados para a reconstrução eficiente no contexto escolar, sendo a transposição didática o resultado das transformações que sofre um objeto matemático quando se busca torná-lo um conteúdo a ser ensinado.

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, apud PAIS, 2005, p. 19).

Conforme Pais (2005), a transposição didática pode ser considerada como um caso específico da transposição dos saberes, sendo esta compreendida no sentido da evolução do pensamento intelectual da humanidade.

De acordo com Silva (2009), podem-se observar dois tipos de transposição didática no processo de transformação do saber. Inicialmente tem-se a chamada transposição didática externa, onde o saber científico é adaptado ao contexto pedagógico, tornado-se, desta forma, um saber escolar a ensinar. Num segundo momento, quando o saber escolar a ensinar converte-se em saber ensinado, ocorre a transposição didática interna, caracterizando-se pela prática docente. Podendo ser esquematizada conforme abaixo:

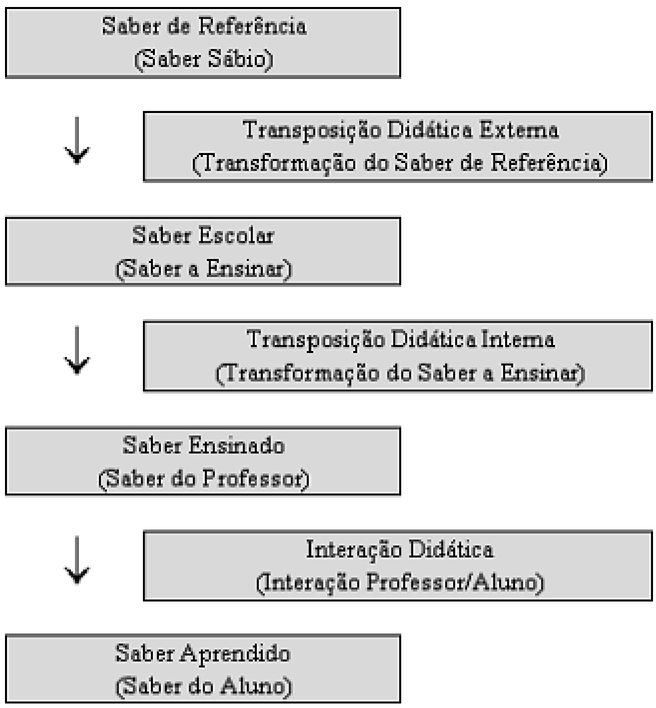


Figura 4: Esquema de transposição didática

Fonte: SILVA, Cintia Rosa da. **Conversão de registros de representação**: desenvolvimento de aplicativos para o ensino-aprendizagem de funções. 2009, 157 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Linguagem)-Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2009, p. 19.

Cabe ressaltar que a seleção dos conteúdos que compõem o currículo escolar sofre influência de diferentes fontes, denominada por Chevallard de noosfera.

> O conjunto das fontes de influência que atuam na seleção dos conteúdos que deverão compor os programas escolares e determinam todo o funcionamento do processo didático recebeu de Chevallard, o nome de *noosfer*a, da qual fazem parte cientistas, professores, especialistas, políticos, autores de livros e outros agentes da educação. O resultado do trabalho seletivo da noosfera resume não só a

> determinação dos conteúdos, como também influencia a estruturação dos valores, dos objetivos e dos métodos que conduzem à prática de ensino. (PAIS, 2008, p. 16).

A seleção dos conteúdos escolares, resultante da noosfera, é direcionada, em nível nacional, pelas diretrizes curriculares nacionais no ensino superior e educação básica, e em nível estadual pela Proposta Curricular de Santa Catarina, além das indicações encontradas nos livros didáticos, programas e outras fontes.

Pais (2005) salienta que, mesmo com a existência dessas diretrizes, pode-se perceber, no processo de ensino-aprendizagem, que determinados conteúdos, bem como as metodologias utilizadas para o seu ensino, são verdadeiras criações didáticas inseridas nos conteúdos escolares. Essas criações, num primeiro momento, apresentam objetivos educacionais, ocasionando problemas ao serem utilizadas mecanicamente.

Durante o processo de análise da transposição didática e, consequentemente, as criações didáticas, faz-se necessário um processo de vigilância didática.

> A aplicação de uma teoria deslocada de seu território original torna-se estéril, perde seu significado, obscurece sua validade e confunde a solução do problema estudado naquele momento. Assim, é preciso sempre estar atento à eficiência de uma interpretação pedagógica, o que depende fortemente da consciência de quem analisa o fenômeno. Em suma, é necessário o exercício de uma vigilância didática. Esta é uma das atribuições do trabalho docente, que deve estar ancorado tanto nos saberes científicos como em uma concepção educacional.
>
> O deslocamento de uma teoria fere o espírito da vigilância, além de ser um obstáculo do tipo de uma generalização precipitada, fazendo com que sua validade educacional dependa de seus vínculos com o contexto original.
>
> [...] Para o educador, pelo contrário, os fatos científicos não podem predominar no tratamento do objeto pedagógico e, quando isto acontece, a amplitude do fenômeno cognitivo é sensivelmente reduzida. É isto que estamos denominando deslocamentos de explicações. (PAIS, 2005, p. 23).

As diferenças entre saber ensinado e saber científico podem ser constatadas a partir das criações didáticas. Para Pais (2008, p. 25), "o saber científico é validado pelos seus paradigmas, o saber ensinado está mais diretamente sob o controle de um contrato didático, que rege as relações entre professor, aluno e saber." Para Freitas (2008, p. 49), as regras e convenções encontradas no relacionamento professor-aluno podem ser vistas como cláusulas de um contrato. Entretanto, grande parte dessas regras são implícitas, revelando-se diante de alguma transgressão, constituindo o chamado contrato didático.

Concordando com Pais (2008), quando se questiona a especificidade do conhecimento matemático evidencia-se a importância da transposição didática. O saber matemático caracteriza-se pelo trabalho desenvolvido pelo matemático em torno de seu objeto de estudo, as noções matemáticas. Este objeto permeia a atividade realizada pelo professor de matemática e pelo aluno.

Ainda segundo o autor (2008), o trabalho docente implica em realizar uma atividade oposta à realizada pelo pesquisador, o matemático exclui as condições contextuais de sua pesquisa, em contrapartida, o professor deve recontextualizar o conteúdo, tornando-o mais significativo ao aluno. A existência dessas diferenças justifica a importância do uso de sequências didáticas em sala de aula, embora, considerando a diferença entre o trabalho intelectual do aluno, o realizado pelo matemático e pelo professor de matemática, mesmo estando essas atividades relacionadas.

> É preciso sempre buscar problemas que permitam mais de uma solução, que valorizem a criatividade e admitam mais de uma solução. Essa valorização didática do problema fundamenta-se na crença de que seja possível, mesmo através de uma modesta solução, o aluno sentir uma verdadeira motivação pela busca do conhecimento. O trabalho com a resolução de problemas redefine, assim, os valores educativos da educação matemática. O desenvolvimento destas habilidades possibilita ao aluno um desempenho que, certamente, o capacita a melhor enfrentar os desafios do mundo contemporâneo. (PAIS, 2008, p. 32).

Segundo Freitas (2008), a teoria das situações didáticas proporciona o reconhecimento dos conhecimentos mobilizados pelos alunos no processo de construção do saber matemático, valorizando também o trabalho docente, sendo este caracterizado pela criação de condições que permitam ao aluno se apropriar de conteúdos matemáticos específicos.

No processo de transposição didática o professor tem a possibilidade de textualizar, repersonalizar e temporalizar os conteúdos.

> A *textualização do saber* é um processo de preparação prévia pelo qual passa o conteúdo a ser ensinado, e sua realização ocorre sob o controle de regras que visam à estruturação de uma forma didática. [...]. Entre as regras que estruturam essa textualização podemos destacar: a *desincretização*, que consiste na exigência de proceder a uma divisão da teoria em áreas e especialidades bem delimitadas; a *despersonalização*, que consiste na exigência da separação do saber de qualquer contexto pessoal; a *programabilidade*, que consiste no estabelecimento de uma programação da aprendizagem segundo uma seqüência progressiva e racional; a *publicidade*, que é a definição explícita do saber que deverá ser ensinado. (FREITAS, 2008, p. 32-33).

Para Freitas (2008) na estrutura da textualização do saber podem-se destacar dois elementos, o tempo didático, determinado pelos programas e livros buscando cumprir uma exigência, imprimindo ao saber um caráter cumulativo e irreversível. Já o tempo de aprendizagem está relacionado ao complexo ato de aprender, considerando que cada aluno tem o seu próprio tempo de aprendizagem. A resolução de problemas permite uma melhor compreensão do entrelaçamento entre esses dois tempos.

> O problema, que é sempre um elemento propulsor do saber matemático, é também um elemento essencial na prática pedagógica. Mesmo que, no ensino, o seu estatuto seja diferente daquele da pesquisa, o problema sempre envolve uma relação entre o que já se encontra assimilado pelo sujeito e um novo conhecimento. No plano pessoal, essa relação leva a uma dialética entre algo que representa o novo para o espírito do aluno e o antigo que ele já conhece. Daí, para que ocorra a aprendizagem é preciso a superação das contradições inerentes a essa dialética. (FREITAS, 2008, p. 35).

De acordo com Pais (2008), o desenvolvimento da atividade matemática pressupõe o domínio de algumas ferramentas auxiliares, as quais geralmente não se constituem em objetos de estudo, as noções paramatemáticas. Essas noções são consideradas como possíveis de serem "aprendidas" no decorrer do processo de aprendizagem. Pode-se citar como exemplo de noções paramatemáticas as noções de demonstração, fatoração, equação, tais noções são realizadas pelo aluno, porém este muitas vezes não compreende o seu significado.

Segundo o autor citado (2008), existem algumas habilidades exigidas implicitamente no processo de ensino da matemática, tais como raciocínio, formulação de questões, percepção de modelos, as quais são julgadas como pré-requisito para a compreensão do objeto matemático ensinado, as noções protomatemáticas. Outra exigência requerida é o domínio de uma linguagem mínima, a qual proporcionará ao aluno uma melhor compreensão e comunicação de uma ideia. Essas competências não são objetos de ensino, porém adquirem sentido ao serem vinculadas a uma situação didática, estando elas associadas à história de cada aluno.

Ainda conforme o autor (2008), as noções paramatemáticas e protomatemáticas, embora dificilmente sejam ensinadas, são saberes e competências fundamentais no processo de aprendizagem, proporcionando uma melhor compreensão do fenômeno educacional da matemática e do processo de transposição didática dos conteúdos.

A transposição didática, ao considerar o contexto que originou o saber matemático que compõe o currículo escolar, visualizando suas fontes de influências, possibilita ao professor uma prática de referência, onde a recontextualização permite uma abordagem mais significativa do saber escolar, priorizando os valores educativos sem desconsiderar o aspecto científico do ensino.

Nesse processo, a busca por uma aprendizagem significativa por meio das representações semióticas em seus múltiplos registros é o objetivo maior, a partir da elaboração de sequências didáticas que proporcionem ao aluno a construção e, em alguns casos, a “reconstrução do saber”, bem como uma real compreensão do objeto matemático estudado, a qual pressupõe a realização de tratamentos e conversões entre os diferentes registros de representação.

Na próxima seção apresenta-se uma sequência didática envolvendo o estudo do Cálculo Integral em R^3 a partir dos registros de representação semiótica.

3 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo constitui-se em uma descrição metodológica da pesquisa e sua caracterização, apresentando, também, a sequência didática elaborada para o estudo da Integral Dupla envolvendo os registros de representação semiótica.

3.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Esta pesquisa está relacionada com os registros de representação semiótica e o estudo das integrais definidas a partir da elaboração de uma sequência didática que mobilize os diferentes registros de representação semiótica no processo de ensino-aprendizagem da Integral Dupla. Para concretizar seu objetivo e resolver a problemática proposta, este trabalho será dividido em dois momentos.

No primeiro momento, por meio da revisão da literatura, o pesquisador se propôs a realizar um levantamento bibliográfico sobre os registros de representação semiótica, a transposição didática e a formação do professor. No segundo momento, o pesquisador apresenta uma sequência didática de forma que possibilite ao leitor visualizar os registros de representação semiótica aplicados na abordagem do estudo das integrais duplas.

Assim, de acordo com os seus procedimentos, esta pesquisa caracteriza-se como bibliográfica.

A pesquisa bibliográfica, segundo Rauen (1999, p. 25), “[...] consiste na busca de dados a partir do acervo bibliográfico existente, isto é, em toda espécie de informação registrada em bibliografias [...].” Ainda conforme o autor (1999, p. 39), este tipo de pesquisa “ocorre quando os dados de observação são bibliográficos ou documentais em sentido estrito e equivale aos trabalhos de campo e laboratório nas demais pesquisas.”

Em relação à sua natureza, trata-se de uma pesquisa básica sem aplicação prática. De acordo com Silva e Menezes (2001, p. 20), a pesquisa básica “objetiva gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência sem aplicação prática prevista. Envolve verdades e interesses universais.”

Em relação à abordagem do problema, trata-se de uma pesquisa qualitativa.

Segundo Rauen (2006), esse tipo de pesquisa “não se conforma com dados referenciais, confiam na notação qualitativa e não intervêm na realidade.”

Do ponto de vista dos objetivos, esta pesquisa classifica-se como exploratória. Concordando com Leonel e Motta (2007), esta se constitui a partir de um levantamento bibliográfico sobre o objeto de pesquisa proposto.

O critério para escolha dos exemplos apresentados no desenvolvimento da sequência didática foi que estes utilizam a Integral Dupla em sua resolução e, ainda, que possibilitam a mobilização dos diferentes registros para sua abordagem.

3.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA: A INTEGRAL DUPLA

Esta seção apresenta uma proposta de sequência didática envolvendo o Cálculo Diferencial e Integral em R^3 e os registros de representação semiótica de Duval, a partir da abordagem das integrais duplas. Os conceitos, propriedades e problemas foram extraídos dos livros que discutem o assunto em estudo, assim foram utilizados os seguintes livros para elaboração da sequência didática: James Stewart (2001), Diva Maria Flemming e Mirian Buss Gonçalves (2007) e Diva Maria Flemming, Elisa Flemming Luz e Christian Wagner (2008).

A abordagem proposta nesta pesquisa não tem o intuito de esgotar as possibilidades de trabalho do tema em sala de aula, mas, sim, ressaltar a importância de se utilizar os registros de representação semiótica no processo ensino-aprendizagem dos objetos de Cálculo Diferencial e Integral.

3.2.1 Sequência didática

Instituição de ensino: Universidade do Sul de Santa Catarina

Município: Tubarão - SC

Disciplina: Cálculo III

Curso: Matemática - Licenciatura

Professor (a): Bazilício Manoel de Andrade Filho

Nível de Ensino: Superior Turno: Noturno

Semestre letivo previsto: 2010/2

Conteúdo

As integrais duplas e suas representações.

Objetivos

a) Revisar o conceito de integral definida e suas representações;
b) Propor situações-problema que envolvam, em sua resolução, o uso das integrais duplas;
c) Conceituar a Integral Dupla;
d) Calcular integrais duplas utilizando os diferentes registros de representação semiótica.

Tempo previsto: 4 horas/aula

Desenvolvimento

1ª etapa: Apresentando atividades que envolvam o objeto matemático Integral Dupla.

Inicialmente, busca-se apresentar situações em que o processo de resolução envolva o objeto matemático Integral Dupla.

Abaixo listam-se algumas possibilidades por meio de questões que necessitam dos conceitos de Integral Dupla para a sua resolução. A princípio, apresentam-se quatro situações encontradas em livros de Cálculo Diferencial e Integral, conforme segue.

Situação 1: Calcular $\iint_R (x+4)dxdy$, onde R é a região delimitada por:

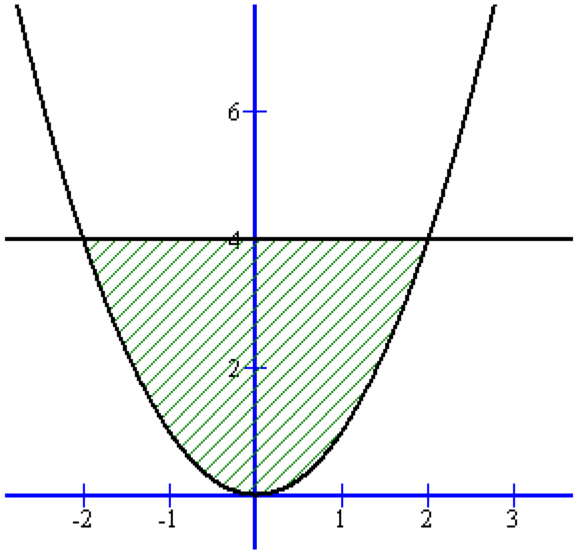


Figura 5: Representação gráfica da região de integração

Fonte: Elaboração do autor, 2011.

Situação 2: “Qual o volume do sólido delimitado superiormente pelo gráfico de $z = 4 - x - y$, inferiormente pela região R delimitada por $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ e lateralmente pelo cilindro vertical cuja base é o contorno de R?” (FLEMMING; GONÇALVES, 2007, p. 235).

Situação 3: “Calcular a integral $I = \iint_R (x + y)dA$ onde R é a região limitada por $y = x^2$ e $y = 2x$.” (FLEMMING; GONÇALVES, 2007, p. 236).

Situação 4: “Calcular a integral $\iint_R xydA$, onde R é a região limitada por $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$ e $y = -x + 3$.” (FLEMMING; GONÇALVES, 2007, p. 240, adaptado).

Situação 5: “Determinar a massa total de uma chapa homogênea formada por um quadrado de lado *2a*, encimado por um triângulo isósceles que tem por base o lado *2a* do quadrado e por altura *a*.” (FLEMMING; GONÇALVES, 2007, p. 268, adaptado).

2ª etapa: Retomada do conceito de integral definida de uma variável.

Antes de se iniciar o estudo das integrais duplas, revisa-se com os alunos a integral definida de uma variável, que serve de alicerce para o estudo das integrais duplas, agora em R³. Para exemplificar, genericamente, pode-se utilizar uma situação em que o processo resolutivo envolva o cálculo de áreas, conforme abaixo:

Qual a área da região delimitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo do x e pelas retas $x = a$ e $x = b$?

A integral definida surge, principalmente, a partir da tentativa de se resolver problemas que busquem determinar medidas de superfícies que não representam figuras geométricas conhecidas na geometria plana, ou seja, figuras irregulares. O processo de calcular a medida de superfície, quando feito às adequações necessárias, aplica-se, também, ao cálculo de outras medidas, como comprimento de arco, volume. Realizadas as explicações iniciais, pode-se iniciar a exploração das integrais duplas.

Para a compreensão da região de integração podem-se utilizar os seguintes registros de representação semiótica:

a) Registro de Representação Algébrica da região de integração:

$$A = \begin{cases} 0 \le y \le f(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$$

b) Registro de Representação Gráfica da região de integração:

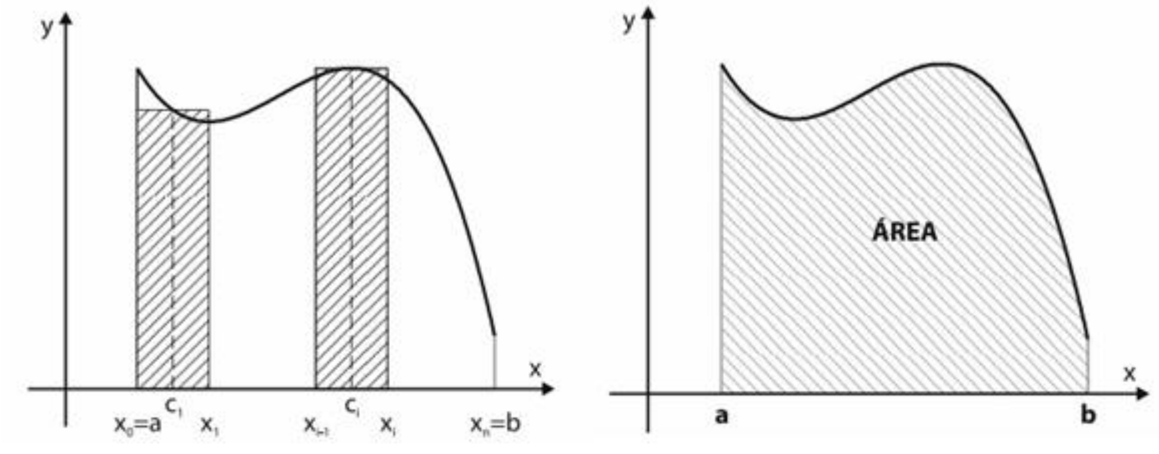


Figura 6 – Definição da integral por meio do registro de representação gráfica.

Fonte: FLEMMING, Diva Marília; LUZ, Elisa Flemming; WAGNER, Christian. **Cálculo II**. 3. ed. rev. e atual. (livro didático). Palhoça: Unisul Virtual, 2008, p. 49, 56.

A mobilização dos registros de representação algébrica e gráfica possibilita o estudo das integrais sob dois pontos de vista distintos, ou seja, duas formas de representar que apresentam funcionalidades diferentes em relação ao processo de compreensão dos objetos matemáticos. A representação gráfica possibilita mostrar o procedimento realizado pela integral, ou seja, ela divide a região em infinitas sub-regiões retangulares, além de possibilitar a visualização da região que se deseja calcular a área, os limites superior e inferior, facilitando, dessa forma, a representação algébrica da integral, que pode ser assim representada:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b 0dx = \int_a^b f(x)dx\,.$$

3ª etapa: Volume e Integrais Duplas

Depois de retomadas as ideais relacionadas à Integral Definida envolvendo uma variável, pode-se iniciar o estudo do conceito do objeto Integral Dupla, utilizando-se a noção de volume em R^3. Em geral, nos livros didáticos, os conceitos iniciais de Integral Dupla são abordados explorando, inicialmente, a representação geométrica do espaço em R^3, conforme segue.

Considere a função f de duas variáveis definidas numa região retangular.

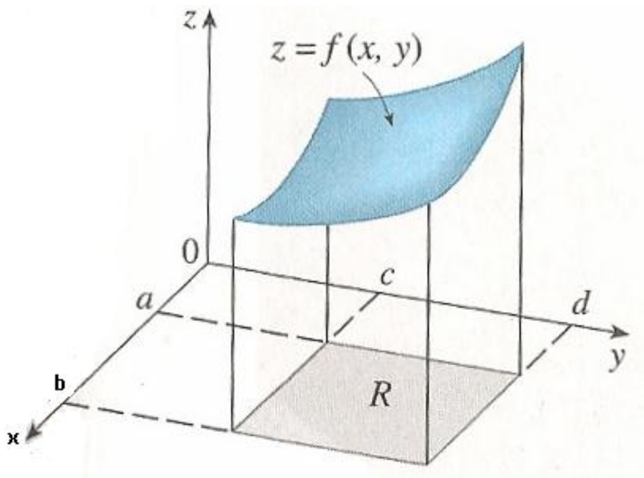


Figura 7 – Representação gráfica de uma função *f* de duas variáveis definidas numa região retangular.

Fonte: STEWART, James. **Cálculo**. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning. 2001. v. II, p. 967.

Um dos questionamentos que pode ser feito é: qual o volume do sólido S contido na região acima de R e abaixo do gráfico $z = f(x, y)$?

Para facilitar a compreensão da região de integração, uma das alternativas pode ser a utilização dos diferentes registros de representação semiótica, sendo que cada registro cumpre com a sua função de representar o objeto matemático sob um aspecto.

Assim para facilitar a identificação de cada registro apresenta-se, de forma detalhada, cada um dos registros das integrais.

a) Registro de representação algébrica da região de integração

$$R = \left\{(x, y) \in R^2 / a \le x \le b, \;\; c \le y \le d\right\} \text{ ou } R = \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$$

$$S = \left\{(x, y, z) \in R^3 / 0 \le z \le f(x, y), \;\; (x, y) \in R^2\right\}$$

A utilização do registro algébrico resulta da conversão do registro gráfico da figura 7 e permite que o aluno compreenda como ocorre a construção do algoritmo utilizado na resolução da Integral Dupla.

b) Registro de representação gráfica de uma região de integração

O registro gráfico possibilita ao aluno a visualização do processo de integração de um volume, ou seja, que a integral divide o sólido em infinitos paralelepípedos, e realiza a soma dos volumes correspondentes para compor o volume desejado. Este processo pode ser observado na figura 8.

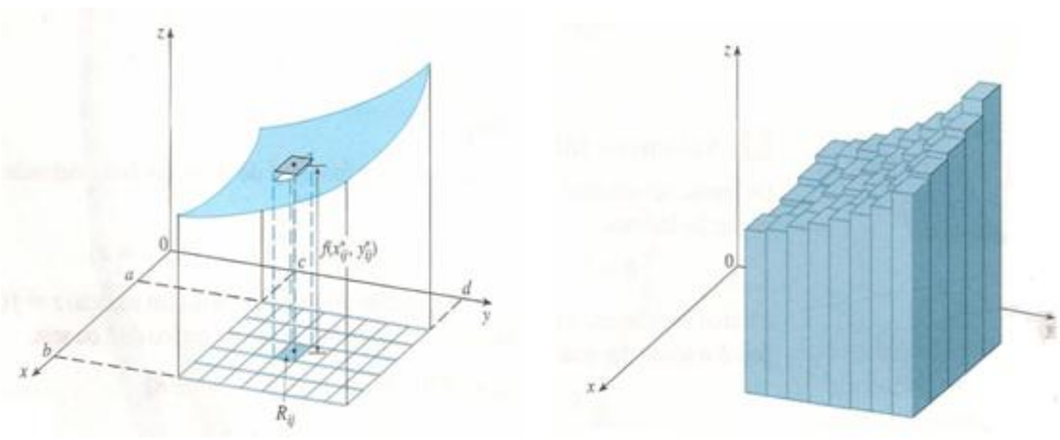


Figura 8 – Representação gráfica da região de integração.

Fonte: STEWART, James. **Cálculo**. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning. 2001. v. II, p. 968.

Outra forma de visualizar o sólido é observando sua base em R², constituindo-se em outra forma de observar a base do sólido formado.

c) Registro de representação gráfica da região de integração no R^2

Em sala de aula, o professor dispõe dos registros de representação gráfica para em R² mostrar a base do sólido gerado pela integral. A figura 9 mostra esta possibilidade:

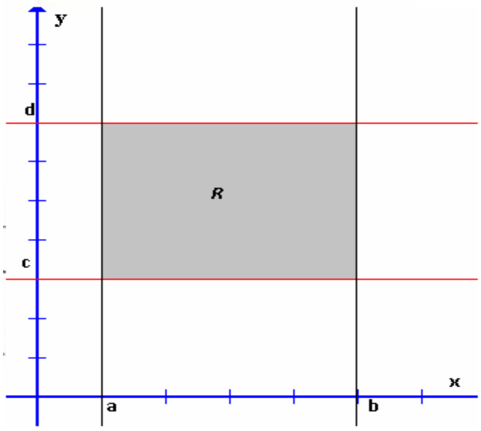


Figura 9 – Representação gráfica da região de integração em R².

Fonte: Elaboração do autor, 2011.

Utilizando-se os dois registros, o aluno pode representar o volume do sólido gerado por meio da Integral Dupla. A ilustração da figura 8 possibilita a visualização dos limites superior e inferior da região de integração, fundamental para compreensão do algoritmo da Integral Dupla. Dessa forma, a mobilização dos registros gráfico e algébrico, além da língua natural, utilizada na apresentação do problema, proporciona ao professor e ao aluno a possibilidade de realizar o cálculo do volume solicitado, por meio da Integral Dupla:

$$V = \iint_R f(x, y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy.$$

A partir do entendimento das relações entre os diferentes registros de representação, em sala de aula, o professor tem condições de resolver as questões que envolvem as integrais. Assim, na quarta etapa apresenta-se a resolução das questões, inicialmente, propostas nesta sequência didática.

4ª etapa: Retomando as questões apresentados

Nesta etapa o objetivo é mostrar que a Integral Dupla cumpre a função de ser uma ferramenta para resolver problemas de volume em R³. Assim, apresenta-se, a seguir, o processo resolutivo das quatro questões propostas nas situações 1, 2, 3 e 4 a partir dos registros de representação. Um dos objetivos desta proposta é mostrar que os registros de representação semiótica, quando utilizados de forma adequada em sala de aula, podem se tornar um facilitador da aprendizagem. Observa-se como isso pode acontecer a partir de cada situação.

Situação 1:

Calcular $\iint_R (x+4)dxdy$, onde R é a região delimitada por:

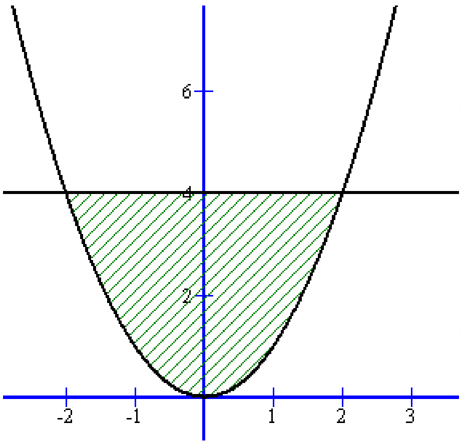


Figura 10: Representação gráfica da região de integração

Fonte: Elaboração do autor, 2011.

Discute-se com os alunos como definir a região de integração e, em seguida, faz-se a abordagem por meio dos tratamentos e conversões entre os registros que se tornarem necessários durante a resolução da questão.

A região de integração, representada por meio do registro de representação gráfica, pode ser convertida para o seguinte registro de representação algébrica:

$$R = \begin{cases} x^2 \leq y \leq 4 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

A conversão do registro gráfico para o algébrico torna-se necessária para que o aluno possa obter os limites da região de integração, ou seja, ele precisa conhecer as equações da parábola e da reta que delimitam a região de integração em questão. Porém, para que ele obtenha êxito nesse processo é necessário que ele reconheça que esta região é composta por uma parábola, cuja equação é dada por $y = ax^2 + bx + c$ e por uma reta, cuja equação é

$y = ax + b$. Portanto, ele deverá dominar os tratamentos que possibilitam realizar esta conversão. Como exemplos, podem-se citar: plano cartesiano, sistema de equações, equação da parábola e equação da reta.

O registro algébrico permite obter a lei de formação da parábola e da reta, nesse caso representada, respectivamente, por $y = x^2$ e y = 4. Já o registro gráfico permite visualizar, com um menor custo, os limites superior e inferior da região de integração, além da visualização da região.

A partir da interpretação algébrica e gráfica pode-se fazer a seguinte representação da região por meio da Integral Dupla:

$$\int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} (x+4)dydx$$

Esta representação permite determinar a integral solicitada, para isso o aluno deve conhecer os procedimentos necessários envolvendo a resolução da integral, conforme segue:

$$\int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} (x+4)dydx =$$

Inicialmente, aplicam-se os procedimentos da integral definida na integral interna.

$$\int_{-2}^{2} \left[\int_{x^2}^{4} (x+4)dy \right] dx =$$

$$\int_{-2}^{2} \left[xy + 4y \right]_{x^2}^{4} dx =$$

$$\int_{-2}^{2} \left[4x + 16 - x^3 - 4x^2 \right] dx =$$

Em seguida, aplicam-se os procedimentos da integral definida para resolver a integral resultante.

$$-\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + 16x \Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$-4 - \frac{32}{3} + 8 + 32 + 4 - \frac{32}{3} - 8 + 32 = \frac{128}{3} .$$

Concluindo esta primeira situação, observa-se que os registros de representação estão envolvidos em cada etapa do processo, desde a proposição da atividade por meio da língua natural até a resolução final por meio de tratamentos e conversões.

> Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro. [...] Mas, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. (DUVAL, 2008, p. 16).

Situação 2:

Calcular o volume do sólido delimitado superiormente pelo gráfico de $z = 4 - x - y$, inferiormente pela região R delimitada por $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ e lateralmente pelo cilindro vertical cuja base é o contorno de R.

Inicialmente, discute-se com os alunos como representar graficamente/geometricamente a região de integração e, em seguida, faz-se a abordagem por meio dos tratamentos e conversões entre os registros que se tornarem necessários durante a resolução da questão.

O sólido delimitado superiormente por $z = 4 - x - y$ e inferiormente pela região R delimitada por $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ pode ser convertido para o registro gráfico, conforme figura 11:

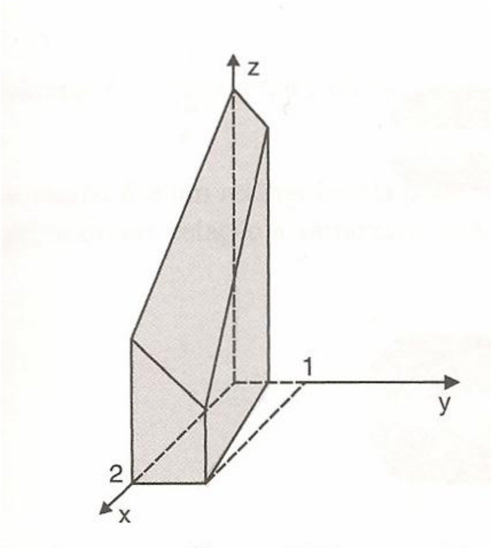


Figura 11 – Representação gráfica ou geométrica do sólido delimitado por $z = 4 - x - y$.

Fonte: FLEMMING, Diva Maria; GONÇALVES, Mirian Buss**. Cálculo B:** funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfícies. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2007, p. 235.

A conversão do registro algébrico para o gráfico torna-se necessária para que o aluno possa visualizar os limites da região de integração. Portanto, para que ele obtenha sucesso nesse processo, é necessário que ele reconheça que a equação $z = 4 - x - y$ é uma equação de um plano inclinado e, ainda, que as equações $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ determinam retas no plano xy. Dessa forma, para que ele possa realizar a conversão acima, é preciso que o aluno domine os tratamentos específicos ao registro gráfico. Como exemplos, podem-se citar: equação do plano, equação da reta, representação gráfica em R^3.

A representação geométrica do sólido permite que o aluno obtenha a representação gráfica (figura 12 abaixo) que possibilite visualizar a região R que delimita o sólido inferiormente.

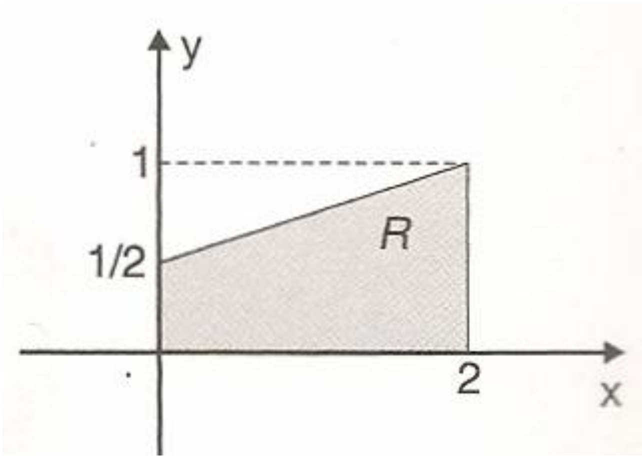


Figura 12: Representação gráfica da região de integração.

Fonte: FLEMMING, Diva Maria; GONÇALVES, Mirian Buss**. Cálculo B:** funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfícies. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2007, p. 235.

A região de integração, representada por meio do registro de representação gráfica, pode ser convertida para o seguinte registro de representação algébrica:

$$R = \begin{cases} 0 \le y \le \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

A conversão do registro gráfico para o algébrico torna-se necessária para que o aluno possa determinar os limites da região de integração.

Portanto, pela análise da região R de integração, mobilizando o registro de representação gráfica e algébrica, pode-se fazer a seguinte representação da região por meio da Integral Dupla:

$$V = \int_0^2 \left[\int_0^{\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}} (4 - x - y)dy \right] dx.$$

Esta representação permite determinar o volume solicitado, realizando-se os tratamentos utilizados na situação 1, conforme abaixo:

$$V = \int_0^2 \left[\int_0^{\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}} (4 - x - y)dy \right] dx.$$

$$V = \int_0^2 \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]\Bigg|_0^{\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}} dx$$

$$V = \int_0^2 \left[4\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) - x\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) - \frac{\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)^2}{2} \right] dx$$

$$V = \int \left(x + 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{32} - \frac{2}{16}x - \frac{1}{8} \right) dx$$

$$V = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{96} - \frac{x^2}{16} - \frac{1}{8}x \right)\Bigg|_0^2 = \frac{15}{4} \text{ unidades de volume.}$$

Situação 3:

Calcular a integral $I = \iint_R (x + y)dA$ onde R é a região limitada por $y = x^2$ e $y = 2x$.

Análise da região R de integração: num primeiro momento é importante discutir com os alunos como determinar a região de integração para, em seguida, realizar os tratamentos e conversões necessários para resolução do problema proposto.

A região de integração, representada algebricamente por $y = x^2$ e $y = 2x$, pode ser convertida para o registro de representação gráfica, conforme abaixo:

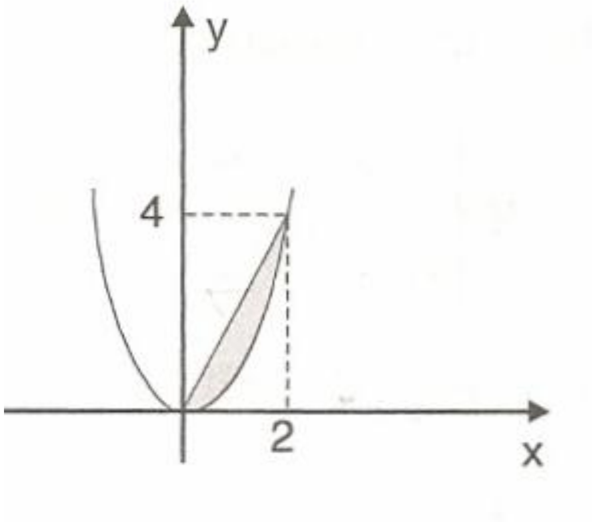


Figura 13: Representação gráfica da região de integração.

Fonte: FLEMMING, Diva Maria; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo B:** funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfícies. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2007, p. 236.

Assim como ocorre nos casos anteriores, é fundamental o domínio das representações gráficas em R^2, considerando que, nessa situação, especificamente, o aluno precisa visualizar os pontos de intersecção das equações $y = x^2$ e $y = 2x$, para que possam ser determinados os limites superior e inferior da região de integração. O registro algébrico, por meio da resolução de um sistema de equações, também possibilita encontrar esses pontos, porém exige do aluno um maior custo cognitivo que o requerido pelo registro gráfico. Ainda referente à conversão do registro algébrico para o gráfico, é necessário que o aluno reconheça a equação $y = x^2$ como uma parábola e a equação $y = 2x$ como uma reta.

A região de integração, representada por meio dos registros de representação gráfica e algébrica, pode ser convertida para os seguintes registros de representação algébrica:

$R = \begin{cases} x^2 \leq y \leq 2x \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$, integrando primeiro em relação a y.

$R = \begin{cases} \dfrac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y} \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$, integrando primeiro em relação a x.

Neste momento, é importante discutir com os alunos as vantagens de se representar algebricamente a região de integração de diferentes formas, considerando que “em alguns casos, uma boa escolha da ordem de integração pode simplificar bastante o trabalho. Em outros, pode não ser possível calcular a integral dupla para uma escolha e ser possível para outra. (FLEMMING; GONÇALVES, 2007, p. 237).”

A partir da interpretação algébrica e gráfica, podem-se fazer as seguintes representações da região por meio da Integral Dupla:

$$I=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(x+y)dydx \text{ ou } I=\int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}(x+y)dxdy$$

Estas representações permitem calcular a integral $I=\iint_R (x+y)dA$ onde R é a região limitada por $y=x^2$ e $y=2x$.

Realizando os tratamentos utilizados na situação 1, conforme apresentado abaixo, obtém-se $I=\frac{52}{15}$:

a) Integrando primeiro em função de x:

$$I=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(x+y)dydx$$

$$I=\int_0^2\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{2x}dx$$

$$I=\int_0^2\left[4x^2-x^3-\frac{x^4}{2}\right]dx$$

$$I=\frac{4}{3}x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\Big|_0^2=$$

$$I=\frac{32}{3}-4-\frac{32}{10}-0=\frac{52}{15}\ .$$

b) Integrando primeiro em função de y:

$$I=\int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}(x+y)dxdy$$

$$I=\int_0^4\left[\frac{x^2}{2}+yx\right]\Bigg|_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}dy$$

$$I=\int_0^4\left[\frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{2}+y\sqrt{y}-\frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{2}-y\cdot\frac{y}{2}\right]dy$$

$$I=\left[\frac{y^2}{4}+\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{y^3}{24}-\frac{y^3}{6}\right]_0^4$$

$$I=4+\frac{64}{5}-\frac{64}{24}-\frac{64}{6}=\frac{52}{15}\ .$$

Situação 4:

Calcular a integral $\iint_R xydA$, onde R é a região limitada por $y=\frac{1}{2}x$, $y=2x$ e $y=-x+3$.

Assim como nos casos anteriores, discute-se com os alunos como definir a região de integração e, em seguida, faz-se a abordagem por meio dos tratamentos e conversões entre os registros que se tornarem necessários para o cálculo da integral.

A região de integração, representada por meio do registro de representação algébrica, pode ser convertida para o seguinte registro de representação gráfica:

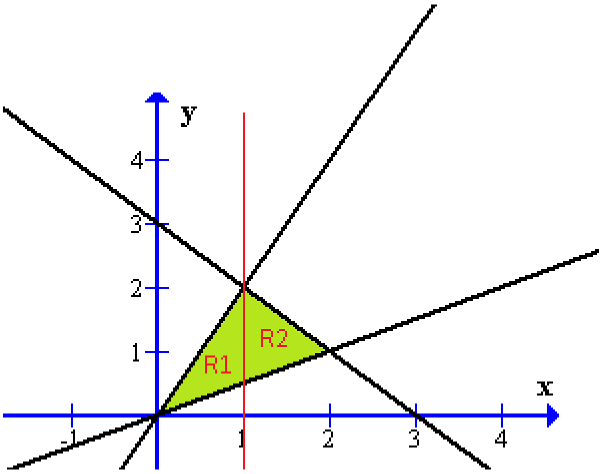


Figura 14 – Representação gráfica da região de integração.

Fonte: Elaboração do autor, 2011.

A representação gráfica das equações que delimitam a região de integração torna-se necessária, pois permite que o aluno visualize, com um menor custo, que esta região não se enquadra nos casos apresentados anteriormente, sendo necessário dividir a região em duas sub-regiões de integração. Nesse caso, a integral será a soma da integral destas duas sub-regiões.

A representação gráfica permite ao aluno concluir que:

A região R_1 é delimitada pelas equações $x=1$, $y=\frac{1}{2}x$ e $y=2x$.

A região R_2 é delimitada pelas equações $x=1$, x = 2 e $y=\frac{1}{2}x$, e $y=-x+3$.

Portanto, a região de integração, representada por meio do registro de representação gráfica, pode ser convertida para o seguinte registro de representação algébrica:

$$R_1=\begin{cases}\frac{1}{2}x\le y\le 2x\\ 0\le x\le 1\end{cases}\quad \text{e,}$$

$$R_2=\begin{cases}\frac{1}{2}x\le y\le -x+3\\ 1\le x\le 2\end{cases}.$$

Considerando as representações algébrica e gráfica, pode-se fazer a seguinte representação da região por meio da Integral Dupla:

$$:\ \iint_R xydA=\iint_{R_1} xydA+\iint_{R_2} xydA=\int_0^1\int_{\frac{1}{2}x}^{2x} xydydx+\int_1^2\int_{\frac{1}{2}x}^{-x+3} xydydx\ .$$

Realizando os tratamentos utilizados na situação 1, esta representação permite obter a integral solicitada, conforme abaixo:

$$I=\int_0^1\int_{\frac{1}{2}x}^{2x} xydydx+\int_1^2\int_{\frac{1}{2}x}^{-x+3} xydydx$$

$$I=\int_0^1\left[\frac{xy^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}x}^{2x}dx+\int_1^2\left[\frac{xy^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}x}^{-x+3}dx$$

$$I=\int_0^1\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{x^3}{8}\right)dx+\int_1^2\left(\frac{x^3}{2}-3x^2+\frac{9}{2}x-\frac{x^3}{8}\right)dx$$

$$I=\left(\frac{4}{8}x^4-\frac{x^4}{32}-0\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{x^4}{8}-x^3+\frac{9}{4}x^2-\frac{x^4}{32}\right)\Bigg|_1^2=\frac{13}{8}$$

Situação 5:

Determinar a massa total de uma chapa homogênea formada por um quadrado de lado *2a*, encimado por um triângulo isósceles que tem por base o lado *2a* do quadrado e por altura *a*.

Inicialmente, discute-se com os alunos como representar a chapa graficamente no plano cartesiano, conforme figura 15 abaixo:

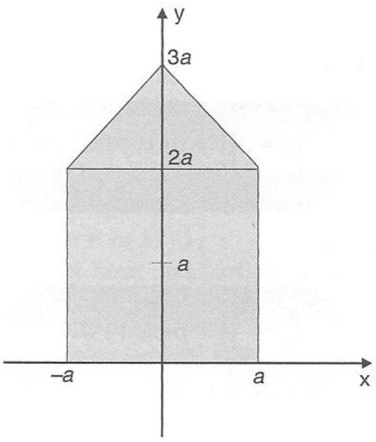


Figura 15 – Representação gráfica da chapa.

Fonte: FLEMMING, Diva Maria; GONÇALVES, Mirian Buss**. Cálculo B:** funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfícies. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2007, p. 268.

Para que o aluno tenha êxito na representação gráfica acima ele precisa dominar os conceitos geométricos de quadrado e triângulo isósceles.

Concordando com Flemming e Gonçalves (2007, p. 268), "como a chapa é homogênea e está simetricamente em relação ao eixo dos y", pode-se trabalhar apenas com a metade da região descrita.

Desta forma tem-se que a região R de integração pode ser representada graficamente por:

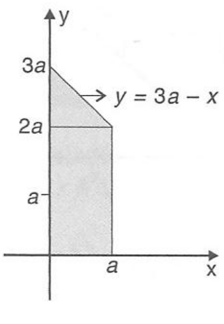


Figura 16 – Representação gráfica da região de integração.

Fonte: FLEMMING, Diva Maria; GONÇALVES, Mirian Buss**. Cálculo B:** funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfícies. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2007, p. 268.

A região de integração, representada por meio do registro de representação gráfica, pode ser convertida para o seguinte registro de representação algébrica:

$$R = \begin{cases} 0 \le y \le 3a - x \\ 0 \le x \le a \end{cases}$$

A conversão do registro gráfico para o algébrico torna-se necessária para que o aluno possa determinar os limites da região de integração. Porém, para que essa conversão ocorra é importante que o aluno reconheça que a região é composta por diferentes retas. Desta forma, ele deverá dominar os tratamentos que realizar esta conversão, como por exemplo, plano cartesiano, sistema de equações e equação da reta.

De acordo com Flemming e Gonçalves (2007, p. 266) a massa total de uma lâmina é definida por:

$$M = \iint_R p(x, y) dA .$$

Desta forma, mobilizando os registros gráfico e algébrico da região de integração representados acima, considerando a densidade linear $p(x, y) = k$, pois a chapa é homogênea tem-se que a massa total da chapa é dada pela integral:

$$M = 2k \int_0^a \int_0^{3a-x} dy dx .$$

Esta representação permite determinar a massa solicitada, realizando-se os tratamentos utilizados nas situações anteriores, conforme abaixo:

$$M = 2k \int_0^a y \Big|_0^{3a-x} dx$$

$$M = 2k \int_0^a (3a - x) dx$$

$$M = 2k \left(3ax - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a$$

$$M = 2k \left(3a^2 - \frac{a^2}{2} \right)$$

$$M = 2k . \frac{5a^2}{2}$$

$M = 5a^2 k$ unidades de massa.

Os diferentes registros de representação mobilizados nesta etapa não têm o intuito de esgotar as possibilidades do trabalho docente, mas, sim, apresentar alternativas para o processo de ensino. Cabe, ainda, ressaltar que, num primeiro momento, a mobilização dos diferentes registros pode aumentar os custos de tratamento ao aluno, mas esse esforço torna-se necessário para que o aluno aumente os efeitos cognitivos posteriores quando este necessitar fazer a opção entre os registros para resolver determinada situação.

5ª etapa: Resolução de exercícios

Para finalizar, deve-se propor a resolução de exercícios, conforme proposta abaixo. O professor seleciona uma lista que permita ao aluno a utilização de diferentes registros de representação, e em diferentes sentidos, ou seja, da representação algébrica para a gráfica e vice-versa.

A resolução dos exercícios apresentados abaixo encontra-se em anexo.

1) Calcular $\iint_R f(x, y)dxdy$, onde:

a) $f(x, y) = xe^{xy}$; R é o retângulo $\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

b) $f(x, y) = ye^{xy}$; R é o retângulo $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

2) Esboçar a região de integração e calcular as integrais iteradas seguintes:

a) $\int_0^1 \int_x^{2x} (2x + 4y)dydx$

b) $\int_0^2 \int_{-y}^{y} (xy^2 + x)dxdy$

c) $\int_{-1}^2 \int_0^{x+1} x^2 dydx$

3) Calcular $\iint_R (x + 4)dxdy$, onde R é o retângulo $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 6$.

4) Calcular $\iint_R xdxdy$, onde R é a região delimitada por $y = -x$, $y = 4x$ e $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

5) Calcular $\iint_R (x + 2)dxdy$, onde R é a região delimitada por:

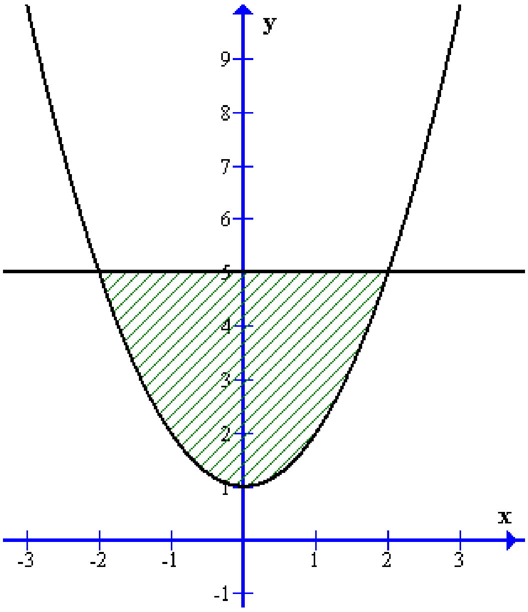


Figura 17: Representação gráfica da região de integração.

Fonte: Elaboração do autor, 2011.

Após a apresentação dos diferentes registros de representação envolvendo as integrais duplas, pode-se observar que cada registro apresenta sua especificidade e requer do aluno o domínio de certos conceitos. Porém, é justamente na possibilidade de mobilização dos diferentes registros de representações, simultaneamente, que se encontra a chave para a aprendizagem em matemática, sendo que "a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas." (DUVAL 2008, p. 15), já que cada registro permite a visualização de determinados elementos de forma mais possante que outros, reduzindo, desta forma, os custos de tratamento. Portanto, as atividades de formação de uma representação identificável, tratamento e conversão são indispensáveis ao processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Para Duval (2009, p. 98):

> A coordenação dos diferentes registros de representação ligados à objetivação ou ao tratamento dos conhecimentos não se opera espontaneamente, mesmo no decorrer de um ensino que mobiliza essa diversidade de registros. [...]. Quando a aquisição de conhecimentos foi ligada à formação e a tratamentos de representação efetuados em um só registro ou privilegiou um registro particular [...], então essa aquisição fica limitada a um só registro. E mesmo quando vários registros foram mobilizados, simultaneamente ou sucessivamente, isso não provoca sua coordenação.

Dessa forma, seja com um ensino que considere apenas um único registro, ou que mobilize vários registros, a aprendizagem continua quase sempre sendo monorregistro. Este tipo de aprendizagem pode proporcionar o desenvolvimento de uma certa compreensão, vinculada ao contexto onde se realizou a aprendizagem, ou seja, na aprendizagem monorregistro, uma grande parte dos alunos mostra-se incapaz de mobilizar os conceitos adquiridos em outros contextos, portanto ela não permite qualquer transferência.

Concordando com Duval (2009, p. 98), “só uma compreensão integrativa, quer dizer, uma compreensão fundada sobre uma coordenação de registros dá essas possibilidades de transferência.” O mesmo autor (2009, p. 98) enfatiza que “uma aprendizagem especificamente centrada sobre a conversão de representações e efetuada fora de toda tarefa de tratamento parece, então, necessária ao início de todo o ensino que dá acesso a um novo domínio ou a uma nova rede conceitual.”

Portanto, é necessário que o professor crie estratégias que permitam aos alunos mobilizar os diferentes registros e, ainda, que estas conversões possibilitem que o aluno identifique as unidades significantes nos registros de chegada e partida, considerando que essa discriminação é condição necessária para a atividade de conversão e, consequentemente, para o desenvolvimento da coordenação de diferentes registros de representação.

Na próxima seção, apresentam-se as considerações finais da pesquisa.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a finalização da pesquisa que teve como objetivo principal conhecer as possibilidades que as representações semióticas podem oferecer no processo de transposição didática dos objetos de ensino do Cálculo Diferencial e Integral no R^3, pode-se estabelecer algumas considerações importantes em relação a este objeto de estudo.

Retomando os objetivos específicos, é possível constatar que a utilização dos registros de representação é imprescindível ao processo de transposição didática dos objetos matemáticos, tendo-se em vista a natureza abstrata dos objetos matemáticos, ou seja, esses objetos recorrem a uma representação para serem acessados.

Os diferentes registros, além de possibilitarem a visualização do objeto, permitem ainda a compreensão dos algoritmos e conceitos utilizados para resolução de uma determinada situação. Por exemplo, o registro gráfico permite uma melhor visualização da região de integração que o registro algébrico. Portanto, o conhecimento das regras de conversão entre os registros e dos tratamentos específicos a cada registro são fundamentais ao processo de ensino-aprendizagem do conteúdo tratado e, consequentemente da matemática.

Considerando que a mobilização dos diferentes registros apresenta-se como atividade fundamental à compreensão dos objetos matemáticos, torna-se fundamental, ao professor de matemática, a busca por uma formação constante, imersa numa prática reflexiva, já que sua utilização exige um conhecimento profundo dos diferentes registros específicos da matemática bem como das relações estabelecidas entre cada registro, o que influencia o processo de conversão.

Desta forma, retomando Fiorentini e Castro (2003), a formação docente é resultante da relação estabelecida entre as experiências vivenciadas em sua prática docente, seus conhecimentos adquiridos (o que ele já sabe e o que ele aprende constantemente) e ainda com a troca de experiências entre profissionais da educação.

Portanto, considerando a importância do uso de diferentes registros de representação no processo de transposição didática dos objetos matemáticos, esta pesquisa propôs uma sequência didática que possibilite ao aluno visualizar o objeto Integral Dupla em diferentes registros, o que, de acordo com Duval (2008; 2009), é a chave para a compreensão dos objetos matemáticos.

A proposta apresentada não tem a pretensão de ser um modelo acabado, mas, sim, proporcionar aos leitores e pesquisadores um modelo que considere os diferentes registros de representação no processo de transposição didática dos objetos matemáticos, não como um fim em si, porém como uma possibilidade de discussão de mais uma metodologia de abordagem dos objetos do Cálculo Diferencial e Integral.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. Registros de representações semióticas e compreensão de conceitos geométricos. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. 4. ed. Campinas: Papirus, 2008. p. 125-148.

ASSUMPÇÃO, Ismael. Interdisciplinaridade, uma tentativa de compreensão do fenômeno. In: FAZENDA, Ivani (Org.). **Práticas interdisciplinares na escola**. 6. ed. São Paulo: Cortez. 1999. p. 23-26.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. O professor de matemática nas escolas de 1º e 2º graus. In: **______** (Org.). **Educação Matemática**. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005. p. 45-58.

BLANCO, Maria Mercedes Garcia. A formação inicial do professor de matemática: fundamentos para a definição de um curriculum. In: FIORENTINI, Dário (Org.). **Formação de professores:** explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, São Paulo: Mercado de Letras, 2003. p. 51-86.

BROUSSEAU, Guy. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma. (Orgs.). **Didática da Matemática:** reflexões pscicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed. 1996. p. 48-72.

CHEVALARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. **Estudar Matemáticas**: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed. 2001.

COLOMBO, Janecler Aparecida Amorim; FLORES, Cláudia Regina; MORETTI, Méricles Thadeu. Representações do número racional na formação de professores que ensinam matemática. **Revista Eletrônica de Republicação em Educação Matemática**, Florianópolis, p. 41-48. 2005. Disponível em: <http://www.redemat.mtm.ufsc.br/reremat/republic_08_artigo.PDF> Acesso em: 15 abr. 2010.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 17. ed. Campinas, São Paulo: Papirus, 2009.

DAMM, Regina Flemming. Registros de representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática:** Uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: Educ, 2008. p. 167-188.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. 4. ed. Campinas: Papirus, 2008. p. 11-33.

______. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Coleção contextos da ciência – fascículo 1. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da física, 2009.

FIORENTINI, Dário; CASTRO, Franciana Carneiro de. Tornando-se professor de matemática: o caso de Allan em prática de ensino e estágio supervisionado. In: FIORENTINI, Dário (Org.). **Formação de professores:** explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, São Paulo: Mercado de Letras, 2003. p. 121-156.

FLEMMING, Diva Maria; GONÇALVES, Mirian Buss**. Cálculo B:** funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfícies. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2007.

FLEMMING, Diva Marília; LUZ, Elisa Flemming; WAGNER, Christian. **Cálculo II**. 3. ed. rev. e atual. (livro didático). Palhoça: Unisul Virtual, 2008.

FLORES, Cláudia Regina; MORETTI, Méricles Thadeu. O funcionamento cognitivo das representações gráficas: ponto de análise para a aprendizagem matemática. **Reremat:** Revista Eletrônica de Republicação em Educação Matemática, Florianópolis, p. 26-38, 2006. Disponível em: <http://www.redemat.mtm.ufsc.br/reremat/republic_07_artigo.PDF>. Acesso em: 15 abr. 2010.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: Saberes necessários à prática educativa. 30. ed. Rio de Janeiro: Paz e terra, 2004.

FREITAS, José Luiz Magalhães de. Teoria das situações didáticas. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática:** Uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: Educ, 2008. p. 77-112.

LEONEL, Vilson; MOTTA, Alexandre de Medeiros. **Ciência e pesquisa:** livro didático. 2. ed. rev. e atual. Palhoça: UnisulVirtual, 2007. Disponível em: <http://aplicacoes.unisul.br/pergamum/pdf/87815_Vilson.pdf>. Acesso em: 5 out. 2011.

MORETTI, Méricles Thadeu. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.).

Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. 4. ed. Campinas: Papirus, 2008. p. 149-160.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** Uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

______. Transposição didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática:** Uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: Educ, 2008. p. 11-48.

PIRES, Célia Maria Carolino. **Currículos de matemática:** da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

RAUEN, Fábio José. **Elementos de iniciação à pesquisa**. Rio do Sul: Nova Era, 1999.

______. **Roteiros de pesquisa**. Rio do Sul: Nova Era, 2006.

SILVA, Cintia Rosa da. **Conversão de registros de representação**: desenvolvimento de aplicativos para o ensino-aprendizagem de funções. 2009, 157 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Linguagem)-Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2009.

SILVA, Edna Lúcia da; MENEZES, Estera Muszkat. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 3. ed. rev. atual. Florianópolis: Laboratório de Ensino a Distância da UFSC, 2001. Disponível em: <http://projetos.inf.ufsc.br/arquivos/Metodologia%20da%20Pesquisa%203a%20edicao.pdf>. Acesso em: 7 out. 2011.

SOUSA, Ana Cláudia Gouveia; BARRETO, Marcília Chagas. **Os registros de representação semiótica e o trabalho com aritmética nas séries iniciais da escolaridade**: uma experiência de formação docente. 2008. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/298-1-A-t1_sousa_ta.pdf> Acesso em: 15 abr. 2010.

STEWART, James. **Cálculo**. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning. 2001. v. II.

ANEXOS

ANEXO A – Resolução dos exercícios

1) Calcular $\iint\limits_R f(x, y)dxdy$, onde:

a) $f(x, y) = xe^{xy}$; R é o retângulo $\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

Representação gráfica da região de integração:

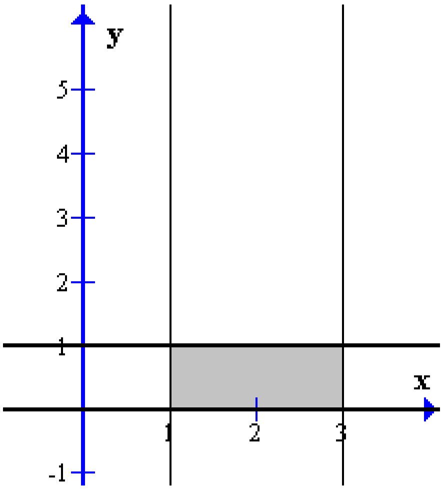


Figura 16: Representação gráfica da região de integração.

Fonte: Elaboração do autor, 2011.

Aplicando os procedimentos do cálculo integral obtém-se:

$$\int_1^3 \int_0^1 xe^{xy} dydx =$$

$$\int_1^3 \left(e^{xy}\right)\Big|_0^1 dx =$$

$$\int_1^3 \left(e^x - e^0\right)dx =$$

$$\int_1^3 \left(e^x - 1\right)dx =$$

$$\left(e^x - x\right)\Big|_1^3 =$$

$$e^3 - 3 - e^1 + 1 =$$

$$e^3 - e - 2$$

$$\int xe^{xy} dy =$$

$$u = xy$$

$$du = xdy$$

$$\int e^u du =$$

$$e^u = e^{xy}$$

$$\int e^x dx =$$

$$u = x$$

$$du = dx$$

$$\int e^u du = e^u = e^x$$

b) $f(x,y) = ye^{xy}$; R é o retângulo $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

Representação gráfica da região de integração:

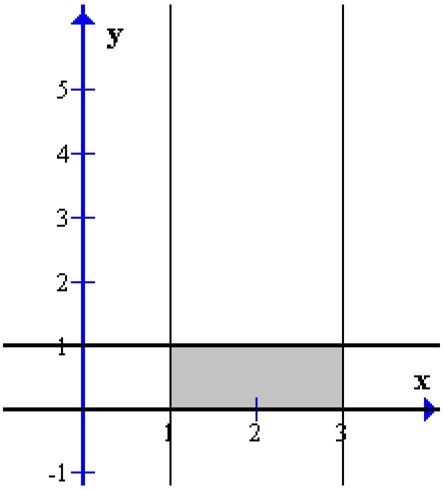


Figura 17: Representação gráfica da região de integração.

Fonte: Elaboração do autor, 2011.

Aplicando os procedimentos do cálculo integral obtém-se:

$$\int_0^1 \int_0^3 ye^{xy}\,dxdy =$$

$$\int_0^1 \left(e^{xy}\right)\Big|_0^3 dy =$$

$$\int_0^1 \left(e^{3y} - e^{0y}\right)dy =$$

$$\int_0^1 \left(e^{3y} - 1\right)dy =$$

$$\left(\frac{1}{3}e^{3y} - y\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$\frac{1}{3}e^{3\cdot 1} - 1 - \frac{1}{3}e^{3\cdot 0} - 0 =$$

$$\frac{1}{3}e^{3} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}e^{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}\cdot\left(e^{3} - 4\right)$$

$$\int ye^{xy}\,dx =$$

$$u = xy$$

$$du = ydx$$

$$\int e^{u}\,du =$$

$$e^{u} = e^{xy}$$

$$\int e^{3y} =$$

$$u = 3y$$

$$du = 3dy$$

$$dy = \frac{du}{3}$$

$$\int e^{u}\,\frac{du}{3} =$$

$$\frac{1}{3}e^{u} =$$

$$\frac{1}{3}e^{xy}$$

2) Esboçar a região de integração e calcular as integrais iteradas seguintes:

a) $\int_0^1 \int_x^{2x} (2x + 4y)dydx$

Representação algébrica da região de integração:

$$R = \begin{cases} x \le y \le 2x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Representação gráfica da região de integração:

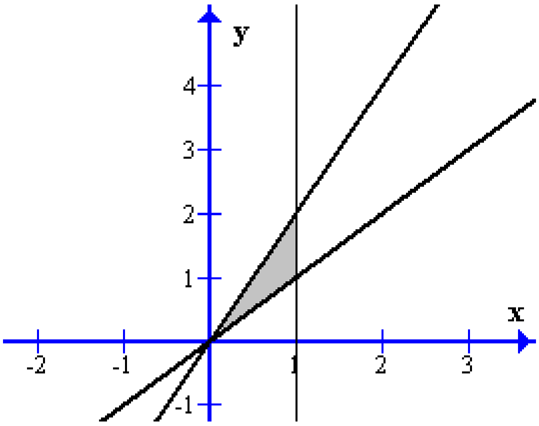


Figura 18: Representação gráfica da região de integração.

Fonte: Elaboração do autor, 2011.

Aplicando os procedimentos do cálculo integral obtém-se:

$$\int_0^1 \int_x^{2x} (2x + 4y)dydx =$$

$$\int_0^1 \left| 2xy + 2y^2 \right|_x^{2x} dx =$$

$$\int_0^1 \left| 4x^2 + 8x^2 - 2x^2 - 2x^2 \right| dx =$$

$$\int_0^1 \left| 8x^2 \right| dx =$$

$$\left| \frac{8x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{8 \cdot 1^3}{3} - \frac{8 \cdot 0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

b) $\int_0^2 \int_{-y}^{y} (xy^2 + x)dxdy$

Representação algébrica da região de integração:

$$R = \begin{cases} -y \le x \le y \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

Representação gráfica da região de integração:

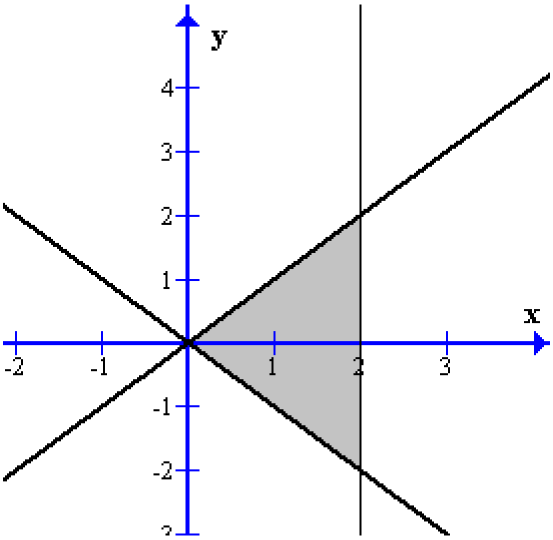


Figura 19: Representação gráfica da região de integração.

Fonte: Elaboração do autor, 2011.

Aplicando os procedimentos do cálculo integral obtém-se:

$$\int_0^2 \left| \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2}{2} \right|_{-y}^{y} dy =$$

$$\int_0^2 \left| \frac{y^4}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{2} - \frac{y^2}{2} \right|_{-y}^{y} dy =$$

$$\int_0^2 0dy = 0$$

c) $\int_{-1}^{2} \int_{0}^{x+1} x^2 dydx$

Representação algébrica da região de integração:

$$R = \begin{cases} 0 \le y \le x+1 \\ -1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Representação gráfica da região de integração:

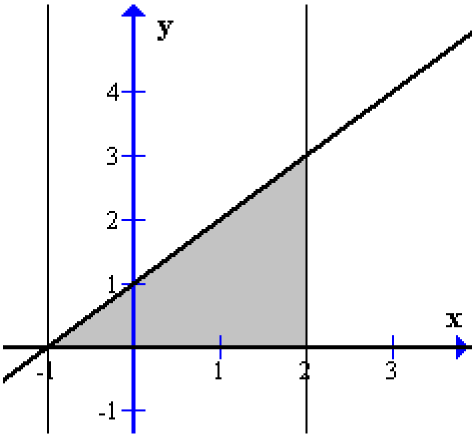


Figura 20: Representação gráfica da região de integração.

Fonte: Elaboração do autor, 2011.

Aplicando os procedimentos do cálculo integral obtém-se:

$$\int_{-1}^{2}\int_{0}^{x+1} x^2 dydx =$$

$$\int_{-1}^{2} \left| x^2 y \right|_{0}^{x+1} dx =$$

$$\int_{-1}^{2} \left| x^2(x+1) - x^2 \cdot 0 \right| dx =$$

$$\int_{-1}^{2} \left| x^3 + x^2 \right| dx =$$

$$\left. \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{2} =$$

$$\frac{2^4}{4} + \frac{2^3}{3} - \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} =$$

$$4 + \frac{8}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} =$$

$$\frac{48+32-3+4}{12} = \frac{81}{12} = \frac{27}{4}$$

3) Calcular $\iint_R (x+4)dxdy$, onde R é o retângulo $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 6$.

Representação algébrica da região de integração:

$$R = \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 6 \end{cases}$$

Representação gráfica da região de integração:

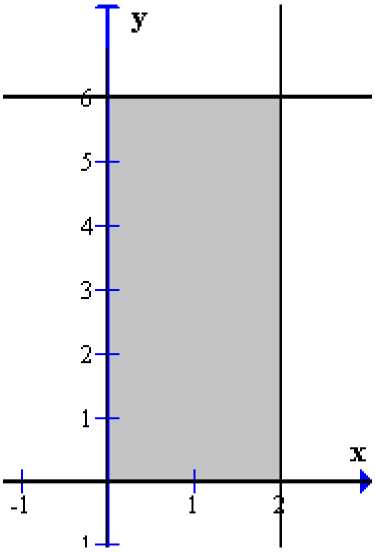


Figura 21: Representação gráfica da região de integração.

Fonte: Elaboração do autor, 2011.

$$\int_0^2 \int_0^6 (x+4)dydx =$$

$$\int_0^2 (xy+4y)\Big|_0^6 dx =$$

$$\int_0^2 (6x+24-0)dx =$$

$$\int_0^2 (6x+24)dx =$$

$$(3x^2+24x)\Big|_0^2 =$$

$$3 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 0 =$$

12 + 48 = 60

4) Calcular $\iint_R xdxdy$, onde R é a região delimitada por $y=-x$, $y=4x$ e $y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$.

Representação gráfica da região de integração:

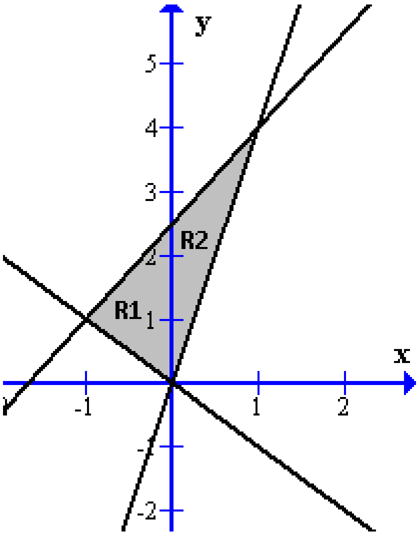


Figura 22: Representação gráfica da região de integração

Fonte: Elaboração do autor, 2011.

Representação algébrica da região de integração:

$$R_1 = \begin{cases} 4x \le y \le \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$R_1 = \begin{cases} -x \le y \le \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \\ -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

Aplicando os procedimentos do cálculo integral obtém-se:

$$\int_0^1 \int_{4x}^{\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}} xdydx + \int_{-1}^0 \int_{-x}^{\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}} xdydx =$$

$$\int_0^1 xy\Big|_{4x}^{\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}} dx + \int_{-1}^0 xy\Big|_{-x}^{\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}} dx =$$

$$\int_0^1 \left[x\left(\frac{3x}{2}+\frac{5}{2}\right) - x \cdot 4x \right] dx + \int_{-1}^0 \left[x\left(\frac{3x}{2}+\frac{5}{2}\right) - x \cdot (-x) \right] dx =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2} - 4x^2 \right] dx + \int_{-1}^0 \left[\frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2} + x^2 \right] dx =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{-5x^2}{2} + \frac{5x}{2} \right] dx + \int_{-1}^0 \left[\frac{5x^2}{2} + \frac{5x}{2} \right] dx =$$

$$\left(\frac{-5x^3}{6} + \frac{5x^2}{4} \right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{5x^3}{6} + \frac{5x^2}{4} \right)\Bigg|_{-1}^0 =$$

$$\frac{-5\cdot 1^3}{6}+\frac{5\cdot 1^2}{4}-\left(\frac{-5\cdot 0^3}{6}+\frac{5\cdot 0^2}{4}\right)+\left(\frac{5\cdot 0^3}{6}+\frac{5\cdot 0^2}{4}\right)-\left(\frac{5\cdot(-1)^3}{6}+\frac{5\cdot(-1)^2}{4}\right)=$$

$$\frac{-5}{6}+\frac{5}{4}+\frac{5}{6}-\frac{5}{4}=0$$

5) Calcular $\iint\limits_R (x+2)dxdy$, onde R é a região delimitada por:

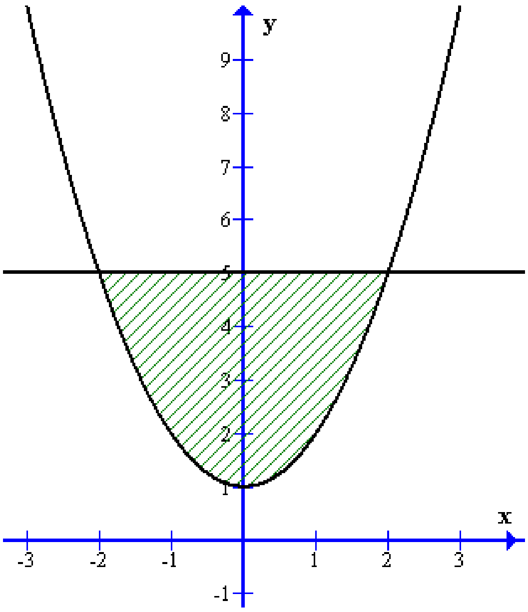


Figura 23: Representação gráfica da região de integração

Fonte: Elaboração do autor, 2011.

Representação algébrica da região de integração:

$$R=\begin{cases} x^2+1\le y\le 5 \\ -2\le x\le 2 \end{cases}$$

Aplicando os procedimentos do cálculo integral obtém-se:

$$\int_{-2}^{2}\int_{x^2+1}^{5}(x+2)dydx=$$

$$\int_{-2}^{2} y\cdot(x+2)\Big|_{x^2+1}^{5}dx=$$

$$\int_{-2}^{2}\left|5\cdot(x+2)-(x^2+1)\cdot(x+2)\right|dx=$$

$$\int_{-2}^{2}(5x+10-x^3-2x^2-x-2)dx=$$

$$\int_{-2}^{2}\left(-x^3-2x^2+4x+8\right)dx=$$

$$-\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+2x^2+8x\Big|_{-2}^{2}=$$

$$-\frac{2^4}{4}-\frac{2\cdot 2^3}{3}+2\cdot 2^2+8\cdot 2-\left(-\frac{(-2)^4}{4}-\frac{2\cdot(-2)^3}{3}+2\cdot(-2)^2+8\cdot(-2)\right)=$$

$$-\frac{16}{4}-\frac{16}{3}+8+16+\frac{16}{4}-\frac{16}{3}-8+16=\frac{64}{3}$$