UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE - UNESC
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

GISELE MEZZARI SILVEIRA

PROPOSIÇÕES PARA O ENSINO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO EM DAVYDOV

CRICIÚMA
2012

GISELE MEZZARI SILVEIRA

PROPOSIÇÕES PARA O ENSINO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO EM DAVYDOV

Monografia apresentada ao programa de Pós-graduação em Educação Matemática (*Lato sensu*) da Universidade do Extremo Sul Catarinense como exigência parcial à obtenção do título de especialista, com a orientação da Profª. Drª. Josélia Euzébio Da Rosa e co-orientação do Prof. Dr. Ademir Damazio.

CRICIÚMA
2012

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por essa oportunidade e a todos que de algum modo participaram deste momento em minha vida de pesquisa, em especial:

A minha orientadora, professora Drª Josélia Euzébio Da Rosa, sem a sua paciência e dedicação não teríamos concluído a presente pesquisa, é um privilégio tê-la como minha orientadora e amiga. Ao co-orientador professor Dr Ademir Damazio, por suas contribuições.

A mãe Veronice (*in memoriam*), distante apenas fisicamente, ao pai Ireno, a mana Gessica e ao tio Valmir pelo apoio emocional e incentivo.

Ao namorado Galgany, pelo companheirismo, apoio afetivo e compreensão dos momentos ausentes.

Ao GPEMAHC - Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural, pelos materiais bibliográficos disponibilizados. A todos os integrantes do grupo, em especial: Sandra, Josi, Cris, Ester e Mila, pelos momentos de estudos, reflexões e desabafos das angústias decorrentes da investigação.

A Ediséia, Sandra, Cléder pela leitura cuidadosa da versão final e suas valiosas contribuições.

Ao programa de Pós – Graduação, Especialização em Educação Matemática da UNESC, aos colegas e os professores do curso por terem contribuído em diversos momentos.

Ao Fundo de Apoio à Manutenção e ao Desenvolvimento da Educação Superior – FUMDES e ao CNPQ - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio financeiro concedido.

A todos,

MUITO OBRIGADA!

RESUMO

O método que adotamos na presente investigação foi o Materialismo Histórico - Dialético. Dentre as categorias do método elegemos a unidade entre o lógico e o histórico. Pois, nossa hipótese consistia em que as proposições davydovianas para o ensino do sistema de numeração eram objetivação da unidade entre o lógico e o histórico. Investigamos o movimento conceitual adotado por Davydov e seus colaboradores nas proposições de ensino para introdução do sistema de numeração no segundo ano do Ensino Fundamental. Os dados da pesquisa foram coletados no livro didático davydoviano do segundo ano e o quinto e sexto capítulo do livro de orientações ao professor para utilizar o livro didático. Após a coleta e organização dos dados, analisamos cada tarefa particular proposta por Davydov e seus colaboradores, a fim de revelarmos as dimensões geral, universal, singular e particular e concomitantemente procedemos à análise da unidade entre o lógico-histórico em Davydov. Ou seja, a relação que dá origem há qualquer sistema numérico particular (binário, ternário, decimal, entre outros). Esta revelação permitiu-nos concluir o procedimento de redução do concreto caótico ao abstrato. Durante o procedimento de análise, estabelecemos um diálogo com as proposições apresentadas nos livros didáticos brasileiros. No decorrer do trabalho concluímos que as proposições de ensino davydovianas divergem totalmente das proposições de ensino tradicionais. E, confirmamos a hipótese de pesquisa, Davydov e seus colaboradores adotam a unidade entre o lógico e o histórico em suas proposições de ensino para introdução do sistema de numeração no segundo ano do Ensino Fundamental. Ou seja, a revelação da lógica do sistema de numeração em Davydov ocorre com base no reflexo histórico do sistema conceitual, expresso no movimento de redução das representações caóticas ao abstrato e deste, a ascensão ao concreto pensado.

Palavras - chave: sistema de numeração; bases numéricas, ordens de medidas, unidade entre o lógico e o histórico.

ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO

O objeto de estudo, na presente investigação, consiste nas proposições davydovianas para o ensino do sistema de numeração no segundo ano do Ensino Fundamental.

Segundo Rosa (2012), Vasili Vasilievich Davydov (1930 – 1998), foi doutor em psicologia e seguidor de Vygotski. Lev Semenovich Vygotski (1896-1934) foi precursor da Teoria Histórico-Cultural. Davydov, Galperin, Talízina, Zankov, são alguns dos seguidores de Vygotski, que elaboraram propostas para o ensino de Matemática, na União Soviética, a partir dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural. Tais propostas consistem em uma reestruturação curricular, que envolve tanto os métodos quanto os conteúdos de ensino.

Para Davydov (1982) a escola deve promover o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes por meio da apropriação dos conceitos científicos. As proposições davydovianas para o ensino de Matemática estão objetivadas em livros didáticos e em livros de orientações aos professores, que foram elaborados por Davydov e seus colaboradores: Gorbov, Mikulina e Savieliev.

O referido material foi produzido, originalmente, em Russo e no Brasil está em processo de tradução do idioma russo para o português pela tradutora Elvira Kim, por solicitação do GPEMAHC (Grupo De Pesquisa Em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural).

O primeiro contado que tivemos com a proposta de Davydov e seus colaboradores, para o ensino de Matemática, foi na primeira disciplina do curso, de Pós-graduação *Latu Sensu* (Especialização em Educação Matemática – UNESC) em 2011. A professora ministrante, estudiosa das proposições davydovianas, nos apresentou a obra de Davydov e seus colaboradores, como uma das possibilidades de superação das fragilidades que permeiam a Educação Matemática brasileira. E, nos convidou para participar do GPEMAHC.

O referido grupo é constituído por pesquisadores e estudantes de quatro das universidades brasileiras, UNESC[1], UNISUL[2], UFSC[3] e UFPI[4]. Os integrantes se

---

[1] UNESC – Universidade Do Extremo Sul Catarinense
[2] UNISUL – Universidade Do Sul De Santa Catarina

encontram quinzenalmente para discussões sobre os fundamentos da Teoria Histórico-Cultural.

Alguns integrantes do GPEMAHC são responsáveis pela formação continuada de professores que ensinam Matemática nos municípios de Criciúma, Maracajá e Balneário Gaivota. A referida formação é sustentada no tripé ensino, pesquisa e extensão. Ou seja, levamos para a formação (extensão) as pesquisas que realizamos sobre e para o ensino de Matemática, com base nas proposições davydovianas.

Durante os encontros de formações continuada, apresentamos algumas das tarefas referentes às proposições de Davydov e seus colaboradores, para o ensino do sistema de numeração.

Para analisarmos as proposições davydovianas para o ensino do sistema de numeração, fez-se necessário a adoção por um método de pesquisa, o materialismo histórico-dialético. Segundo Triviños (1987):

> O materialismo dialético é a base filosófica do marxismo e como tal realiza a tentativa de buscar explicações coerentes, lógicas e racionais para os fenômenos da natureza, da sociedade e do pensamento. [...] Mas o materialismo dialético não só tem como base de seus princípios a matéria, a dialética e a prática social, mas também aspira ser a teoria orientadora da revolução do proletariado. [...]. O materialismo histórico é a ciência filosófica do marxismo que estuda as leis sociológicas que caracterizam a vida da sociedade, de sua evolução histórica e da prática social dos homens, no desenvolvimento da humanidade (TRIVIÑOS, 1987, p. 51).

O materialismo histórico - dialético constitui, segundo Triviños (1987, p. 51), “uma concepção científica da realidade, enriquecida com a prática social da humanidade”. Tal concepção requer um método de pesquisa.

> O método é um meio de obtenção de determinados resultados no conhecimento e na prática. Todo método compreende o conhecimento das leis objetivas. As leis interpretadas constituem o aspecto objetivo do método, sendo o subjetivo formado pelos recursos de pesquisa e transformação dos fenômenos, recursos esses que surgem com base naquelas leis. Por si mesmas, as leis objetivas não constituem o método; tornam-se método os procedimentos que nelas se baseiam e servem para a sucessiva interpretação e transformação da realidade, para a obtenção de novos resultados (KOPNIN, 1978, p. 91).

Enquanto método, segundo Kopnin (1978), a dialética materialista elaborou

---

[3] UFSC – Universidade Federal De Santa Catarina
[4] UFPI – Universidade Federal Do Piauí

infinitos modos e procedimentos desenvolvidos com base em categorias como, abstrato e concreto, lógico e histórico, análise e síntese, entre outros.

Não existe um número exato e definitivo de categorias, pois a partir da atividade humana podem surgir novas (KOPNIN, 1978). O surgimento das categorias ocorreu, conforme Triviños (1995, p. 55), "no desenvolvimento histórico do conhecimento e na prática social" [...] no "movimento do abstrato ao concreto, do exterior ao interior, do fenômeno à essência" (DICIONÁRIO DE FILOSOFIA, apud TRIVIÑOS, 1987, p. 55).

Segundo Kopnin (1978), no materialismo dialético se constrói o sistema de categorias "para revelar, desenvolver nesse sistema o objeto do materialismo dialético: as leis objetivas da realidade" (KOPNIN, 1978, p. 117). E, "as categorias são formas de reflexo, de conhecimento da realidade, resultam do processo de desenvolvimento como níveis deste". (Idem, p. 117-118).

Dentre as categorias do método, adotamos para a presente investigação, a unidade entre o lógico e o histórico. Estas, "são de grande importância para compreender a essência do conhecimento" (ROSENTAL, 1960, p. 324). E, nossa pretensão é compreender a essência da proposta produzida por Davydov e seus colaboradores para o ensino do sistema de numeração.

Segundo Ifrah (1997), o sistema de numeração surgiu a partir da necessidade humana de designar números elevados com a menor quantidade de símbolos. Para tanto, foi necessário formar agrupamentos particulares, com quantidades determinadas pela base numérica considerada, e geradora de diferentes ordens de medidas.

Segundo Kopnin (1978), entende-se por histórico "o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento" e o lógico "a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema das abstrações" (Idem, p. 183-184).

> A história frequentemente se move através da ziguezagues, de avanços e recuos, de desvios, sofre acidentes de percurso, passa por etapas meramente acidentais. Para se conhecer o processo de desenvolvimento de um conhecimento ou de um determinado aspecto da realidade é preciso conhecer a <u>essência da evolução histórica</u>. Isso significa selecionar o que é secundário do que é principal o que é necessário do que é acidental, etc... Essa distinção é decisiva, pois ela mostra o erro do historicismo, que espera conhecer a realidade simplesmente conhecendo a historia da realidade, não fazendo distinção entre a história e o processo. O processo é a essência da evolução histórica (DUARTE, 1987, p. 13. Grifos do autor).

Em relação à organização do ensino dos conhecimentos produzidos historicamente pela humanidade, o que significa “selecionar o que é secundário do que é principal o que é necessário do que é acidental” (DUARTE, 1987, p. 13)? O que significa considerar a unidade entre o lógico e o histórico no ensino do sistema de numeração?

Nossa hipótese de investigação é que Davydov e seus colaboradores objetivaram a unidade entre o lógico e o histórico em suas proposições para o ensino do sistema de numeração.

Tal hipótese surgiu a partir das reflexões desencadeadas pelas críticas que ouvimos durante formação de professores de que Davydov é “muito lógico”, que “não considera a história dos conceitos”.

Além disso, os integrantes do GPEMAHC relatam que quando apresentam as proposições Davydovianas em eventos científicos, as críticas incidem na sequência lógica adotada por Davydov. Os ouvintes afirmam que Davydov considera apenas o conhecimento pronto e acabado, não considera o movimento histórico conceitual pelo qual a humanidade percorreu no desenvolvimento dos conceitos.

Tais críticas nos levaram a elaborar o seguinte problema de pesquisa: Qual é o movimento conceitual adotado por Davydov e seus colaboradores nas proposições de ensino para introdução do sistema de numeração no segundo ano do Ensino Fundamental? Em consonância com a hipótese e com o problema de pesquisa, nos propomos o seguinte objetivo: Analisar o movimento adotado por Davydov e seus colaboradores em suas proposições de ensino para introdução do sistema de numeração no segundo ano do Ensino Fundamental.

Para responder o problema de pesquisa e atingir o objetivo proposto, foi necessário explicitar a singularidade das proposições davydovianas, para tanto, estabelecemos um diálogo com as proposições apresentadas nos livros didáticos brasileiros e elencamos as seguintes questões de pesquisa:

1) O que é sistema de numeração em Matemática?
2) Qual a interpretação de Davydov e seus colaboradores sobre o sistema de numeração em suas proposições de Ensino?
3) Qual o lugar do sistema de numeração decimal no movimento conceitual das duas proposições analisadas?

4) A utilização dos dedos das mãos é considerada como material didático em Davydov?
5) Davydov e seus colaboradores adotam o ábaco?
6) Como se introduz o zero em Davydov?
7) Qual lógica é considerada em Davydov e qual o papel da história?
8) Como são inter-relacionadas as dimensões geral, universal, particular e singular nas proposições davydovianas?

Trata-se de uma pesquisa teórica. Os dados consistem no sistema de tarefas apresentado por Davydov e seus colaboradores para o ensino do sistema de numeração. A fonte de dados foi o livro didático do segundo ano (ДАВЫДОВ et al, 2012) e o quinto e sexto capítulo do livro de orientações ao professor (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009) para utilizar o livro didático. Desse modo, as proposições davydovianas permearam todos os momentos do processo de investigação.

Nosso primeiro olhar para as proposições davydovianas gerou algumas questões intrigantes, tais como: Parecia que as proposições davydovianas para o ensino do sistema de numeração iam ao encontro daquelas apresentadas nos livros didáticos brasileiros. Parecia predominar os conteúdos empíricos, muitas imagens, muitos objetos. De acordo com o método adotado, tal confusão inicial é inerente ao ponto de partida de uma pesquisa, no qual, os dados estão representados ainda caoticamente, por sua aparência externa.

Selecionamos aquelas tarefas que representam a totalidade das proposições davydovianas no que se refere ao ensino do sistema de numeração. O primeiro esforço foi por compreender cada tarefa e resolvê-la. Para, na sequência, reproduzir o processo de proposição e resolução, de forma explicativa. Ao concluir essa etapa, estávamos com os nossos dados coletados e organizados. Porém, faltava a análise que consistia, inicialmente, em revelar as dimensões geral, universal, singular e particular e concomitantemente procedemos à análise da unidade entre o lógico-histórico em Davydov.

Nessa etapa fez-se necessário, outras leituras sobre os fundamentos matemáticos (IFRAN 1947; COSTA, 1866, GUNDLACH 1992), filosóficos (TRIVIÑOS 1987; KOPNIN 1978; MARX, 1999; KOSIK 1976; ROSENTAL 1960), psicológicos (VIGOTSKI, 2000) e didáticos (ДАВЫДОВ et al, 2012). Pois, as leituras do livro didático e de orientações referentes às proposições davydovianas não foram suficientes para que compreendêssemos sua complexidade. Analisamos cada tarefa particular, com base nos fundamentos da teoria Histórico-Cultural e nos livros didáticos brasileiros aprovados pelo Ministério da Educação e Cultura, para o ensino de Matemática nos anos iniciais da Educação Básica.

Também focamos nosso olhar para o fio condutor da inter-relação entre as diversas tarefas que constituem o sistema das proposições davydovianas para o ensino do conceito já mencionado. Tal análise possibilitou-nos revelar a relação universal entre todos os elementos constituidores das referidas proposições, ou seja, a relação que dá origem a qualquer sistema numérico particular (binário, ternário, decimal, entre outros). Esta revelação permitiu-nos, concluir o procedimento de redução do concreto caótico ao abstrato.

Para Davydov (1982), o processo de redução do objeto ao abstrato está relacionado ao universal. A abstração essencial, universal desvela as bases genéticas do todo. Segundo Davydov (1982) a tarefa básica da análise consiste em reduzir as diferenças no interior do todo à base única que as gera: à sua essência.

É por meio das abstrações que é possível, no desenvolvimento dos conhecimentos, apreender para além das aparências do objeto estudado, o universal, a relação essencial. As abstrações, afirma Kopnin (1978), “são um novo degrau qualitativamente diverso no movimento do conhecimento”. Ainda segundo esse autor, a essência das abstrações não é separar indícios aparentes dos objetos, dados empiricamente, mas identificar as relações de sua essência.

No materialismo histórico-dialético, conforme Kopnin (1978), o concreto é ponto de partida e chegada do processo de conhecimento de um determinado objeto ou fenômeno. Porém, o processo para se chegar ao conhecimento, em nível de concreto ponto de chegada (pensado), não é imediato, mas mediado por abstrações:

> o conhecimento não pode passar imediatamente do sensorial-concreto ao concreto pensado. Esse caminho, como todos os outros, é complexo e contraditório. Para atingir a concreticidade autêntica, o conhecimento perde temporariamente a concreticidade em geral e passa ao seu próprio oposto: ao abstrato (KOPNIN, 1978, p. 158).

Conforme Kopnin (1978), o concreto ponto de chegada (pensado) é o conhecimento mais profundo, pois reflete as relações internas do objeto estudado entre geral, universal, particular, singular, abstrato e concreto. Ou seja, o concreto “é concreto porque é a síntese de múltiplas determinações” (MARX, 1999, p. 39).

> O *concreto* no pensamento é o *conhecimento* mais *profundo* e *substancial* dos fenômenos da realidade, pois reflete com o seu conteúdo não as definibilidades exteriores do objeto em sua relação imediata, acessível à contemplação viva, mas diversos aspectos substanciais, conexões, relações em sua vinculação interna necessária. Abstrações isoladas elevam o nosso conhecimento da apreensão geral do empírico ao universal, enquanto o *concreto* no pensamento fundamenta a conexão do *singular* com o *universal*, fornece não uma simples unidade de aspectos diversos mas a identidade dos contrários (KOPNIN,1978, p. 162).

Conforme Kosik (1976), para que o pensamento passe do abstrato ao concreto deve ocorrer um movimento no próprio plano abstrato, “que é a negação da imediaticidade, da evidência e da concreticidade sensível” (KOSIK, 1976, p. 30).

No estágio final da pesquisa concluímos que as proposições davydovianas divergem totalmente das proposições apresentadas nos livros didáticos brasileiros. Tal conclusão foi fundamenta na relação abstrata já mencionada. Esta nos permitiu ir além das aparências, verificar as múltiplas determinações subjacentes a cada tarefa que antes, pareciam empíricas e concebê-las em seu teor teórico. Ou seja, no momento em que Davydov e seus colaboradores elevam suas proposições do plano objetal (agrupamentos a partir das relações entre grandezas) ao plano mental (representação na reta numérica e em linha), em um movimento sustentado na unidade entre o lógico e o histórico.

Na sequência apresentaremos, em um capítulo único, os dados e a análise dos mesmos, de forma inter-relacionada. Posteriormente, procederemos à síntese.

2 - APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DO OBJETO DE ESTUDO

Neste capítulo apresentamos as tarefas proposta por Davydov e seus colaboradores para o ensino do sistema de numeração. O livro didático (ДАВЫДОВ et al, 2012) contém as tarefas de ensino. Para desenvolvermos e analisarmos tais tarefas fez-se necessário compreendermos o método de ensino davydoviano apresentado no capítulo cinco e parte do capítulo seis do livro de orientações (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Fundamentamos a análise nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural e estabelecemos um diálogo com as proposições para o ensino do sistema de numeração apresentadas por autores brasileiros em quatro livros didáticos do segundo ano do Ensino Fundamental (BONJORNO e BONJORNO, 2001; MENEGHELLO e PASSOS, 2008; PROJETO PITANGUÁ: MATEMÁTICA/ ORGANIZADORA EDITORA MODERNA, 2005; MENEGHELLO e PASSOS, 2005).

No capítulo cinco do livro de orientações ao professor para a utilização do livro didático (ДАВЫДОВ et al, 2012), Davydov e seus colaboradores (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009) apresentam um novo método de medição e construção de diferentes representações numéricas. A medição é realizada com base na comparação entre a grandeza a ser medida e uma unidade de medida. A partir da unidade de medida e da base numérica, é possível formar novas ordens de medida e sua respectiva representação numérica.

A representação numérica da grandeza, resultante do processo de medição, depende da unidade de medida utilizada e da base numérica considerada. Desse modo, o número é representado por um conjunto de algarismos, cujos valores variam conforme as diferentes bases. Inicialmente os diferentes números são compostos, respectivamente, por diferentes bases. E, os diferentes algarismos que compõem o número, primeiramente são apresentados no quadro valor de lugar e só depois se introduz o registro posicional fora do quadro, conforme apresentaremos na sequência.

2.1 ORIGEM DAS DIFERENTES BASES NUMÉRICAS

Tarefa 1: Na primeira tarefa, a proposição é de que na mesa do professor tenha um recipiente com água (volume C). E, no quadro e nos cadernos, uma linha reta (Ilustração 1). É preciso colocar o mesmo volume de água (**C**) em um recipiente de mesma forma que está em outro lugar e não podem ser aproximados (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

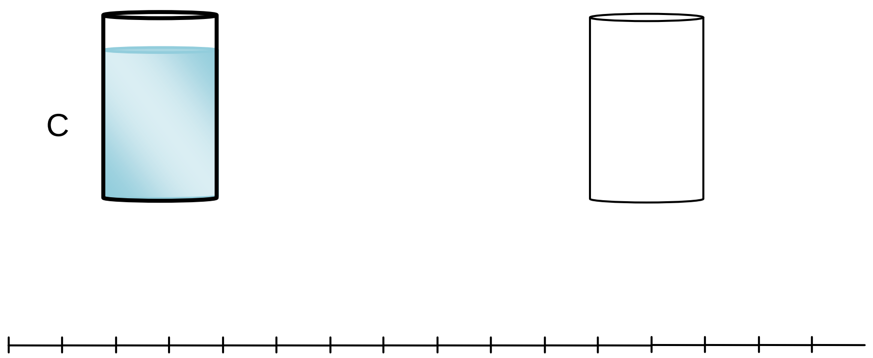


Ilustração 1: tarefa 1 - Volume **C** e linha reta
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

O professor orienta as reflexões para que as crianças concluam que é preciso medir o volume de líquido no recipiente e, para tanto, será necessário uma unidade de medida. E, logo propõe a unidade de medida **E** (Ilustração 2), com a seguinte condição de trabalho: **as crianças só poderão contar até quatro**. Como proceder? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

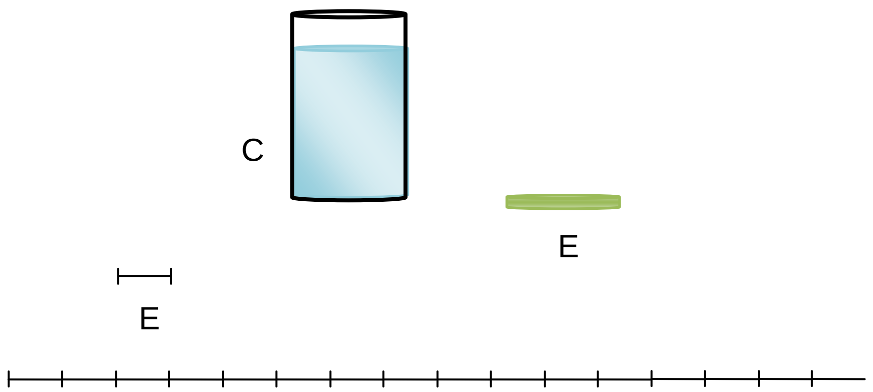


Ilustração 2: tarefa 1 - Unidade de medida **E**
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Dois estudantes conduzem o desenvolvimento da tarefa, sob orientação do professor. Um faz a medição e o outro representa no esquema, exposto no quadro.

Os demais estudantes representam o processo no esquema em seus respectivos cadernos. Assim que quatro medidas forem colocadas em um terceiro recipiente, o trabalho é interrompido (Ilustração 3). *Como prosseguir?* Afinal, não há mais algarismos para marcar as próximas unidades de medidas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

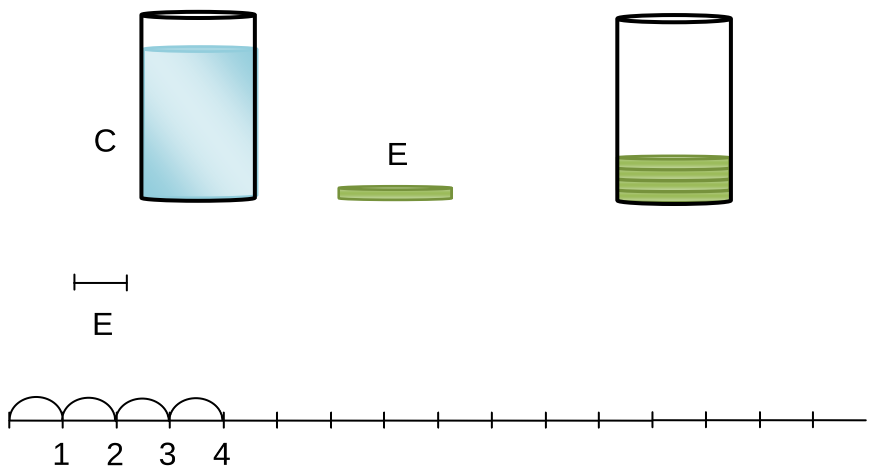


Ilustração 3: tarefa 1 - Quatro medidas **E**
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

E agora, como podemos medir o volume? Na continuidade (Ilustração 4), pode ocorrer que alguém sugira que se considere como unidade de medida a parte da água que foi retirada. Se não surgir tal proposição, continua-se o processo de retirar as unidades de medidas e reinicia-se a contagem, novamente a partir do *um* (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

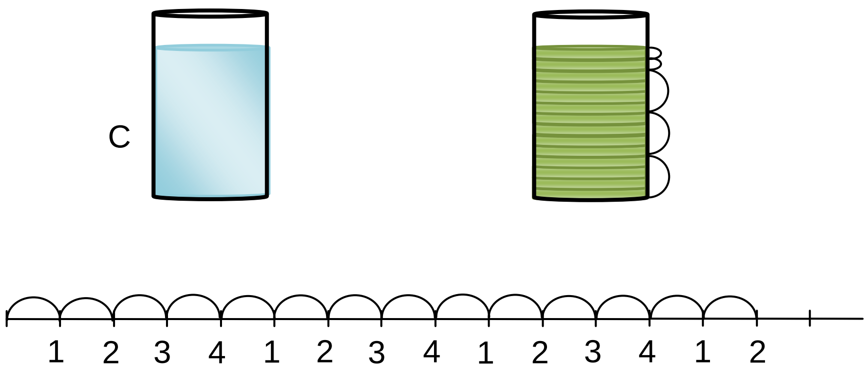


Ilustração 4: tarefa 1 - Contagem
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Será possível desenvolver esse processo mais rapidamente? Por meio do esquema (Ilustração 5), é possível observar que é necessário adicionar quatro medidas **E**, mais quatro medidas **E**, mais quatro medidas **E**, e no final mais duas medidas **E** (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

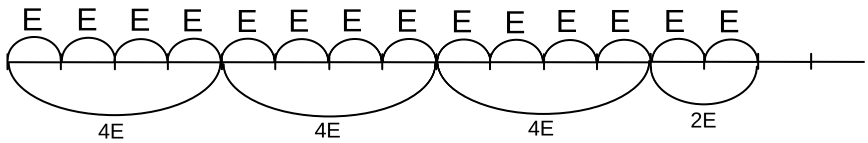


Ilustração 5: tarefa 1 - Agrupamento
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

A síntese a ser elaborada, com orientação do professor, é que não há necessidade de adicionar, uma a uma, as quatro unidades de medidas **E**. Ou seja, pode-se adicionar quatro medidas **E** (**4E**) em um novo recipiente e utilizá-lo como nova unidade de medida (unidade de medida de segunda ordem), representada nos arcos da ilustração 6 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

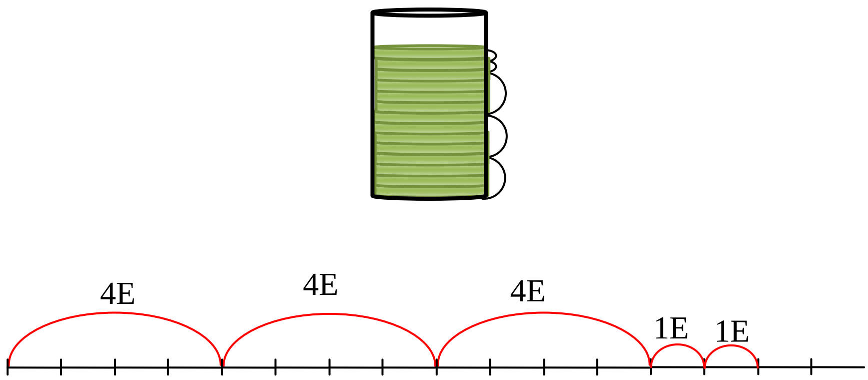
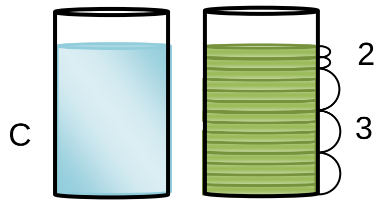


Ilustração 6: tarefa 1 - Medida 4E
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

A unidade de medida de segunda ordem foi obtida a partir da unidade medida de primeira ordem. Ou seja, no momento que não foi possível continuar a medição por meio da medida de primeira ordem, foi necessário criar a unidade de medida de segunda ordem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Desse modo, o processo de medição do volume **C**, requer a utilização de três unidades de medidas de segunda ordem (**4E**) e duas unidades de medidas de primeira ordem (**2E**).

Para o registro do processo de medição no quadro valor de lugar (Ilustração 7), faz-se necessário uma nova simbologia que represente a unidade de medida de segunda ordem (**4E**). Após as crianças apresentarem suas sugestões, o professor propõe a utilização da mesma letra (**E**) para as duas unidades de medida. Porém, para diferenciá-las, propõe o acréscimo dos numerais 1 e 2 na forma subscrita. O número 1 para representar a unidade de medida de primeira ordem (**E_1**) e o número 2 para a de segunda ordem (**E_2**), ou seja, $4E = E_2$ (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).



	E_2	E_1
C	3	2

Ilustração 7: tarefa 1 - Quadro valor de lugar
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Para registrar o resultado da medição no quadro valor de lugar, foi necessário dois numerais: dois (2) e três (3). O numeral dois, indica a quantidade de unidades de medida de primeira ordem e o numeral três indica a quantidade de unidades de medida de segunda ordem (Ilustração 7). Desse modo, o numeral não está relacionado diretamente à representação de quantidades discretas ou contínuas (ROSA, 2012), mas mediado pela unidade de medida de segunda ordem. Ou seja, o numeral três, na tarefa 1, não representa, diretamente, três unidades, mas três agrupamentos de quatro unidades.

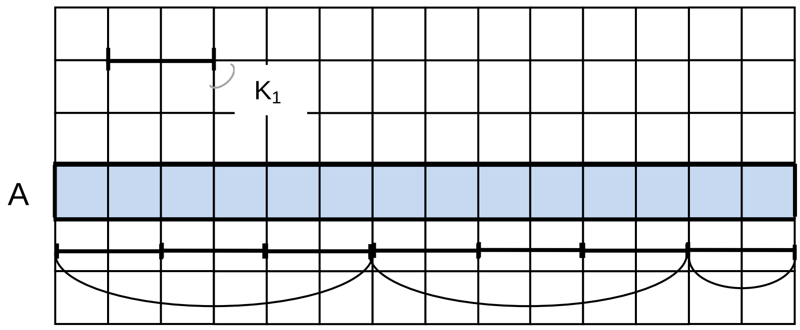
Em síntese (Ilustração 7), durante o processo de resolução da tarefa 1, foi necessário a construção da unidade de medida de segunda ordem (**E_2**) para medir o volume de água. Ou seja, nas proposições davydovianas, os conceitos produzidos historicamente pela humanidade não são apresentados em sua forma pronta, mas, são reproduzidos, a partir das necessidades apresentadas durante o processo de resolução da tarefa (ROSA, 2012). Como por exemplo, a introdução da unidade de medida de segunda ordem, a partir da necessidade imposta pela limitação de contagem até, apenas, o número quatro.

Historicamente, a origem das diferentes bases numéricas, segundo Ifrah (1997), ocorreu a partir da seguinte necessidade experimentada pela humanidade:

“como designar números elevados com o mínimo possível de símbolos?” (IFRAH, 1997, p. 48). Tal necessidade é reproduzida na tarefa 1, com a limitação de contagem até o número quatro, ou seja, nos limites de, apenas, quatro símbolos (1, 2, 3 e 4).

A solução para representar números elevados com o mínimo possível de símbolos foi, segundo Ifrah (1997, p. 48), “privilegiar um agrupamento particular” (de *dez em dez*, *doze em doze*...) “e organizar a sequência regular dos números segundo uma classificação hierarquizada fundada nessa base”. No caso da tarefa 1, o agrupamento considerado, foi de *quatro em quatro*. A representação numérica foi fundamentada nessa base. Ou seja, havia duas unidades de medida de primeira ordem, que não formaram grupos de quatro unidades e três unidades de medidas de segunda ordem, três agrupamentos com quatro unidades cada.

Tarefa 2: As crianças deverão analisar o processo e o resultado da medição do comprimento da largura do retângulo com medida A (Ilustração 8) realizado por Irina e identificar até quanto ela sabe contar (ДАВЫДОВ et al, 2012).

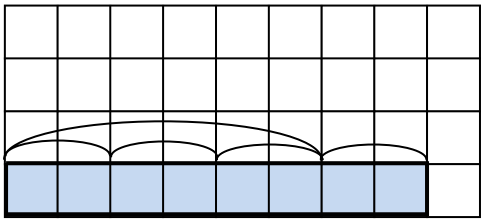


	K_2	K_1
A	2	1

Ilustração 8: tarefa 2 - Esquema e quadro valor de lugar
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

Até quanto Irina sabe contar? A partir do esquema apresentado na ilustração 8, é possível concluir que a unidade de medida K_1, unidade de primeira ordem, é formada por duas unidades de área (arco menor). E, a unidade de medida K_2, representada no esquema pelos arcos maiores, é constituída a partir do agrupamento de três unidades de primeira ordem. Cada unidade de medida de segunda ordem é composta por três unidades de medida de primeira ordem. Isso significa que Irina contava até três unidades de medida e iniciava a contagem novamente a partir do número um.

Tarefa 3: Permanece a base numérica (3) e a unidade de medida (duas unidades de área) consideradas na tarefa anterior. A tarefa consiste em registrar no quadro valor de lugar (Ilustração 9), a medida do comprimento da largura do retângulo **B** (ДАВЫДОВ et al, 2012).

B


	K_2	K_1
B	1	1

Ilustração 9: tarefa 3 - Esquema e quadro valor de lugar
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

A análise do registro no quadro valor de lugar (Ilustração 9), permite concluir que a medida do comprimento B, é composto por uma unidade de medida $k_{1,}$ (formada por duas unidades de medida de área) e uma unidade de medida k_2 (formada por três unidades de medida k_1).

Na tarefa 2, as informações apresentadas no esquema (Ilustração 8) possibilitaram a identificação da base numérica considerada e, posteriormente, o registro do resultado da medição no quadro valor de lugar. Na terceira tarefa, a base numérica já estava determinada previamente. A proposição incidia na análise da quantidade de unidades de medidas de primeira e de segunda ordem que representavam a medida do comprimento do retângulo e seu respectivo registro no quadro valor de lugar (Ilustração 9).

As tarefas anteriores explicitam a lógica das bases numérica quaternária e ternária que se estende para as demais bases. Pois, “cada unidade de ordem é contida tantas vezes na da ordem seguinte quantas são a unidade da base” e no caso particular do sistema ternário “cada unidade de uma ordem é contida três vezes na da ordem seguinte” (COSTA, 1866, p. 18).

Os esquemas que representam as medidas **A** e **B** (Ilustrações 8 e 9), evidenciam a lógica apresentada por Costa (1866). A unidade de medida de primeira ordem (**k_1**) é contida três vezes na unidade de medida de segunda ordem (**k_2**), logo, cada k_2 equivale a três $k_{1.}$

Por meio dos esquemas e dos registros apresentados nos quadros valor de lugar é possível determinar a igualdade ou desigualdade entre as medidas das grandezas. A medida do comprimento **A,** é composta por duas unidades de medidas de segunda ordem (cada uma composta por três unidades de medidas de primeira ordem) e uma unidade de medida de primeira ordem (formada por duas unidades de área). E, a medida do comprimento **B** é formada por uma unidade de medida de segunda ordem e uma de primeira. Ou seja, a medida do comprimento **A** é maior que a medida do comprimento **B** em uma unidade de medida de segunda ordem.

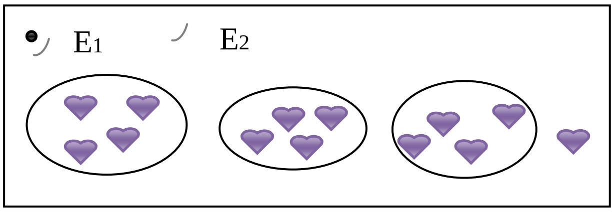
Tarefa 4: A primeira etapa é finalizada com a introdução da nomenclatura de mais alguns sistemas de numeração e suas respectivas bases: binário (base dois); ternário (base três); quartenário (base quatro); quinário (base cinco); setenário (base sete); octagenário (base oito) decimal (base dez), entre outros (ДАВЫДОВ et al, 2012).

Cada sistema de numeração possui uma denominação que varia de acordo com a composição dos agrupamentos, depende da base considerada (COSTA, 1866). Esta indica o limite de contagem para cada agrupamento. Por exemplo, se o limite de contagem for dois, o sistema será o binário, se for três, o ternário e assim sucessivamente.

Segundo Karlson (1961), o algarismo zero (0) "falharia como base de um sistema numérico, pois multiplicado por qualquer outro número dá sempre zero como resultado", e o algarismo um (1), também "falharia, pois seus degraus não conduzem para cima: um vez um não dá mais que um", portanto o algarismo "dois é o primeiro número que realmente possibilita o crescimento da série" (KARLSON, 1961, p. 27).

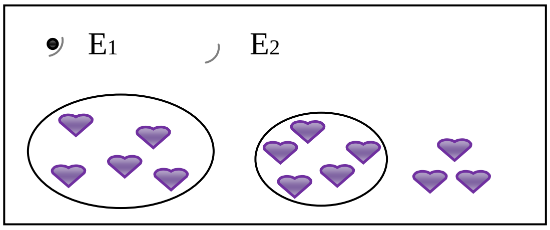
2.2 PRINCÍPIO DA BASE NUMÉRICA

Tarefa 5: O professor relata que três crianças (Tânia, Pedro e Nícolas) agruparam e registraram, de formas diferentes, a contagem referente a uma mesma quantidade de objetos (Ilustração 10). É possível determinar a base numérica considerada por cada criança durante a contagem? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).



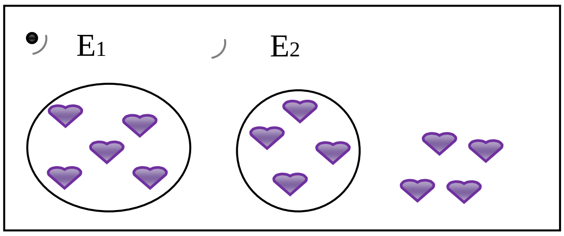
E_2	E_1
3	1

Tânia



E_2	E_1
2	3

Pedro



E_2	E_1
2	4

Nícolas

Ilustração 10: tarefa 5 - Diferentes bases
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

A análise dos diferentes registros no quadro valor de lugar (Ilustração 10) ocorre a partir do seguinte questionamento: por que os resultados do processo de contagem de uma mesma quantidade de objetos foram expressos de forma tão diferente no registro? Os três esquemas representam o processo de contagem realizado por cada criança (ilustração 10). Tânia, Pedro e Nícolas formaram grupos de objetos com diferentes quantidades. E, seus registros, no quadro valor de lugar, foram a partir dos agrupamentos de objetos, por isso, os diferentes resultados. Mas, qual foi à base numérica utilizada por cada criança?

Tânia formou três (3) grupos compostos por *quatro* unidades cada e sobrou um (1) coração sem ser agrupado. Por isso, seu registro no quadro valor de lugar, foi 3 e 1. Ou seja, uma unidade de medida de primeira ordem (nenhum agrupamento com quatro unidades) e três unidades de medida de segunda ordem (três agrupamentos com quatro unidades cada).

Pedro, por sua vez, dividiu os corações em dois (2) grupos com *cinco* unidades cada e sobraram três (3). Seu registro no quadro valor de lugar foi 2 e 3. Ou seja, três unidades de medida de primeira ordem e duas unidades de medida de segunda.

Nícolas dividiu os corações em: um agrupamento com cinco unidades, outro com quatro e sobraram quatro unidades sem serem agrupadas. Seu registro, no quadro valor de lugar, foi de dois (2) agrupamentos (formados por cinco e quatro unidades) e sobraram quatro (4) unidades sem serem agrupadas.

Retomamos o questionamento anterior: qual a base numérica utilizada por Tânia, Pedro e Nícolas na contagem dos corações apresentados na ilustração 10?

Para Tânia, cada agrupamento de segunda ordem é composto por quatro corações, portanto, ela considerou a base quatro. Já Pedro, dividiu os corações em grupos de cinco em cinco, por isso, a base é cinco. E Nícolas, que base considerou? Lembramos que ele fez um agrupamento com cinco corações e outro com quatro, ou seja, não adotou uma base numérica, assim como fizeram Tânia e Pedro. Esses adotaram, respectivamente, as bases: quaternária e quinária.

Já analisamos cinco tarefas davydovianas para a introdução do conceito do sistema de numeração e, até o presente momento, não há referência alguma a história da Matemática. Desse modo, cabe questionar: por que Davydov não mencionou aspectos relacionados à utilização das diversas bases numéricas pelos diferentes povos ao longo do desenvolvimento histórico deste conceito? Davydov desconsidera a história dos conceitos no processo de ensino? O que significa considerar a história de um determinado conceito ou sistema conceitual no ensino? Trata-se de recontá-la em forma de curiosidades históricas? Ou de reproduzi-la no ensino em todos os seus aspectos referentes às necessidades particulares de cada povo e suas respectivas dificuldades?

Newton Duarte, em sua dissertação de mestrado responde algumas das questões apresentadas anteriormente. Para Duarte (1987, p. 13), não se reproduz a história da matemática na íntegra com os estudantes “mas o processo de evolução desta”. Ou seja, trata-se apenas das “<u>etapas essenciais</u> da evolução” do conteúdo (idem). Mas, o que nos possibilita determinar quais são as etapas essenciais e as não essenciais? De acordo com Duarte (1987), Rosental (1960) e Kopnin (1978) tal determinação é realizada por meio da lógica do conteúdo do conceito.

Ao abordar as base numéricas na tarefa em análise (tarefa 5), Davydov e seus colaboradores adotaram a seguinte lógica: a unidade de medida de segunda ordem (agrupamentos compostos por quatro e cinco unidades) foi formada pela quantidade de unidades de medidas da base numérica considerada (quaternária e quinária). Ou seja, a unidade de medida de segunda ordem possibilitou a identificação da base numérica utilizada. Esta só pode conter a quantidade de unidades de medidas indicadas pela base. Desse modo, se a base é quaternária, como no caso de Tânia, cada unidade de medida de segunda ordem é formada por quatro unidades. O mesmo ocorre com a base quinária, em que cada unidade de medida de segunda ordem é composta por cinco unidades.

Nas proposições davydovianas a lógica do sistema de numeração é considerada. O processo de resolução da tarefa reflete o movimento histórico, como diz Duarte (1987, p. 13) “o lógico reflete as etapas essenciais do processo histórico”. Vale salientar que o sistema de numeração quinário, adotado por Pedro, na tarefa cinco, foi, segundo Eves (2004), o primeiro utilizado historicamente pela humanidade.

Mas, o que significa dizer que nas proposições davydovianas a lógica do sistema de numeração é considerada? Qual lógica é considerada por Davydov e seus colaboradores? Subjacente ao sistema de numeração existe apenas uma lógica? Existe mais de uma lógica?

É possível responder positivamente à última questão apresentada. Porém, interessa-nos, no presente trabalho, falar da lógica formal e da lógica dialética. Uma vez que os livros didáticos brasileiros são fundamentados na lógica formal e, de acordo com Davydov, suas proposições de ensino são fundamentadas na lógica dialética.

A diferença entre a lógica formal e a lógica dialética segundo Kopnin (1978), é que para a lógica dialética não basta apenas “enumerar”, sem relações, “as formas de pensamento”, mas sim estabelecer “entre elas uma relação de subordinação e não de coordenação, desenvolve formas superiores a partir de formas inferiores” (Lênin, apud Kopnin, 1978, p. 84). Enquanto que a lógica formal prima pela “própria forma lingüística”, a lógica dialética estuda “o conteúdo mental expresso na forma lingüística” (Idem, p. 85).

Oliveira (2001) considera que a lógica formal não dá conta de “representar, no pensamento, o movimento da realidade”. Pois, é uma lógica “criada pelo homem para identificar, caracterizar e classificar os elementos em suas especificidades”. Para “captar o movimento da realidade” é necessário utilizar a lógica dialética, pois, “as leis da lógica dialética são exatamente as leis que dirigem o movimento objetivo da realidade transformadas em leis do pensamento e que se nos apresentam através de conceitos de <u>máxima generalidade</u>” (OLIVEIRA, 2001, p. 14. Grifo nosso).

O princípio da lógica dialética, afirma Kopnin (1978), é a "unidade entre o abstrato e o concreto no pensamento teórico-científico". A lógica dialética "analisa a estrutura das formas de pensamento, dando ênfase principal à dialética de inter-relação entre o singular, particular e universal" (KOPNIN, 1978, p. 85).

Tal inter-relação é considerada por Davydov e seus colaboradores na continuidade do desenvolvimento da tarefa cinco. A proposição é que as crianças registrem no quadro valor de lugar (Ilustração 11), o resultado do trabalho de Tânia e Pedro (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Ou seja, trata-se de duas singularidades numéricas oriundas de dois sistemas de numeração particulares, o quartenário e o quinário.

II	I	
		( )
		( )

Ilustração 11: tarefa 5 - Quadro valor de lugar
Fonte: elaboração nossa com base nas proposições davydovianas

Na situação inicial, as ordens eram apresentadas por letras com números em subscrito (E_1, E_2). Agora, são substituídas por algarismos romanos (I, II), primeira ordem e segunda ordem, respectivamente (Ilustração 11). Ao lado de cada registro do quadro valor de lugar, entre parênteses, registra-se a base numérica considerada, conforme ilustração 12 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

II	I	
3	1	(4)
2	3	(5)

Ilustração 12: tarefa 5 - Registro em diferentes bases
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012, p. 54)

Uma mesma tarefa traz à tona o movimento lógico histórico do princípio de base. Historicamente,

> convencionou-se uma “escala” a partir da qual é possível repartir os números e seus diversos símbolos segundo estágios sucessivos, aos quais se pode dar os respectivos nomes: *unidades de primeira ordem, unidades de segunda ordem, unidades de terceira ordem*, e assim sucessivamente. E é dessa maneira que se chegou a uma simbolização estruturada dos números, evitando-se esforços de memória ou de representação considerável. É o que chama o *princípio da base*. Sua descoberta marcou o nascimento dos *sistemas de numeração* – sistemas cuja “base” nada mais é do que o número de unidades que é necessário agrupar no interior de uma ordem dada para formar uma unidade de ordem imediatamente superior (IFRAH, 1997, p. 48).

O sistema de numeração, em Davydov, é introduzido a partir do elo que inter-relaciona a lógica das diferentes bases numéricas. O lógico reflete o processo histórico, porém, não ocorre de forma imediata e nem direta, pois “o lógico orienta o estudo do histórico, por sua vez, o histórico vai orientando a reformulação, o aprofundamento do lógico, numa ação recíproca” (DUARTE, 1987, p. 13). Ou seja, nas proposições davydovianas a lógica do conceito do sistema de numeração reflete a sua história. Porém, retorna-se na história para uma maior compreensão dessa lógica.

Para finalizar a análise da tarefa cinco, vale lembrar que não foi possível determinar a base numérica utilizada por Nícolas, conforme solicitava o enunciado. Nas proposições davydovianas, situações como essas são propostas para verificar se a criança se apropriou dos procedimentos gerais de resolução de uma determinada etapa do processo de cognição. Assim, o professor tem o *controle*, sobre o processo de apropriação ou não, dos conceitos por parte dos estudantes. Essa é uma das seis ações propostas por Davídov (1988) para o ensino de cada conceito, a ação de controle.

Desse modo, se durante o desenvolvimento da tarefa cinco, um estudante responder que Nícolas utilizou a base numérica quatro ou cinco, significa que este não se apropriou da lógica inicial subjacente ao conceito de base. Nícolas formou agrupamentos de segunda ordem com quatro e cinco unidades, logo, não é possível estabelecer uma base única. Assim, caberia ao professor retomar o assunto em questão.

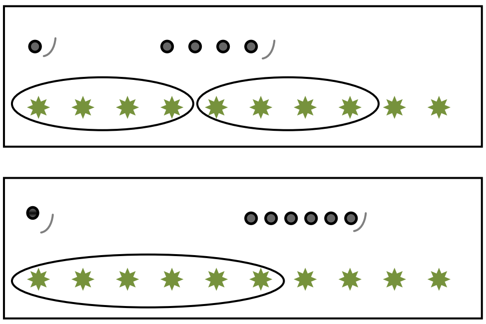
Historicamente houve a necessidade de formar agrupamentos, para realizar o processo de contagem. Esses agrupamentos não poderiam ser formados de qualquer modo, pois, existem regularidades que devem ser consideradas. No processo de contagem realizado por Nícolas, fica evidente a necessidade dessa regularidade, ou seja, os agrupamentos devem ser formados sempre pela mesma quantidade determinada pela base numérica considerada.

Tarefa 6: As crianças realizarão a contagem de uma determinada quantidade de objetos a partir de bases numéricas diferentes que estão indicadas ao lado do quadro valor de lugar (Ilustração 13). A unidade de medida de primeira ordem é formada por uma unidade discreta. Na primeira linha do quadro a base é quatro e na segunda é seis. Portanto, os estudantes, sob orientação do professor, irão formar grupos com quadro e seis unidades de medida. (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).

II	I	
		(4)
		(6)

Ilustração 13: tarefa 6 - Contagem
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

Para resolver a tarefa, faz-se necessário a construção da unidade de medida de segunda ordem, para cada base numérica: quatro pontos para base numérica quatro e seis pontos para base seis (Ilustração 14). Posteriormente, realizam-se os agrupamentos, a consequente contagem e o registro no resultado no quadro valor de lugar.



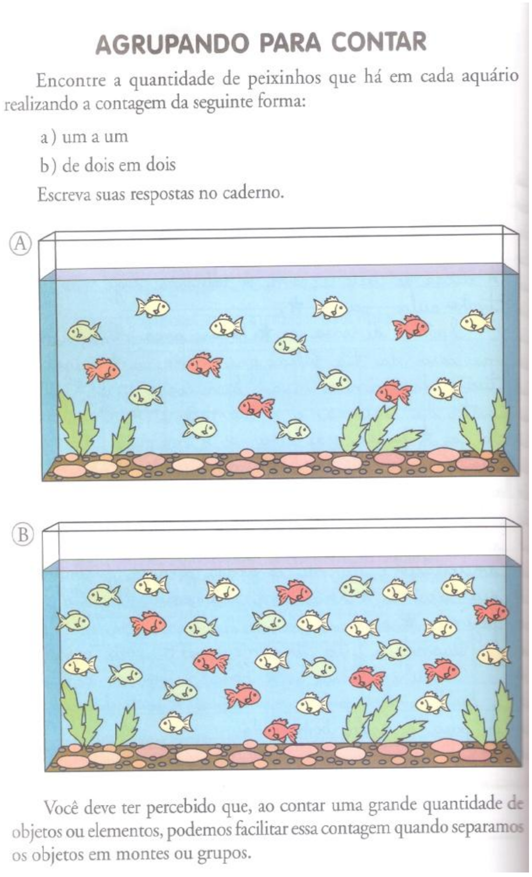
II	I	
2	2	(4)
1	4	(6)

Ilustração 14: tarefa 6 - Registro contagem
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Quando os objetos foram agrupados na base numérica quatro, resultaram dois grupos com quatro unidades (duas unidades de medidas de segunda ordem) e sobraram outras duas unidades (duas unidades de medida de primeira ordem). Quando a referencia foi à base seis, resultou em um agrupamento com seis unidades (uma unidade de medida de segunda ordem) e sobraram quatro unidades (quatro unidades de medida de primeira ordem).

A partir de tal constatação (Ilustração 14), o professor faz os seguintes questionamentos: por que os registros no quadro valor de lugar foram diferentes se representam a mesma quantidade de objetos? Qual deles é o correto? Conclui-se que os dois registros estão corretos, são diferentes porque a contagem foi realizada a partir de bases numéricas diferentes (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА).

Os livros didáticos brasileiros apresentam os agrupamentos como uma possibilidade de facilitar a contagem. Como por exemplo, as situações apresentadas nas ilustrações 16 e 17. Na primeira, as crianças devem realizar a contagem dos objetos de duas formas: primeiro os objetos são contados de *um* em *um* (1, 2, 3, 4, 5...), e posteriormente, a contagem é realizada novamente, porém, de *dois* em *dois* (2, 4, 6, 8...). Embora os autores sugiram agrupamentos distintos, limita-se a apenas uma base numérica, a decimal.



AGRUPANDO PARA CONTAR

Encontre a quantidade de peixinhos que há em cada aquário realizando a contagem da seguinte forma:

a) um a um

b) de dois em dois

Escreva suas respostas no caderno.

Ⓐ

Ⓑ

Você deve ter percebido que, ao contar uma grande quantidade de objetos ou elementos, podemos facilitar essa contagem quando separamos os objetos em montes ou grupos.

Ilustração 15: tarefa 6 - Agrupamentos menores
Fonte: LOYOLA, ISHIKAWA, SASSÁ apud MENEGHELLO, PASSOS, et al (2005, p. 16 – segundo ano)

Na página seguinte, do mesmo livro, (Ilustração, 17) os diferentes objetos já são apresentados em agrupamentos definidos de *três* em *três*, *cinco* em *cinco* e *dez* em *dez*. Cabe aos estudantes apenas somarem os agrupamentos para determinar a quantidade dos objetos.

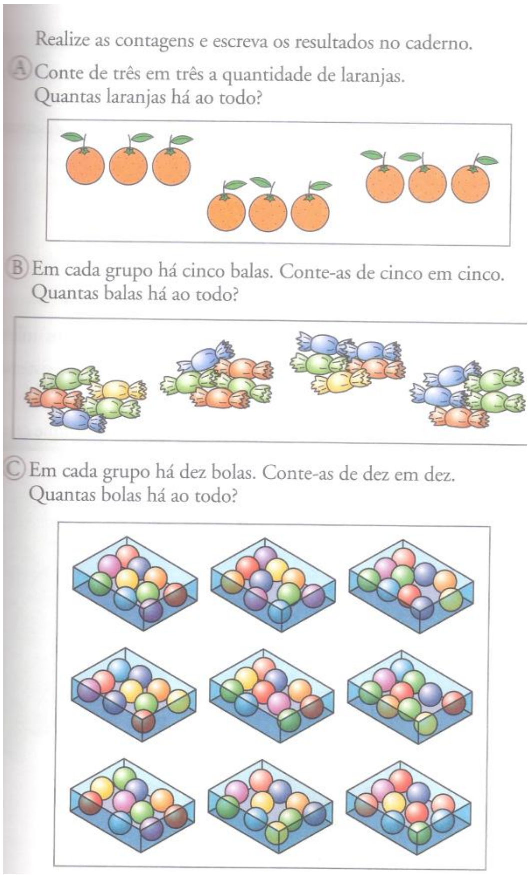


Ilustração 16: tarefa 6 - Agrupamentos maiores
Fonte: LOYOLA, ISHIKAWA, SASSÁ apud MENEGHELLO, PASSOS et al, (2005, p. 16 – segundo ano)

As proposições apresentadas nas ilustrações 15 e 16 visam à possibilidade de contagem para além da relação biunívoca (*um* a *um*). Porém, conforme já anunciamos, a base numérica considerada é apenas a decimal em todos os livros consultados.

De acordo com Davídov (1987), o ponto de partida no ensino tradicional são os conceitos empíricos, nos limites de suas particularidades. Nas proposições davydovianas, por outro lado, o foco é para os conceitos científicos. O sistema de tarefas contempla as diferentes bases. Desse modo, o sistema numérico decimal em Davydov, é uma particularidade do sistema de numeração que para ser atingida, faz-se necessário desenvolver toda a lógica do sistema de numeração e não apenas alguns de seus fragmentos.

2.3 NOVO MÉDOTO MEDIÇÃO

<u>Tarefa 7:</u> Os estudantes deverão medir o volume que está no recipiente (Ilustração 17). Este trabalho também deverá ser representado no esquema com a malha. Para tanto, será necessário determinar *uma unidade de medida* **k** (unidade de medida de primeira ordem), ou seja, uma unidade de medida para auxiliar no processo de medição do volume. **K** será representada no esquema por *uma* unidade da malha. O sistema numérico adotado deverá ser o ternário. Por fim, o resultado do processo deverá ser registrado no quadro valor de lugar (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

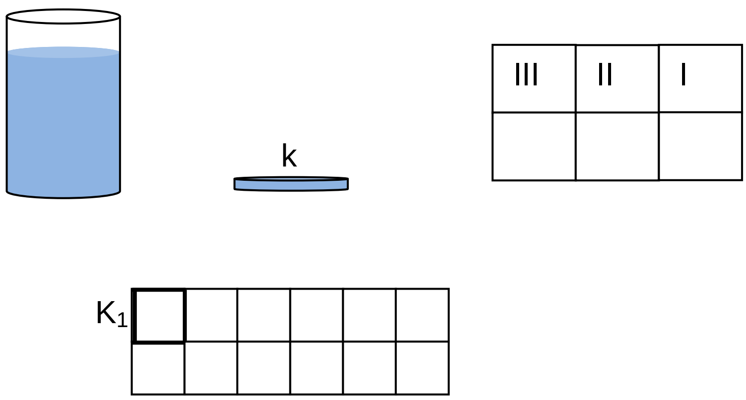


Ilustração 17: tarefa 7 - Volume a ser medido
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

No processo de medição foram retiradas *três* unidades de medidas do volume inicial de água (Ilustração 18). Formou-se a unidade de medida de segunda ordem **k_2**, na base três. Ou seja, a unidade de medida de segunda ordem é composta por *três* unidades de medida de primeira ordem **k_1.** No esquema a unidade de medida de segunda ordem é representada por *três* unidades da malha (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

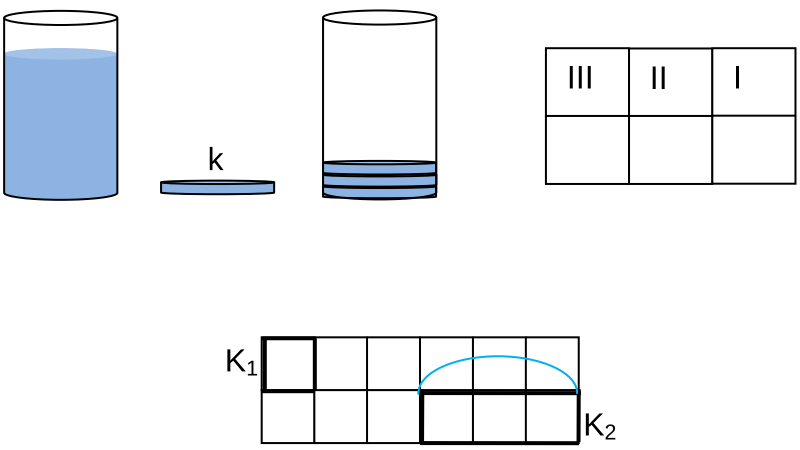


Ilustração 18: tarefa 7 - Unidade de medida de segunda ordem
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Os estudantes, porém, deverão continuar com a medição da água. Neste processo irão formar, conforme a ilustração 19, mais *quatro* unidades de medida de segunda ordem (composta por três unidades cada) e *duas* unidades de medida de primeira ordem, pois não formou um novo grupo com três unidades (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

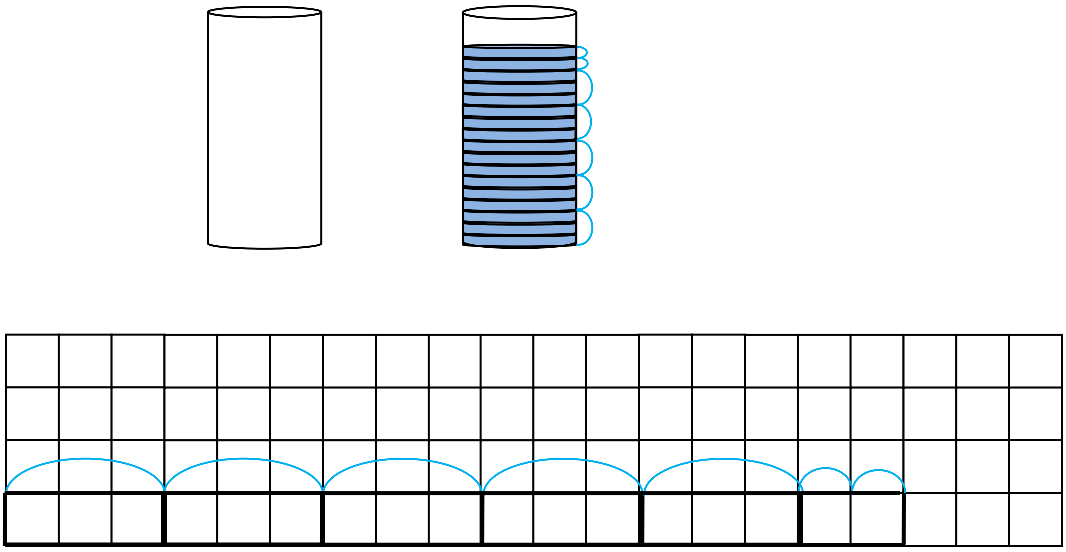


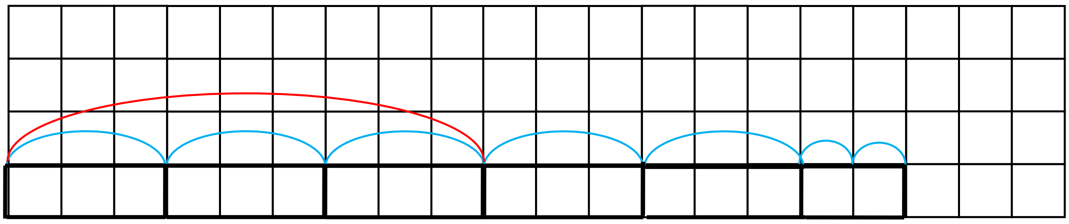
Ilustração 19: tarefa 7 - Esquema do processo de medição
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

O resultado da medição, conforme propõe a tarefa, deverá ser registrado no quadro valor de lugar (Ilustração 20). Foram duas unidades de medidas de primeira ordem e cinco unidades de medidas de segunda ordem: (5 2). Porém, se o sistema numérico utilizado é o ternário, como registrar *cinco* unidades de medidas de segunda ordem? Qual a forma correta de registrar? Ou o processo de medição não foi realizado corretamente? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

II	I
5	2

Ilustração 20: tarefa 7 - Registro no quadro valor de lugar
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Os estudantes, sob a orientação do professor, deverão concluir que é necessário formar uma nova ordem de medida (Ilustração 21). Ou seja, a partir de *três* unidades de medidas de segunda ordem, é possível formar uma nova unidade de medida, a de terceira ordem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).



III	II	I
1	2	2

Ilustração 21: tarefa 7 - Formação e registro da terceira ordem
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Conforme ilustrado anteriormente (21), registra-se no quadro valor de lugar a unidade de medida de terceira ordem (III) e a quantidade de unidades de medidas das respectivas ordens (1 2 2). Na primeira ordem, registra-se o algarismo *dois* (sobraram duas unidade de medidas que não formaram grupos com três unidades, ou seja, duas unidades de medidas de primeira ordem), na segunda ordem registra-se também o algarismo *dois* (formaram-se duas unidade de medidas de segunda ordem, cada uma composta por três unidades de medidas de primeira ordem) e na terceira ordem registra-se o algarismo *um* (formou-se uma unidade de medida de terceira ordem, composta por três unidades de medidas de segunda ordem) (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

O professor orienta os estudantes a analisarem o esquema (Ilustração 21) e, por meio deste, concluirem que é possível realizar o processo de medição de outra forma. A análise tanto do processo de medição da água, quando do registro na malha permite concluir que possível primeiro formar as unidades de medidas de segunda e terceira ordem para depois medir, conforme apresentaremos na ilustração 22.

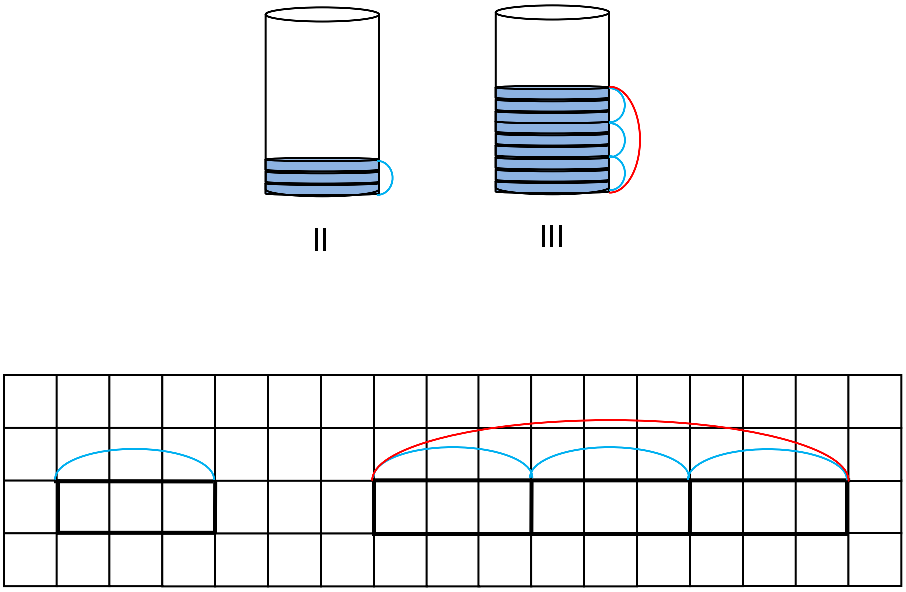


Ilustração 22: tarefa 7 - Construção das unidades de medidas
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

A unidade de medida de segunda ordem (Ilustração 22) é formada por *três* unidades de medidas de primeira ordem (**k**), pois, a base é *três*. A partir desta, forma-se a de terceira ordem, composta por *três* unidades de medida de segunda ordem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

O processo de medição será iniciado novamente (Ilustração 23), porém agora, a partir da unidade de medida maior (a de terceira ordem). A conclusão será de que é mais viável medir o volume de água inicialmente com a medida maior e só utilizar as unidades de medidas menores quando não for mais possível medir com a maior (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

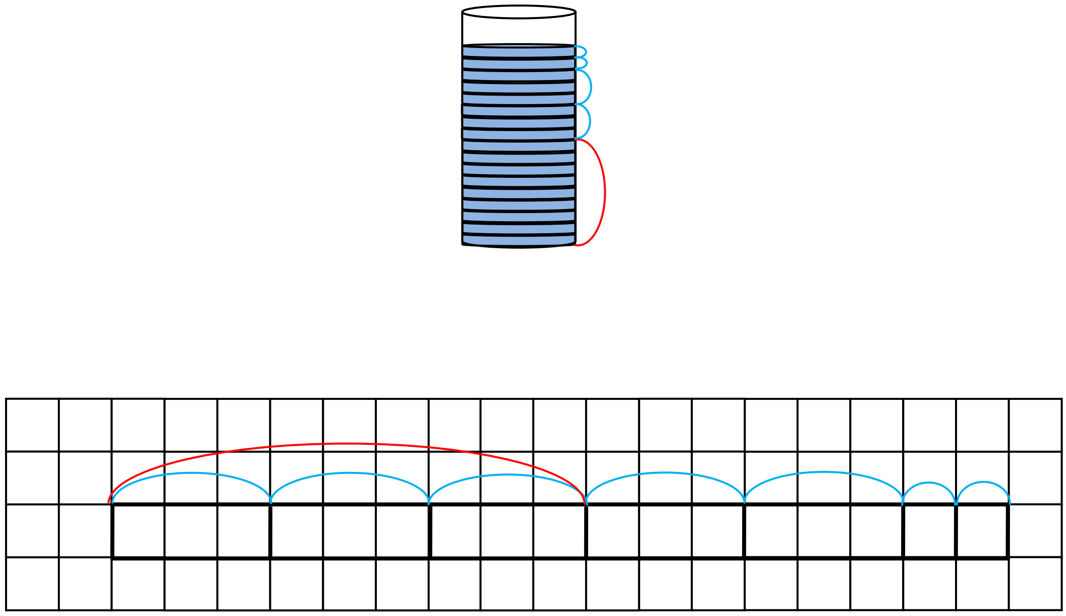


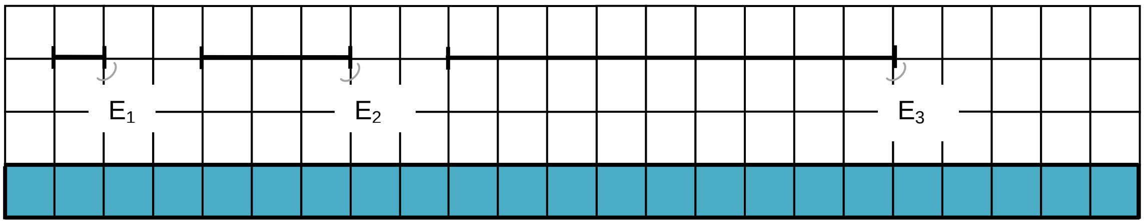
Ilustração 23: tarefa 7 - Medição unidade de medida maior
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

No novo processo de medição (Ilustração 23), utilizou-se também *uma* vez a unidade de medida de terceira ordem, *duas* vezes a unidade de medida de segunda ordem e *duas* vezes a unidade de medida de primeira ordem. Ou seja, o resultado é o mesmo. A diferença consiste no método de medição mediado pelo conhecimento já sistematizado (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Em síntese, na primeira fase do desenvolvimento da tarefa em análise, as unidades de medidas das diferentes ordens surgem durante o processo de medição, por meio de ações objetais. Na segunda fase, foram construídas as unidades de medidas das diferentes ordens e representadas no plano mental para posteriormente mediarem um novo processo de medição no plano objetal.

Tal movimento ocorre porque, segundo Davydov (1982), o desenvolvimento do pensamento ocorre a partir da sensibilidade humana. Esta é o elo entre as ações objetais e as representações mentais. Na especificidade da tarefa 7, podemos concluir que a sensibilidade humana permite a conexão entre a formação das diferentes ordens de medida, por meio da ação objetal, de medição do volume de líquido, que posteriormente é elevada, teoricamente, ao plano mental. Ou seja, é possível construir as diferentes ordens de medida, sem, necessariamente, realizar o processo de medição, apenas no plano teórico abstrato. Este, por sua vez, agiliza a realização da ação objetal.

<u>Tarefa 8:</u> Os estudantes deverão analisar (Ilustração 24) e identificar em qual base numérica as unidades de medidas de primeira, segunda e terceira ordem foram construídas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).



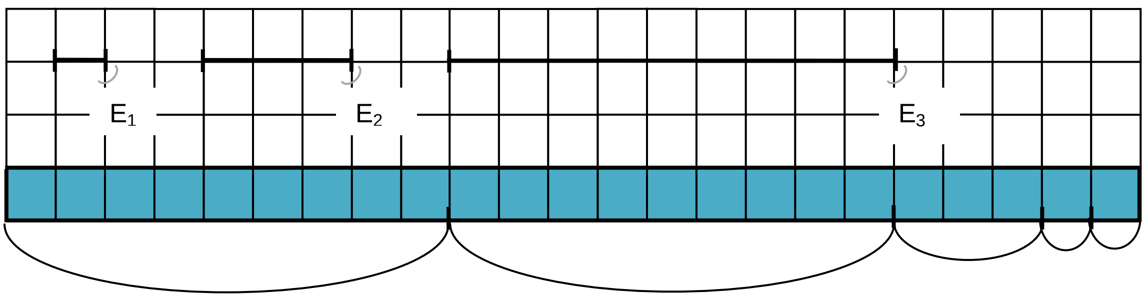
II	II	I

( )

Ilustração 24: tarefa 8 - Identificar a base numérica
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

Conforme a ilustração 24, unidade de medida de segunda ordem foi construída a partir da unidade de medida de primeira ordem. Esta é *três* vezes a unidade de medida de primeira ordem. A unidade de medida de terceira ordem é *três* vezes a unidade de medida de segunda ordem, portanto a base utilizada é *três*.

Durante o desenvolvimento da tarefa o professor questiona: por qual unidade de medida deve-se iniciar o processo de medição? A conclusão será que, para iniciar o processo de medição da área destacada em azul (Ilustração 25), deve-se iniciar pela unidade de medida maior, a de terceira ordem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).



III	II	I
2	1	2

(3)

Ilustração 25: tarefa 8 - Registro no quadro valor de lugar
Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

No processo de medição (Ilustração 25), foram utilizadas *duas* unidades de medidas de terceira ordem, *uma* unidade de medida de segunda ordem e *duas* de primeira ordem. O resultado foi registrado no quadro valor de lugar e ao lado, entre parênteses, a base numérica utilizada: *três* (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Para reproduzir o processo de construção de diferentes ordens em uma determinada base numérica é necessário, revelar e reproduzir as propriedades do sistema de numeração, por meio de suas mútuas relações e conexões. Ou seja, genericamente, a unidade de medida de segunda ordem, é *n* vezes a unidade de medida de primeira ordem e a unidade de medida de terceira ordem é *n* vezes a de segunda ordem. Portanto a base considerada é *n*.

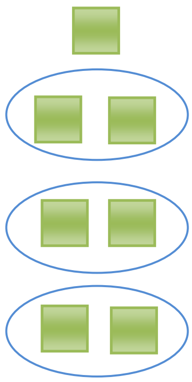
<u>Tarefa 9:</u> A proposição é que as crianças procedam a contagem da quantidade de quadrados a partir do sistema numérico binário (Ilustração 26) e escrevam o resultado no quadro valor de lugar (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).

III	II	I

(2)

Ilustração 26: tarefa 9 - Objetos para contagem e quadro valor de lugar
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

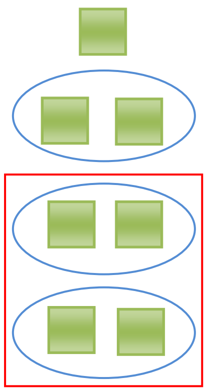
Para a realização da contagem dos objetos, dados discretamente, faz-se necessário a indicação da unidade de medida a ser considerada: *um quadrado* (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Como a unidade de medida é *um quadrado* e a base numérica é *binária*, serão formados agrupamentos compostos por duas unidades de medidas cada (Ilustração 27).



III	II	I	
	3	1	(2)

Ilustração 27: tarefa 9 - Agrupamentos em pares e o respectivo registro
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

No processo de contagem, ilustrado anteriormente, se formaram *três* agrupamentos compostos por duas unidades de medida cada (dois quadrados) e sobrou *uma* unidade sem ser agrupada de dois em dois (um quadrado). O sistema numérico considerado, binário, permite apenas agrupamentos de *dois* em *dois.* No entanto, formaram-se *três* agrupamentos de segunda ordem e o resultado foi registrado no quadro valor de lugar (Ilustração 27). Se o sistema binário permite contagem somente até dois, como proceder? Os estudantes, sob a orientação do professor, devem concluir que é preciso formar uma nova unidade de medida (Ilustração 28), a de *terceira* ordem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).



III	II	I	
1	1	1	(2)

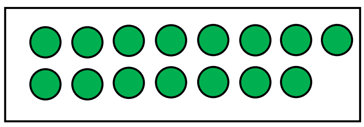
Ilustração 28: tarefa 9 - Unidade de medida de terceira ordem
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Duas unidades de medidas de segunda ordem (dois agrupamentos compostos por pares de quadrados, ou seja, quatro quadrados) formaram uma unidade de medida de terceira ordem. O resultado do processo de contagem na base binária foi registrado no quadro valor de lugar: *uma* unidade de medida de primeira ordem (um quadrado), *uma* unidade de medida de segunda ordem (um agrupamento com dois quadrados) e *uma* unidade de medida de terceira ordem (um agrupamento com quatro quadrados), ou seja, o número 111 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Segundo Ifrah (1997), com a descoberta da base surgiram os sistemas de numeração, esta, “nada mais é do que o número de unidades que é necessário agrupar no interior de uma ordem dada para formar uma unidade de ordem imediatamente superior” (IFRAH, 1997, p. 48). Por exemplo, no sistema de numeração binário, cada ordem superior é duas vezes a unidades de medida da ordem inferior. Ou seja, a unidade de medida de terceira ordem é duas vezes a unidade de medida de segunda ordem, que por sua vez é duas vezes a unidade de medida de primeira ordem.

2.4 CONSTRUÇÃO DAS VÁRIAS ORDENS DE MEDIDAS

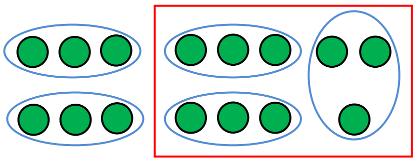
<u>Tarefa 10:</u> A contagem dos objetos (Ilustração 29) será realizada em duas bases numéricas diferentes, a ternária e a binária. A unidade de medida de primeira ordem é *um círculo*, ou seja, uma unidade discreta (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).



IV	III	II	I	
				(3)
				(2)

Ilustração 29: tarefa 10 - Objetos para contagem e quadro valor de lugar
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

Como proceder? No sistema numérico binário será agrupado de quantas em quantas unidades? E no ternário? Após algumas reflexões procede-se a contagem (Ilustração 30).



IV	III	II	I	
	1	2		(3)
1	1	1	1	(2)

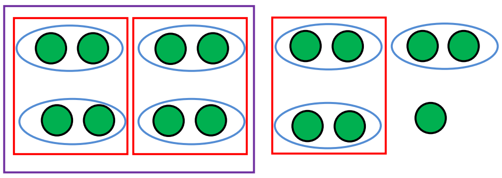


Ilustração 30: tarefa 10 - Unidade de medida de quarta ordem
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

A partir da contagem realizada no sistema ternário, formou-se *um* agrupamento de terceira ordem, *dois* de segunda ordem e *nenhum* agrupamento de primeira ordem (Ilustração 30). No sistema binário resultou *um* agrupamento de primeira ordem, *um* agrupamento de segunda, *um* agrupamento de terceira e, uma nova ordem até então desconhecida, ou seja, *um* agrupamento de quarta ordem.

Por que a contagem realizada a partir de dois sistemas numéricos diferentes resultou em ordens numéricas diferentes? A principal conclusão dessa tarefa será que, o número de ordens depende da quantidade a ser contada e da base numérica considerada (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Os autores dos livros didáticos brasileiros iniciam o ensino do sistema de numeração, pela base numérica decimal. A unidade de medida de primeira ordem chama-se *unidade* e a de segunda ordem, *dezena* (Ilustração 31).

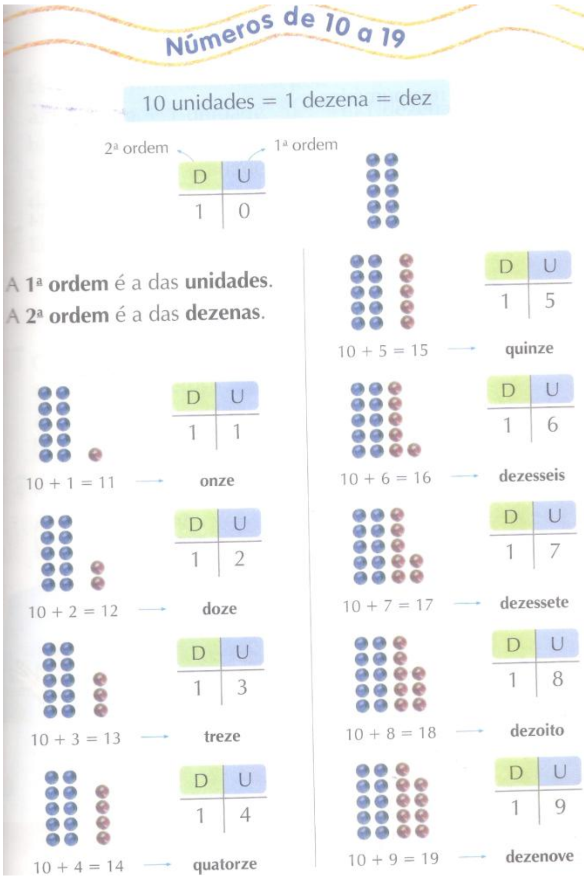


Ilustração 31: tarefa 10 - Os números de 10 a 19
Fonte: BONJORNO e BONJORNO (2001, p. 41 – segundo ano)

No número dez (a base) o algarismo *zero* (0), indica a primeira ordem, (nesse sistema de numeração chama-se unidades) e o algarismo *um*, indica a segunda ordem (chama-se dezenas), ou seja, dez unidades formam uma dezena.

A composição a partir do número onze (11) até dezenove (19), consiste no acréscimo de uma unidade. Por exemplo, para compor o número onze (11), acrescenta-se uma unidade na base, 10 + 1=11, registra-se no quadro valor *uma* dezena e *uma* unidade. O mesmo ocorre para os demais números, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, ou seja, são apresentadas todas as possíveis unidades de primeira ordem quando a unidade de medida de segunda for *um*.

A terceira e quarta ordem serão apresentadas aos estudantes, mais tarde, por meio do estudo das centenas (terceira ordem) e milhares (quarta ordem).

No contexto das proposições brasileiras, os conceitos são apresentados no processo de ensino de forma fragmentada. Ou seja, não são reveladas as inter-relações que compõem o sistema conceitual no qual cada conceito se insere.

Por outro lado, nas proposições davydovianas, os estudantes não recebem os conhecimentos prontos e acabados, mas os reproduzem durante a realização das tarefas. Os estudantes participam ativamente no processo de reconstrução dos conceitos científicos e sua consequente apropriação. Esta, segundo Davídov (1987), garante que o indivíduo se oriente pelos conceitos científicos durante a solução das diversas situações escolares e extraescolares que delas se fizerem necessário.

Na especificidade do nosso objeto de estudo, os estudantes participam da reconstrução do conceito do sistema de numeração. Durante esse processo, se apropriam das significações necessárias para se orientarem em todas as bases do sistema de numeração e não apenas na base decimal.

Tarefa 11: Nesta tarefa, os estudantes deverão construir as unidades de medidas de segunda, terceira e quarta ordem, no sistema numérico ternário (Ilustração 32). A unidade de medida está indicada na malha: *uma* unidade de área. Após construir as unidades de medidas de diferentes ordens, realiza-se a medição da área e registra-se o resultado fora do quadro valor de lugar (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).

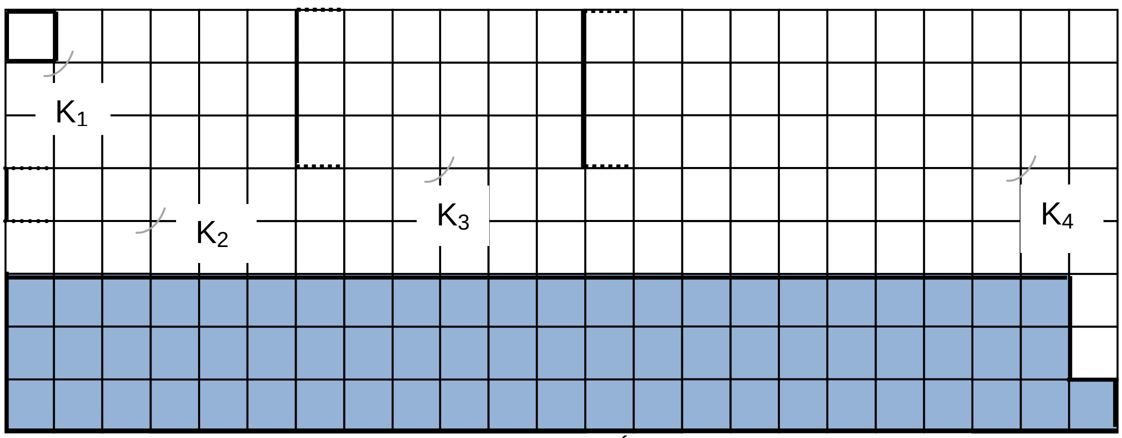
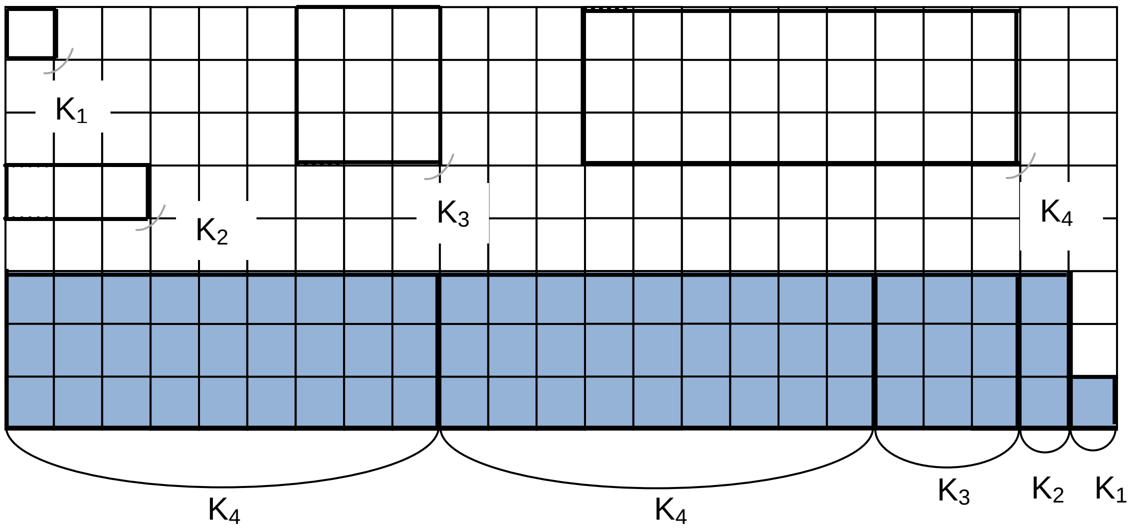


Ilustração 32: tarefa 11 - Área para medir
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012, p. 59)

Mas, como construir as unidades de medidas das diferentes ordens? Como o sistema numérico considerado é o ternário (Ilustração 33), a unidade de medida de segunda ordem será *três* vezes a unidade de medida de primeira ordem. E a de terceira ordem? A unidade de medida de terceira ordem será *três* vezes a unidade de medida de segunda ordem. Do mesmo modo, ocorre com a unidade de medida de quarta ordem, ou seja, esta será *três* vezes a unidade de medida de terceira ordem.



$\boxed{2111_{(3)}}$

Ilustração 33: tarefa 11 - Processo medição
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Durante o processo de medição (Ilustração 33), foram utilizadas *duas* unidades de medidas de quarta ordem, *uma* unidade de medida de terceira ordem, *uma* unidade de medida de segunda ordem e *uma* unidade de medida de primeira ordem. Os estudantes deverão registrar o valor da medição fora do quadro valor de lugar: $2111_{(3)}$. Ou seja, trata-se de uma representação abstrata. Para Rózov, nas palavras de Davydov:

> o processo mesmo da abstração consiste em elucidar a *independência* de estado ou situação de qualquer objeto considerado com respeito a certos fatores. Como resultado, esse objeto inicial se substitui mentalmente por outro; por seu *modelo, e no* trabalho sucessivo com o mesmo já não se considera tais fatores. [...] Em outros termos, como resultado da abstração se obtém um novo objeto idealizado, mentalmente correlativo com umas condições as que não cooperava o objeto inicial. A estruturação deste novo objeto aparece como determinado procedimento da atividade: como processo abstrativo, cuja matéria é a inter-relação da dependência e a independência dos fatores que caracterizam a existência do objeto real (DAVYDOV, 1982, p. 302).

Durante o desenvolvimento das tarefas davydovianas para o ensino do sistema de numeração decimal, para a sistematização das diferentes ordens de medidas, os estudantes formam os agrupamentos, porém, mentalmente. Por exemplo, se a base numérica considerada é a ternária, a unidade de medida de segunda ordem é *três* vezes a unidade de medida de primeira ordem. Esse processo, no entanto, passa a ser realizado mentalmente, ou seja, sem formar agrupamentos objetalmente.

2.5 REGISTRO NO QUADRO VALOR DE LUGAR COM ESPAÇOS VAZIO

Tarefa 12: Os estudantes deverão determinar em qual sistema numérico foi realizada a contagem dos objetos discretos (Ilustração 34). Estes, já estão agrupados. Cabe às crianças registrarem o valor da contagem no quadro valor de lugar (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДО et al, 2012).

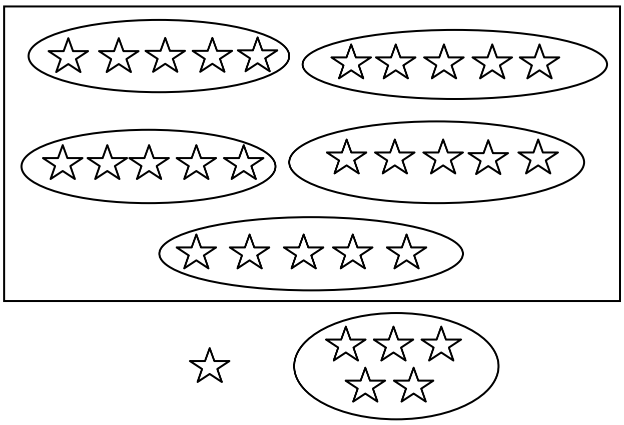


Ilustração 34: tarefa 12 - Objetos agrupados para determinar a base
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

A conclusão a ser obtida é que há um agrupamento composto por cinco estrelas delimitado por um contorno (Ilustração 34) e outro formado por um retângulo com cinco contornos iguais ao anterior. Portanto, cada novo agrupamento é composto por cinco vezes o anterior, ou seja, o sistema numérico utilizado foi o quinário.

O agrupamento composto pelo mesmo valor numérico da base representa a unidade de medida de segunda ordem. O agrupamento que contém cinco vezes a unidade de medida de segunda ordem representa a unidade de medida de terceira ordem. Por fim, o objeto que sobrou (que não formou agrupamento), refere-se à unidade de medida de primeira ordem.

Os estudantes deverão registrar no quadro valor de lugar, conforme a ilustração 35.

V	IV	III	II	I	
		1	1	1	(5)

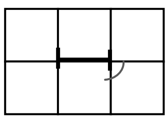
Ilustração 35: tarefa 12 - Registro no quadro valor de lugar
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

No quadro valor de lugar (Ilustração 35), da esquerda para a direita, registrou-se *uma* unidade de medida de primeira ordem, *uma* de segunda e *uma* de terceira ordem. Embora o quadro valor de lugar contenha os espaços para as unidades de medidas de quarta e quinta ordem, estes permanecem vazios, pois, os agrupamentos formados foram somente até a terceira ordem.

Mas, por que o quadro valor de lugar contém os espaços para as unidades de medidas de quarta e quinta ordem? O quadro valor de lugar não poderia ter sido construído somente até a terceira ordem? É correto deixar espaços vazios?

Os espaços vazios no quadro valor de lugar não alteram o valor do registro, portanto, este modo de registrar está correto. Os espaços vazios no quadro valor de lugar revelam a possibilidade da inexistência de determinadas ordens numéricas.

<u>Tarefa 13:</u> A proposição desta tarefa é que se construam segmentos com medidas **A** e **B**, a partir dos valores registrados no quadro valor de lugar e da unidade de medida proposta (Ilustração 36). Os estudantes deverão construir as unidades de medidas de primeira, segunda e terceira ordem. Porém, o professor questiona: como é possível saber até que ordem será necessário construir? Conclui-se que é possível saber que será necessário construir até a terceira ordem, por meio do registro no quadro valor de lugar (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).



T_1

	IV	III	II	I	
A		1	2		(3)
B		2		1	(3)

Ilustração 36: tarefa 13 - Valores das medidas dos segmentos A e B
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012, p. 61)

A base numérica considerada é três, portanto a unidade de medida de segunda ordem (Ilustração 37) é *três* vezes a unidade de medida de primeira ordem. A unidade de medida de terceira ordem é *três* vezes a unidade de medida de segunda ordem. Após a formação das diferentes ordens de medidas procede-se a construção dos segmentos, conforme ilustração 37.

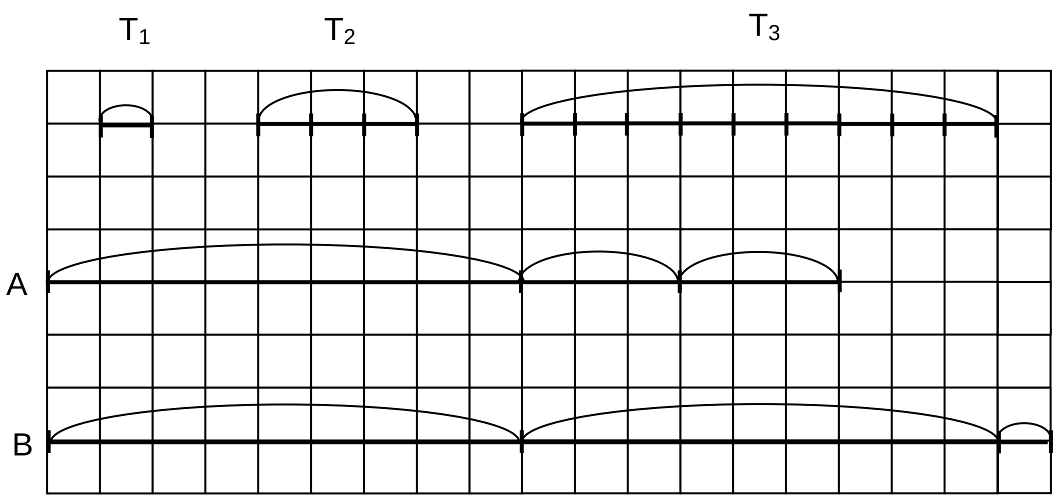


Ilustração 37: tarefa 13 - Construção segmentos A e B
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Para construir o segmento com medida **A** de comprimento (Ilustração 37), foi necessário utilizar *uma* unidade de medida de terceira ordem e *duas* unidades de medidas de segunda ordem. Já o segmento com medida **B** de comprimento, foi construído a partir de *duas* unidades de medidas de terceira ordem e *uma* unidade de medida de primeira ordem.

Na tarefa em análise, Davydov e seus colaboradores apresentam um elemento novo que constitui um movimento inverso de resolução da tarefa. Pela primeira vez, os estudantes constroem o objeto a partir do registro do valor da medida. Ou seja, as tarefas davydovianas não seguem um movimento linear de desenvolvimento. Estas estão inter-relacionas e compõem um sistema de tarefas que contempla o sistema conceitual em estudo em suas diferentes significações.

2.6 A DIMENSÃO GERAL, UNIVERSAL, PARTICULAR E SINGULAR

Tarefa 14: Os estudantes deverão medir a área com medida **A** nos sistemas numéricos quinário e quartenário com a unidade de medida T_1 (Ilustração 38). Os resultados da medição serão registrados no quadro valor de lugar (ДАВЫДОВ et al, 2012).

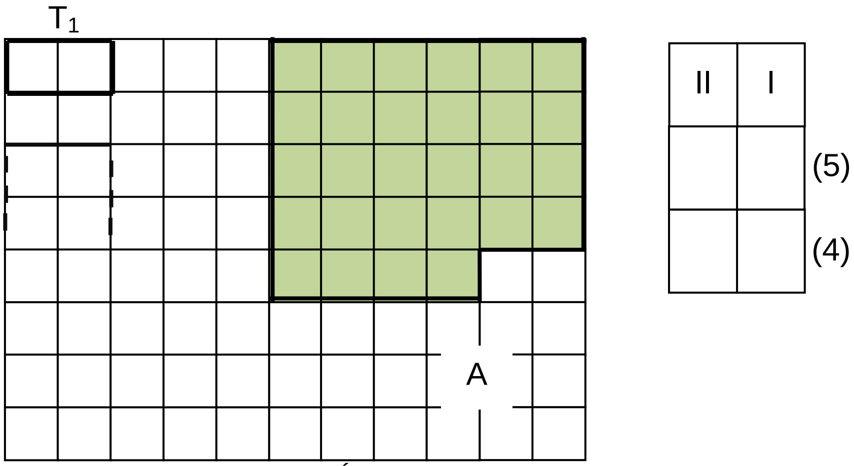


Ilustração 38: tarefa 14 - Área a ser medida e quadro valor de lugar
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

A unidade de medida de primeira ordem (T_1) é formada por duas unidades de área da malha (Ilustração 38). Faz-se necessário construir a unidade de medida de segunda ordem. A título de ilustração, inicialmente adotamos o sistema quinário para realizar o processo de medição e registrar o resultado no quadro valor de lugar (Ilustração 39).

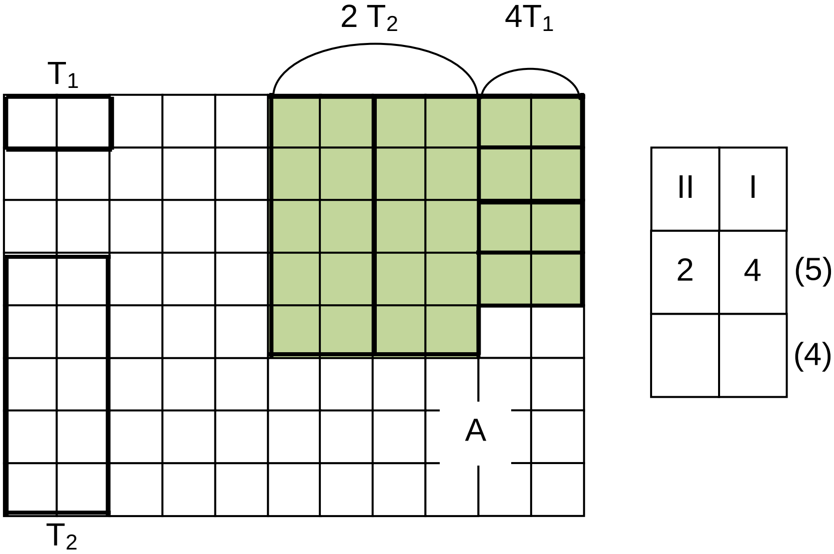


Ilustração 39: tarefa 14 - Processo de medição sistema quinário
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

A unidade de medida de segunda ordem é composta por cinco unidades de medidas de primeira ordem. No processo de medição (Ilustração 39) fez-se necessário a utilização de *duas* unidades de medidas de segunda ordem ($2T_2$) e *quatro* unidades de medidas de primeira ordem ($4T_1$). Portanto, a área com medida **A**, no sistema de numérico quinário: $\frac{A}{5} = 2T_2 4T_{1(5)}$.

Procederemos novamente à medição da área com medida **A**, porém no sistema numérico quartenário. Para tanto, será necessário, inicialmente, a construção da unidade de medida de segunda ordem (Ilustração 40).

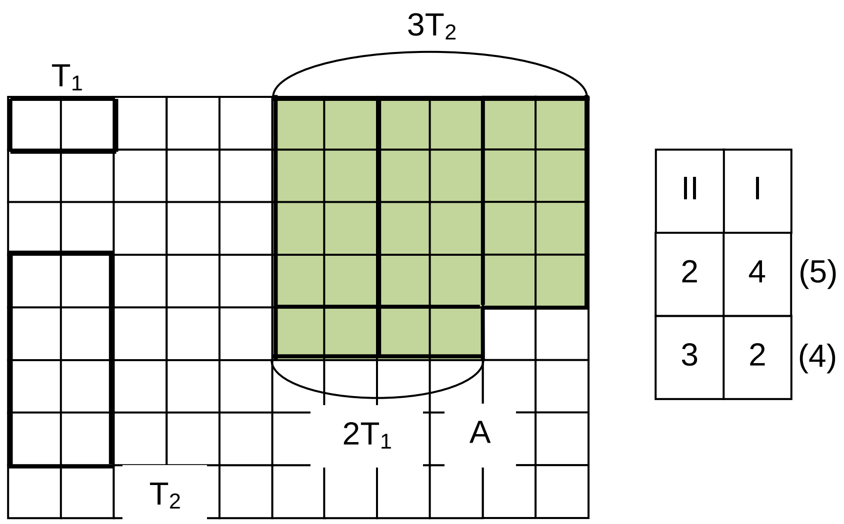


Ilustração 40: tarefa 14 - Processo de medição sistema quartenário
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

A unidade de medida de segunda ordem é composta por quatro unidades de medidas de primeira ordem. O resultado do processo de medição permite-nos concluir que a área com medida **A**, no sistema numérico quartenário é constituída por *três* unidades de medidas de segunda ordem e *duas* unidades de medida de primeira ordem. Ou seja, $\frac{A}{4} = 3T_2 2T_1(4)$.

Segundo Rosa (2012), o modelo abstrato do conceito teórico de número é expresso pela relação de divisibilidade e multiplicidade. Na especificidade do nosso objeto de estudo, tal relação pode ser expressa, genericamente, a partir dos seguintes modelos matemáticos: $\frac{A}{E}$ =..., $n_{(E3)}$, $n_{(E2)}$, $n_{(E1)}$ e A =... E (..., $n_{(E3)}$, $n_{(E2)}$, $n_{(E1)}$).

Tal relação universal do sistema de numeração consiste em que o todo (qualquer grandeza – o geral) pode ser dividido em partes, determinadas pela base numérica considerada. O "universal é o essencial, o necessário, o que é próprio de inúmeros fenômenos e processos particulares e singulares" (ROSENTAL, 1960, p. 330). Em outras palavras, o universal consiste na relação entre grandezas, que dá origem a qualquer número real, independentemente da base numérica utilizada.

As bases numéricas constituem as particularidades do sistema de numeração. Estas, por sua vez, possibilitam a expressão das diversas singularidades numéricas – expressão aritmética do processo de medição.

Na tarefa em análise foram consideradas duas particularidades do sistema de numeração (as bases quartenária e quinária). Estas possibilitaram duas expressões singulares para a grandeza com medida genérica **A:** $3T_2 2T_{1(4)}$ e $2T_2 4T_{1(5)}$. Tal possibilidade foi propiciada pela relação universal do sistema de numeração (divisibilidade e multiplicidade).

Como diz Kopnin (1978):

> o universal implica a riqueza do singular e do particular no sentido de que, apreendendo as leis, ele está refletindo, nessa ou naquela medida, todos os casos particulares de manifestação do singular. Sem compreender a dialética do *universal* e do *singular* nas categorias, é impossível descobrir a essência e a relação destas com os conceitos de outras ciências (KOPNIN, 1978, p.108).

Em síntese, no sistema de numeração (cada ordem de medida deverá conter no máximo a quantidade da base numérica considerada), $\frac{A}{E}$ =... $n_{(E3)}$, $n_{(E2)}$, $n_{(E1)}$; **n** representa o valor de cada ordem de medida e esse pode ter o valor máximo da base numérica. O valor **E** é a *particularidade* do sistema de numeração (a base numérica), e o resultado obtido a partir da relação entre a grandeza com medida **A** e a unidade de medida **E**, é uma singularidade. Existem diferentes expressões singulares porque, existem diferentes unidades de medidas que dão origem às diferentes bases numéricas, estas, como já mencionamos, constituem a dimensão particular do sistema de numeração.

Por exemplo, na tarefa em análise, a grandeza com medida **A** (o todo) foi dividida por quatro (particularidade - base quatro) e resultou em $3T_2 2T_{1(4)}$, ou seja,

$32_{(4)}$ (expressão singular da medida A). Ou, com base na relação inversa, a de multiplicação, temos: A = 4 ($32_{(4)}$)[5].

Desse modo, concretizamos a relação universal na singularidade (resultado do processo de medição), mediado pela particularidade (as diferentes bases numéricas), ou seja, reproduzimos teoricamente a essência do sistema de numeração subjacente às tarefas davydovianas.

Tarefa 15: Nesta tarefa, a unidade de medida de primeira ordem é *um* quadrado de área da malha (Ilustração 41). As unidades de medidas de segunda, terceira e quarta ordem já estão construídas. Os estudantes deverão analisá-las e determinar em qual base numérica elas foram compostas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).

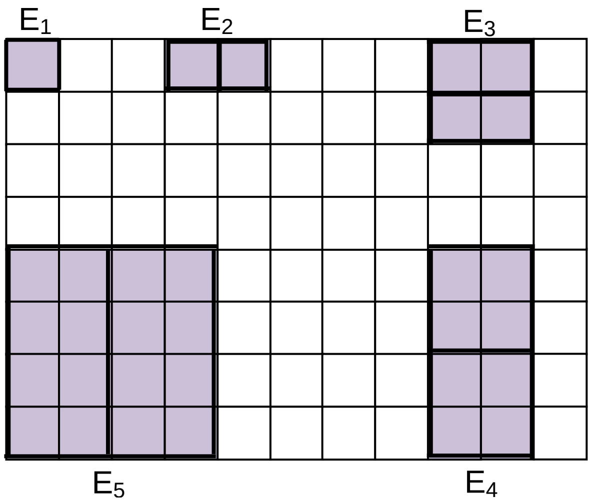


Ilustração 41: tarefa 15 - Unidades de medidas até a quinta ordem
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

A unidade de medida de segunda ordem é *duas* vezes a unidade de medida de primeira ordem (Ilustração 41). A unidade de medida de terceira ordem é *duas* vezes a unidade de medida de segunda ordem e, assim sucessivamente até a quinta ordem. Portanto, os estudantes concluem, com orientação do professor, que a base numérica utilizada é a binária.

A partir das unidades de medidas das diferentes ordens e do registro no quadro valor de lugar (Ilustração 42), os estudantes constroem a área **K** (ГОРБОВ,

[5] Apenas a título de informação, a operação **A** = 4 ($32_{(4)}$) pode ser resolvida do seguinte modo: **A** = $(4^1 \times 3) + (4^0 \times 2)$ → **A** = 12 + 2 → **A** = 14.

МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

	V	IV	III	II	I
K	1		1		1

(2)

k

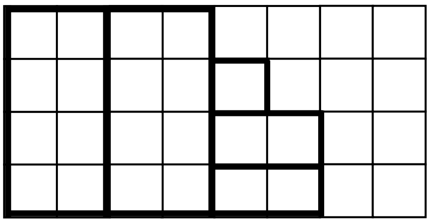


Ilustração 42: tarefa 15 - Construção área k
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

Para a construção da área **k** (Ilustração 42), foi necessário utilizar *uma* unidade de medida de quinta ordem, *uma* unidade de medida de terceira ordem e *uma* unidade de medida de primeira ordem.

Vale ressaltar que nesta tarefa não é possível registrar a medição da área **k,** fora do quadro valor de lugar, pois para isso, será necessário utilizar um símbolo para indicar que a unidade de medida de segunda e quarta ordem não foram utilizadas. Esse símbolo será o zero (0), já apresentado no livro didático do primeiro ano (ДАВЫДОВ et al, 1997) com significação na reta numérica. Mas a significação referente ao valor posicional do sistema de numeração ainda não foi abordado, por isso, a ausência do mesmo na presente tarefa.

Historicamente segundo Duarte (1987), o “valor posicional”, do sistema de numeração, “se deu através da criação do ábaco” (DUARTE, 1987, p. 72). O algarismo zero foi criado, historicamente, para suprir a necessidade humana de representação simbólica para a coluna vazia do ábaco (Idem).

Nas proposições davydovianas, embora o ábaco não seja utilizado, sente-se a mesma necessidade: a de um símbolo que represente o vazio do quadro valor de lugar.

2.7 REGISTRO POSICIONAL DO NÚMERO FORA DO QUADRO

Tarefa 16: Os estudantes deverão realizar a contagem dos objetos, em diferentes bases numéricas, indicadas ao lado do quadro valor de lugar (Ilustração 43). Primeiramente os objetos serão contados no sistema numérico quinário e posteriormente, no ternário. Os valores dos resultados da contagem, em ambos os sistemas numéricos, serão registrados dentro e fora do quadro valor de lugar (ДАВЫДОВ et al, 2012).

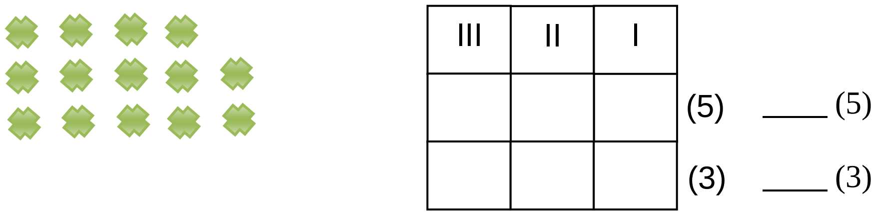
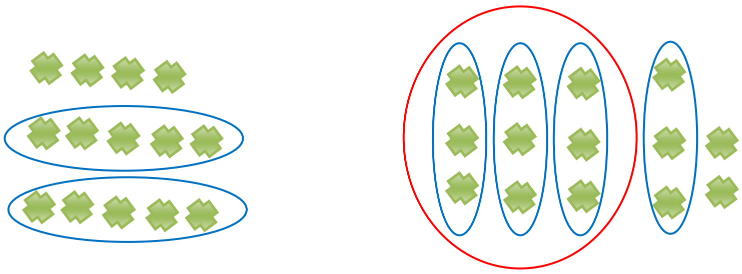


Ilustração 43: tarefa 16 - Objetos para contagem
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012,)

Para realizar a contagem dos objetos no sistema numérico quinário (Ilustração 44), os agrupamentos de segunda ordem serão compostos por cinco objetos. No sistema numérico ternário (Ilustração 44), os agrupamentos de segunda ordem serão compostos por três objetos e a unidade de medida de terceira ordem será composta por três unidades de medidas de segunda ordem. Os agrupamentos formados a partir de diferentes ordens serão contornados por cores distintas. Os resultados das contagens serão registrados no quadro valor de lugar e também fora (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).



III	II	I		
	2	4	(5)	$24_{(5)}$
1	1	2	(3)	$112_{(3)}$

Ilustração 44: tarefa 16 - Contagem, registro dentro e fora do quadro valor
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Na contagem realizada a partir do sistema quinário (Ilustração 44), formaram-se *dois* agrupamentos de segunda ordem e sobraram quatros objetos sem serem agrupados, ou seja, *quatro* unidades de medidas de primeira ordem. No sistema ternário (Ilustração 44), formou-se *uma* unidade de medida de terceira ordem, composta por três unidades de medida de segunda ordem, *uma* unidade de medida de segunda composta por três unidades de medidas de primeira ordem e *duas* unidades de medida de primeira ordem (duas unidades de medida que não formou grupo de três). Ao lado do quadro valor de lugar registrou-se o valor da contagem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

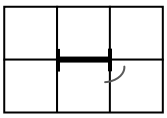
Historicamente, segundo Ifrah (1997), "para chegar a um sistema tão engenhoso quanto o nosso, teria sido inicialmente necessário descobrir o *princípio de posição"*, ou seja, "um algarismo tem um valor que varia em função da posição que ocupa na escrita de um número" (IFRAH, 1997, p. 678).

Na ilustração 45, os valores que foram apresentados no quadro valor de lugar também foram registrados fora do quadro (em linha), porém, continuaram iguais, ou seja, a posição dos algarismos permaneceu a mesma. Por exemplo, o algarismo *dois*, na primeira linha do quadro, ocupava a posição de segunda ordem, assim como no registro externo.

Para Costa (1866), um algarismo a esquerda de outro, representa unidades de ordem superior em relação ao da direita, ou seja, é maior tantas vezes quantas são as unidades da base numérica. Por exemplo, no registro $112_{(3)}$, o primeiro algarismo da esquerda para direita (*um*), representa a unidade de medida de terceira ordem e o segundo (*um*) representa a unidade de medida de segunda ordem. Ou seja, os algarismos são iguais, porém por estar em lugares diferentes, um é três vezes maior que o outro. Isso porque a posição é diferente e a base numérica utilizada é a ternária.

2.8 INTRODUÇÃO DO ALGARISMO ZERO

Tarefa 17: Na ilustração 45 apresenta-se, na malha, a unidade de medida de primeira ordem, formada por uma unidade de comprimento (K_1). E no quadro valor de lugar as medidas (**B**, **T** e **M**) de três comprimentos diferentes, além da base numérica a ser considerada (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).



K_1

	III	II	I	
B	2	1		(3)
T		2	1	(3)
M	2		1	(3)

Ilustração 45: tarefa 17 - Registro numérico fora do quadro valor
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

A tarefa consiste no registro do valor das medidas dos comprimentos, porém fora do quadro valor de lugar e, posteriormente, a construção dos segmentos com as medidas **B**, **T** e **M** (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

O resultado obtido será: $21_{(3)}$, $21_{(3)}$ e $21_{(3)}$.

Os números registrados fora do quadro valor de lugar são iguais? Isso significa que os segmentos representam a mesma medida? A resposta para este último questionamento é não. Os valores das medidas B, T e M são diferentes, portanto, representam medidas de comprimentos diferentes. Desse modo, faz-se necessário registrar, fora do quadro valor de lugar, de modo diferente, deve haver um símbolo que represente o espaço vazio do quadro valor de lugar. Mas, qual seria? O professor apresenta o número zero e sugere a reescrita dos números em questão, conforme a ilustração 46 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА е САВЕЛЬЕВА, 2009).

$21_{(3)}$	$21_{(3)}$	$21_{(3)}$
$210_{(3)}$	$21_{(3)}$	$201_{(3)}$

Ilustração 46: tarefa 17 - Escrita dos números
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Na ilustração 46 são apresentados novamente os registros sem o zero, e abaixo de cada um deles, a representação numérica com o zero. A síntese a ser elaborada é que, para registrar os algarismos fora do quadro valor de lugar, necessita-se de um símbolo que represente o espaço vazio do quadro: o zero (ГОРБОВ, МИКУЛИНА е САВЕЛЬЕВА, 2009).

A segunda etapa da tarefa consiste na construção dos segmentos com comprimentos $210_{(3)}$, $21_{(3)}$, $201_{(3)}$. Para tanto, faz-se necessária à construção das unidades de medidas de segunda e terceira ordem. O segundo valor ($21_{(3)}$,) é composto por dois algarismos, ou seja, duas ordens. O primeiro e o terceiro valor ($210_{(3}$ e $201_{(3)}$), por sua vez, são compostos por três algarismos, atinge a terceira ordem numérica.

Já se sabe que, a unidade de medida de primeira ordem é formada por uma unidade da malha, *uma* unidade de medida (Ilustração 45). Como o sistema de numeração em questão é o ternário, a unidade de medida de segunda ordem será três vezes a unidade de medida de primeira ordem, *três* unidades da malha. E a unidade de medida de terceira ordem é três vezes a unidade de medida de segunda ordem (Ilustração 47). Após a construção das unidades de medidas já é possível compor os segmentos, conforme a ilustração seguinte (ГОРБОВ, МИКУЛИНА е САВЕЛЬЕВА, 2009).

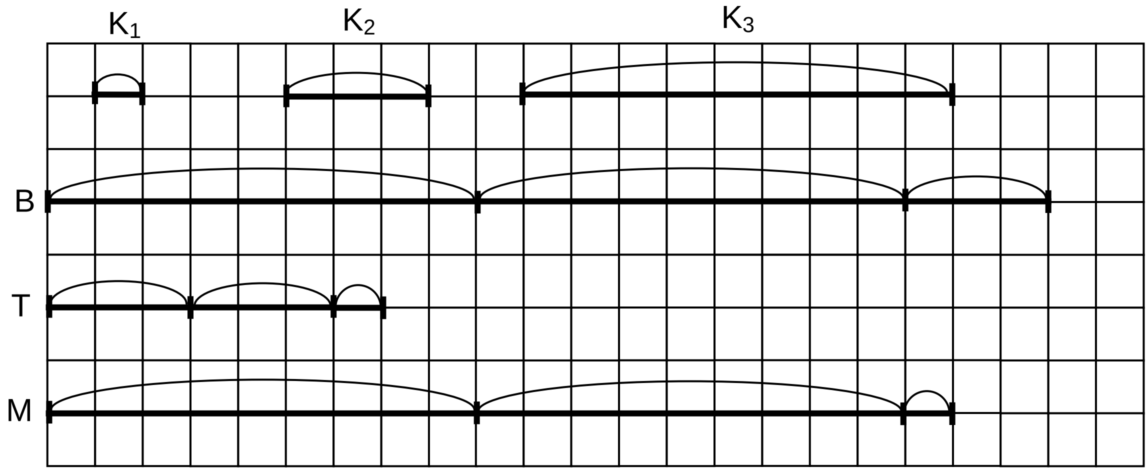


Ilustração 47: tarefa 17 - Construção segmentos
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Para a composição do segmento com comprimento de medida **B** ($210_{(3)}$) foi necessário utilizar *duas* unidades de medidas de terceira ordem (2), *uma* unidade de medida de segunda ordem (1) e *nenhuma* unidade de medida de primeira ordem (0), pois, todas as unidades de medida de primeira ordem formaram grupos de segunda ordem (Ilustração 47). O segmento com comprimento de medida **T** ($21_{(3)}$) foi composto por *duas* unidades de medidas de segunda ordem (2) e *uma* de primeira (1). E, no segmento com medida do comprimento **M** ($201_{(3)}$), foram *duas* unidades de medida de terceira ordem (2), *nenhuma* de segunda (0), pois as unidades de segunda ordem foram reagrupadas em unidades de medida de terceira ordem, e, *uma* unidade de medida de primeira ordem (1).

Historicamente, segundo Gundlach (1992), a utilização do zero pode ser encontrada na Matemática dos Maias, “o símbolo maia do zero era usado para indicar a ausência de quaisquer unidades das várias ordens do sistema de base” (idem, p. 34). Ou seja, um símbolo que representa quando determinada posição/ordem está vazia.

Nos comprimentos cujas medidas foram representadas pelos valores $210_{(3)}$ e $201_{(3)}$, os zeros indicam que as unidades de medidas daquela ordem (primeira e segunda, respectivamente) estão agrupadas na ordem seguinte. Em $210_{(3)}$, as unidades de medida de primeira ordem estão agrupadas na segunda ordem e em $201_{(3)}$ as unidades de medidas de segunda ordem estão agrupadas na terceira ordem. Porém o registro da medida do comprimento representado por $21_{(3)}$, fora do quadro valor de lugar, não contém o algarismo zero. Isso porque mesmo sem a utilização do zero, constata-se que a unidade de medida de terceira ordem não foi utilizada.

Segundo Ifrah (1997), o zero foi uma descoberta fundamental no progresso da matemática;

> Em contrapartida, à medida que o princípio de posição foi sendo regularmente aplicado, chegou um momento em que fez-se necessário um sinal gráfico especial para representar as unidades faltantes; assim, comandada por um uso estrito e regular dessa regra, a descoberta do zero marcou a etapa decisiva de uma revolução sem a qual não se poderia imaginar o progresso da matemática, das ciências e das técnicas modernas (IFRAH, 1997, p. 685).

A produção do zero, durante o desenvolvimento histórico da Matemática, impulsionou não só o desenvolvimento desta, como também de outras ciências. Conforme já mencionamos, tal produção humana foi desencadeada a partir da necessidade de representação escrita do sistema de numeração. Davydov e seus colaboradores não contemplam, explicitamente, a história da origem do sistema de numeração, inclusive do zero. Porém, as tarefas são organizadas de tal modo, que levam os estudantes a reproduzirem o zero a partir de necessidades semelhantes àquelas vivenciadas historicamente pela humanidade.

Tal conduta refere-se, pois, ao reflexo lógico do desenvolvimento histórico ou, como chamava Engels (apud ROSENTAL, 1960) do reflexo histórico, porém, “corrigido”. Este “reflexo não segue passivamente o curso histórico do desenvolvimento dos fenômenos, mas que esclarece a necessidade deste desenvolvimento, captando o mais importante e essencial dele” (ROSENTAL, 1960, p. 341).

As proposições davydovianas não seguem, passivamente, o percurso histórico, percorrido pela humanidade, durante o desenvolvimento do sistema de numeração. As tarefas revelam a necessidade de desenvolvimento deste sistema. O zero, por exemplo, é introduzido em Davydov a partir da necessidade vivenciada pela humanidade durante o desenvolvimento histórico da escrita dos números. Isso não significa que as crianças irão reproduzir todo o percurso histórico, mas apenas o essencial que possibilita a compreensão do sistema de numeração em seu estágio atual de desenvolvimento.

Tarefa 18: Os estudantes serão orientados pelo professor para analisarem os números registrados no quadro valor de lugar e também os que estão registrados fora do quadro (Ilustração 48). O professor faz o seguinte questionamento aos estudantes: existe alguma diferença entre os registros? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

III	II	I	
1	2		(5)
	1	2	(5)
1		2	(5)

$120_{(5)}$ $12_{(5)}$ $102_{(5)}$

Ilustração 48: tarefa 18 - Registro dentro e fora do quadro valor de lugar
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

A conclusão a ser obtida na presente tarefa é que a diferença consiste no fato de que para registrar os números, fora do quadro valor de lugar (Ilustração 48), foi necessário utilizar o zero para representar o espaço vazio do quadro. Mas, por que no segundo registro ($12_{(5)}$) não consta o zero, já que há um espaço vazio no quadro valor? Neste caso, o zero não é utilizado, pois não altera a ordem e o valor dos algarismos (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Segundo Gundlach (1992), o zero contribui no registro numérico, pois o nosso sistema de numeração é posicional. Como diz o autor em referência, não seria possível a “numeração posicional funcionar adequadamente sem um símbolo para uma posição ou lugar vazio” (GUNDLACH, 1992, p. 11). Sem o símbolo zero, os números registrados fora do quadro valor de lugar, na presente tarefa, seriam 12, 12, 12. Estes registros não contemplam a posição dos algarismos e nem seu valor posicional.

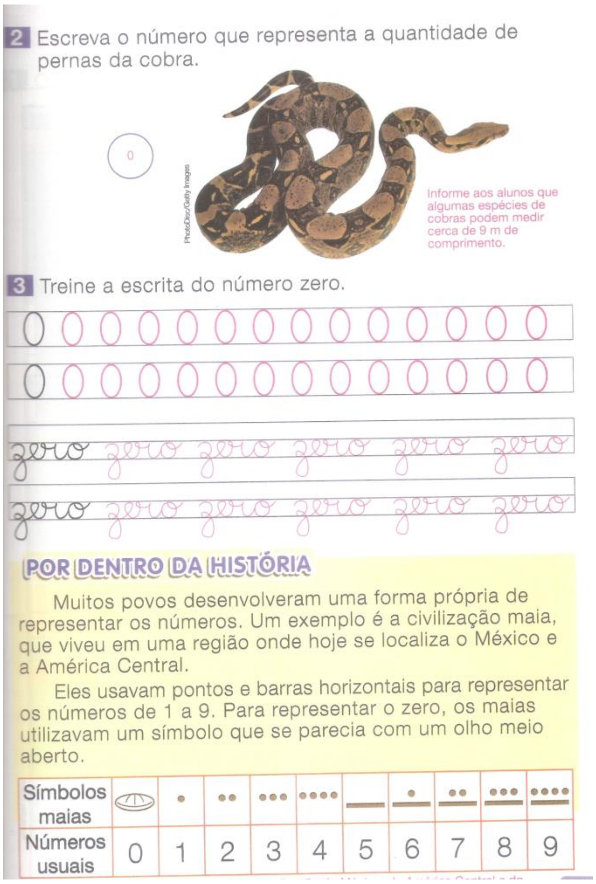
Nas proposições brasileiras de ensino, aqui já referenciadas, o zero é introduzido para representar a ausência de unidades, o “nada” (Ilustração 49). Por exemplo, mostram-se imagens de locais vazios e questiona-se: quantas pessoas há na sala. No ponto de ônibus? Na piscina?

Ilustração 49: tarefa 18 - número zero
Fonte: MENEGHELLO e PASSOS (2008, p. 20 – segundo ano)

A resposta esperada é que na sala, no ponto de ônibus e na piscina não há nenhuma pessoa. Desse modo, fica a ideia de que o zero é um número insignificante. Mas qual o significado do zero?

Na proposta de ensino davydoviana, o zero também representa a ausência de quantidade, mas não é só isso. É um símbolo utilizado para indicar que determinada ordem de medida esta agrupada em ordem superior, tem seu valor posicional, sua localização na reta numérica.

O livro em análise (Ilustração 49) prossegue na página seguinte com uma situação para os estudantes “treinarem” a escrita relacionada ao zero, e conhecerem um pouco da sua história (Ilustração 50).



2 Escreva o número que representa a quantidade de pernas da cobra.

0

Informe aos alunos que algumas espécies de cobras podem medir cerca de 9 m de comprimento.

3 Treine a escrita do número zero.

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

zero zero zero zero zero zero

zero zero zero zero zero zero

POR DENTRO DA HISTÓRIA

Muitos povos desenvolveram uma forma própria de representar os números. Um exemplo é a civilização maia, que viveu em uma região onde hoje se localiza o México e a América Central.

Eles usavam pontos e barras horizontais para representar os números de 1 a 9. Para representar o zero, os maias utilizavam um símbolo que se parecia com um olho meio aberto.

Símbolos maias		•	••	•••	••••	—	• —	•• —	••• —	•••• —
Números usuais	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ilustração 50: tarefa 18 - Escrita do zero
Fonte: MENEGHELLO, PASSOS (2008, p. 21 – segundo ano)

Trata-se de uma proposição que enfatiza a representação visualmente dada, a aparência externa de um conceito. Não estabelece relações, que envolvam as verdadeiras significações essenciais do conceito. Pois, a simples ideia de que o zero não é nada, é empírica. Há muitos nadas além da ausência de quantidades dadas discretamente aos órgãos dos sentidos para serem consideradas no ensino. A complexidade que envolve o conceito do número zero, não pode ser revelada com base apenas em exemplo sobre a quantidade de pernas de uma cobra.

Sem a compreensão da lógica interna do sistema de numeração, seria possível operar no referido sistema? Se o zero representa o “nada”, então como explicar que, na operação 30-19=11, por exemplo, 0 (“nada”) – 9, resulta em 1?

Em síntese, na ilustração 49 o zero aparece de forma pronta e acaba, ou seja, o zero não tem valor. Na ilustração 50, menciona brevemente sua história. Por outro lado, as proposições de ensino davydovianas, revelam uma das principais funções do zero, a indicação da posição na escrita dos números.

Segundo Duarte (1987), o homem levou muito tempo para desenvolver um sistema numérico posicional, e isso foi possível somente com a criação do zero. Pois este representa, conforme revelam as proposições davydovianas, que determinada ordem de medida está agrupada na ordem seguinte. Desse modo, podemos concluir que se trata de um conceito extremamente relevante e que se faz necessário maior profundidade com o tratamento do mesmo, no ensino.

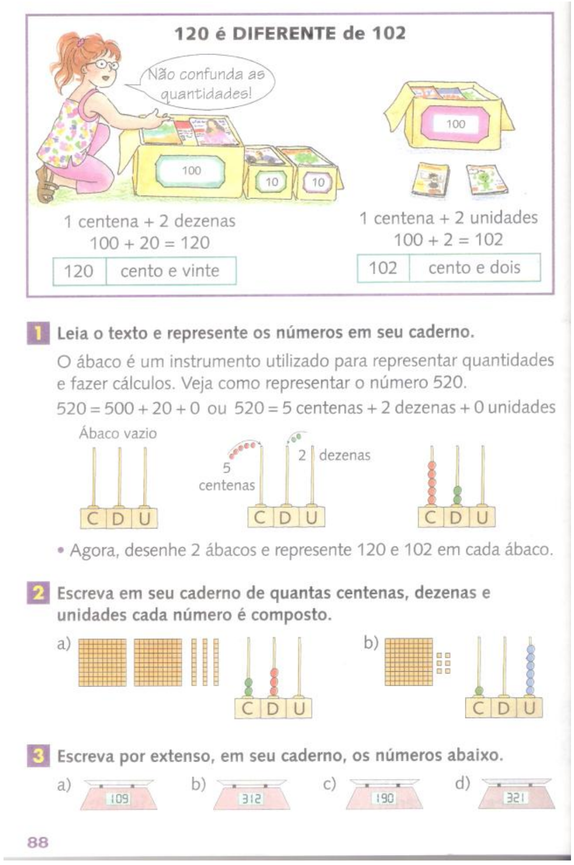
Tarefa 19: Os estudantes analisarão os algarismos que foram registrados no quadro valor de lugar (Ilustração 51). E, serão questionados pelo professor sobre o que deve ser considerado ao registrar os algarismos (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

III	II	I	
2		1	(3)
	3	2	(4)
1	2		(4)
	3	1	(3)
3	2		(6)

Ilustração 51: tarefa 19 - Registro no quadro valor
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012, p. 69)

Os estudantes concluirão que no registro dos algarismos (Ilustração 51) a posição e a base numérica devem ser consideradas. A penúltima linha do quadro valor de lugar é uma “pegadinha”, pois a base numérica considerada é três. Assim, três unidades de medidas de segunda ordem formará uma nova ordem. Ou seja, o registro correto do número consiste em, *uma* unidade de medida de terceira ordem, *nenhuma* unidade de medida de segunda ordem e *uma* unidade de medida de primeira ordem $101_{(3)}$ (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Um dos livros didáticos brasileiros analisados na presente investigação apresenta o registro de dois números, formados com os mesmos algarismos (120 e 102). No entanto, representam quantidades diferentes, pois, 120 é igual a 100 + 20, ou seja, uma centena mais duas dezenas, e 102 é igual 100 + 2, uma centena mais duas unidades.


120 é DIFERENTE de 102

Não confunda as quantidades!

100

10 10

1 centena + 2 dezenas
100 + 20 = 120

120	cento e vinte

1 centena + 2 unidades
100 + 2 = 102

102	cento e dois

1 Leia o texto e represente os números em seu caderno.

O ábaco é um instrumento utilizado para representar quantidades e fazer cálculos. Veja como representar o número 520.

520 = 500 + 20 + 0 ou 520 = 5 centenas + 2 dezenas + 0 unidades

Ábaco vazio

C D U

5 centenas

2 dezenas

C D U

C D U

• Agora, desenhe 2 ábacos e represente 120 e 102 em cada ábaco.

2 Escreva em seu caderno de quantas centenas, dezenas e unidades cada número é composto.

a) C D U

b) C D U

3 Escreva por extenso, em seu caderno, os números abaixo.

a) 109 b) 312 c) 190 d) 321

88

Ilustração 52: tarefa 19 - O número120 e diferente de 102
Fonte: PROJETO PITANGUÁ: MATEMÁTICA/ ORGANIZADORA EDITORA MODERNA (2005, p.88 – segundo ano)

Conclui-se por meio da ilustração 52, que no ensino tradicional um número formado pelos mesmos algarismos, representa quantidades diferentes. Estas variam de acordo com a posição do número.

As proposições davydovianas, por sua vez, revelaram que não é só isso. O valor numérico depende sim da posição, mas, também, da base numérica utilizada. Porém, nas proposições brasileiras, considera-se como sistema de numeração apenas o decimal. Quando na realidade, este é apenas uma particularidade do sistema de numeração que é composto também pelas demais bases numéricas. Deste modo, as proposições brasileiras contemplam apenas uma parte, um fragmento do sistema de numeração.

2.9 REGISTRO DE NÚMEROS NO QUADRO

<u>**Tarefa 20:**</u> Os estudantes deverão copiar no quadro valor de lugar (Ilustração 53) os números que estão registrados fora dele (ДАВЫДОВ et al, 2012):

	IV	III	II	I
$305_{(7)}$				
$1050_{(6)}$				
$2005_{(8)}$				
$230_{(4)}$				
$102_{(3)}$				
$S0K_{(*)}$				

Ilustração 53: tarefa 20 - Registrar no quadro valor de lugar
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

A proposição é que os estudantes determinem a posição que cada algarismo ocupará no quadro valor de lugar e registrem ao lado, a base numérica de cada número (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

IV	III	II	I	
	3		5	(7)
1		5		(6)
2			5	(8)
	2	3		(4)
	1		2	(3)
	S		K	(*)

Ilustração 54: tarefa 20 - Registro quadro valor de lugar
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Vale lembrar que o espaço vazio no quadro, indica que aquela ordem esta vazia. E que, o zero não será utilizado no registro, no quadro valor de lugar (Ilustração 54), de um número que o contenha na sua composição. No último registro, mesmo com o valor aritmético desconhecido de cada algarismo, foi possível determinar a posição do número S no quadro valor de lugar devido à função do número zero no registro em linha (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Segundo Caraça (1951), a criação do zero ocorreu “devida às exigências da numeração escrita” (CARAÇA, 1951 p. 6). Por isso, na escrita em linha, o zero é fundamental.

<u>Tarefa 21:</u> Os estudantes deverão medir a área com medida **A**, no sistema ternário e a área com medida **B**, no sistema quaternário (Ilustração 55). A unidade de medida de primeira ordem é duas unidades de área da malha (ДАВЫДОВ et al, 2012).

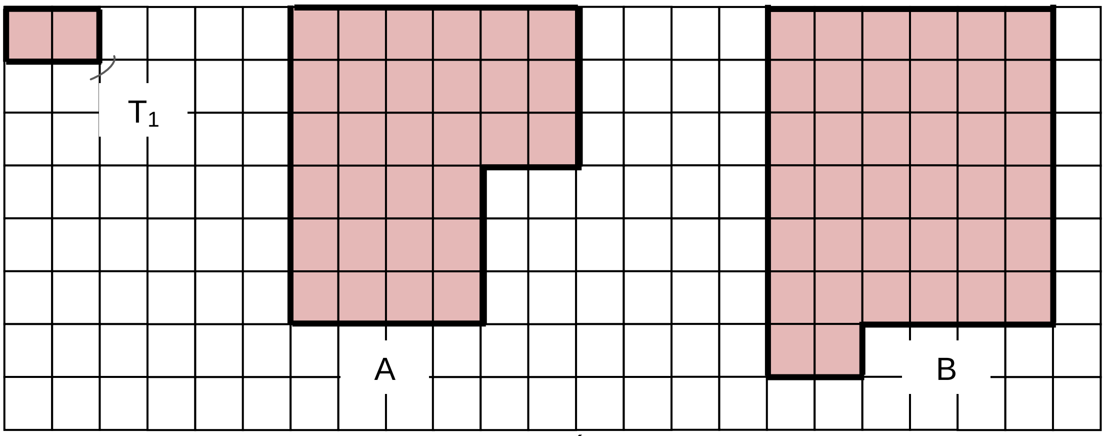


Ilustração 55: tarefa 21 - Área A e B para medir
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

O processo de medição da área com medida **A** será realizado no sistema numérico ternário (Ilustração 56). Portanto a unidade de medida de segunda ordem será *três* vezes a unidade de medida de primeira ordem. Já a unidade de medida de terceira ordem será *três* vezes a unidade de medida de segunda ordem. Como a área com medida **B** deverá ser medida no sistema quartenário, a unidade de medida de segunda ordem será *quatro* vezes a de primeira ordem, e a unidade de medida de terceira ordem será *quatro* vezes a de segunda ordem.

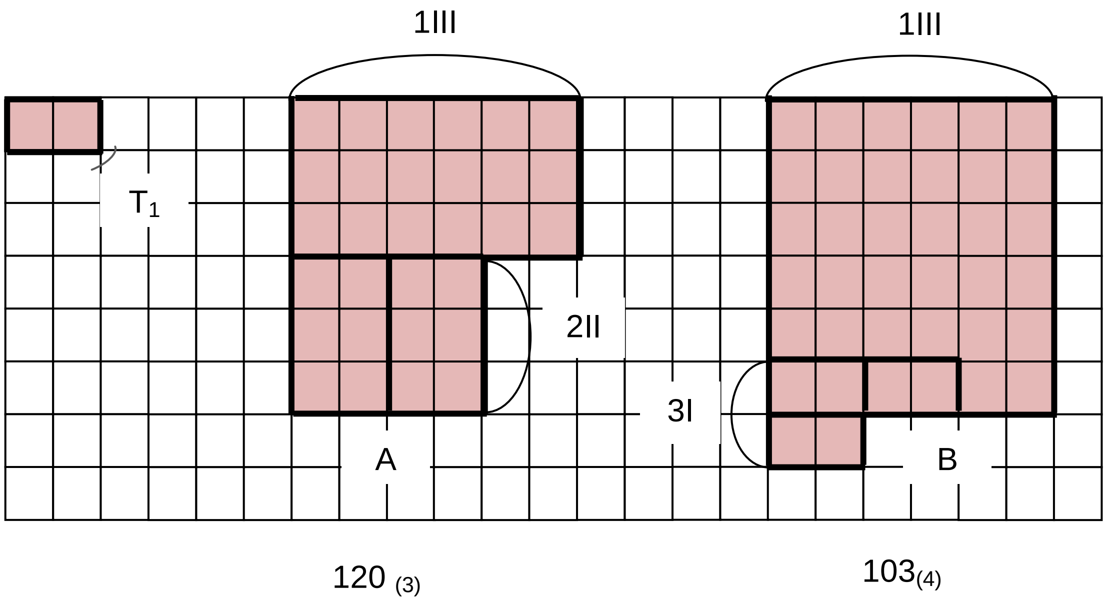


Ilustração 56: tarefa 21 - Medição área A e B
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

O processo de medição da área **A** no sistema ternário (Ilustração 56), resultou em $120_{(3)}$ (*uma* unidade de medida de terceira ordem, *duas* unidades de medida de segunda ordem e *nenhuma* unidade de medida de primeira ordem), pois, $\frac{A}{3} = 120_{(3)}$. E, o processo de medição da área **B** no sistema numérico quartanário (Ilustração 56) resultou em $103_{(4)}$ (*uma* unidade de medida de terceira ordem, *nenhuma* unidade de medida de segunda ordem e *três* unidades de medidas de primeira ordem), pois, $\frac{B}{4} = 103_{(4)}$.

Na área com medida **A,** a unidade de medida de primeira ordem foi agrupada na unidade de medida de segunda ordem e na área com medida **B,** a unidade de medida de segunda ordem foi agrupada na de terceira ordem.

O resultado das medições da área com medida **A** e da área com medida **B** pode ser registrado fora do quadro valor de lugar, pois, já foi desenvolvido, nas tarefas anteriores, o significado do algarismo zero na escrita do sistema de numeração.

Segundo Duarte (1987), a origem do algarismo zero, “não foi a partir de uma reflexão sobre a sequência dos números”, mas surgiu com a finalidade, “puramente prática de ser um símbolo que representava a coluna vazia do ábaco” (DUARTE, 1987, p. 65).

Porém segundo, Grossnickle e Brueckner (1965):

> "Embora o ábaco tenha contribuído para que o homem aumentasse de muito sua capacidade em usar números, essa mesma invenção impediu, mais tarde, o progresso. É uma afirmação muito certa a de que o zero teria sido inventado muitos séculos antes se o homem não tivesse inventado o ábaco. A necessidade é a mãe das invenções. O zero não foi uma necessidade enquanto foi possível usar o ábaco" (GROSSNICKLE, BRUECKNER, 1959, p. 35).

Duarte (1987), também afirma que "o homem ficou tão preso a esse instrumento, que o ábaco acabou se tornando um fator de cerceamento do progresso" (DUARTE, 1987, p. 68).

Mas, se o ábaco gerou obstáculos para o desenvolvimento histórico do sistema de numeração, por que ele é considerado na maioria das proposições brasileiras de ensino? E por que Davydov e seus colaboradores não utilizam esse instrumento em suas proposições de ensino?

Davydov e seus colaboradores adotam a unidade entre o lógico e o histórico em suas proposições de ensino para introdução do sistema de numeração no segundo ano do Ensino Fundamental.

Vale lembrar, conforme já mencionamos na introdução deste, que de acordo com Kopnin (1978), o histórico é "o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento" e o lógico "a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema das abstrações" (Idem, p. 183-184).

Ainda não temos clareza sobre os reais motivos pelos quais Davydov e seus colaboradores não adotam o ábaco, em suas proposições de ensino para introduzir o sistema de numeração. Entretanto, elaboramos uma hipótese para futuras pesquisas: Davydov propõe que a educação acompanhe o desenvolvimento científico tecnológico contemporâneo. O ábaco, por sua vez, é um instrumento tecnológico primitivo que contempla apenas as grandezas discretas. Tal hipótese será confirmada ou refutada em nossa pesquisa de mestrado.

Tarefa 22: Nessa tarefa, a proposição consiste em que (Ilustração 57), que os estudantes meçam o comprimento dos segmentos M, K e H, no sistema numérico binário (ДАВЫДОВ et al, 2012).

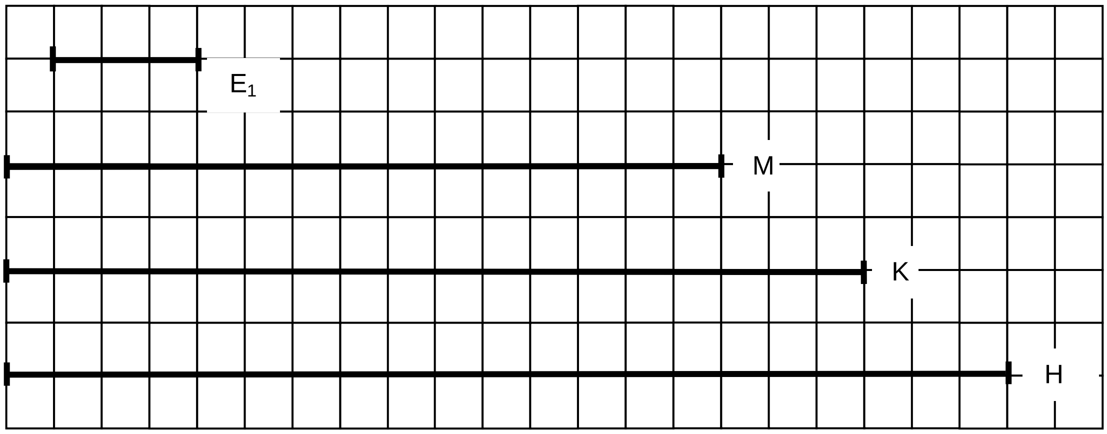
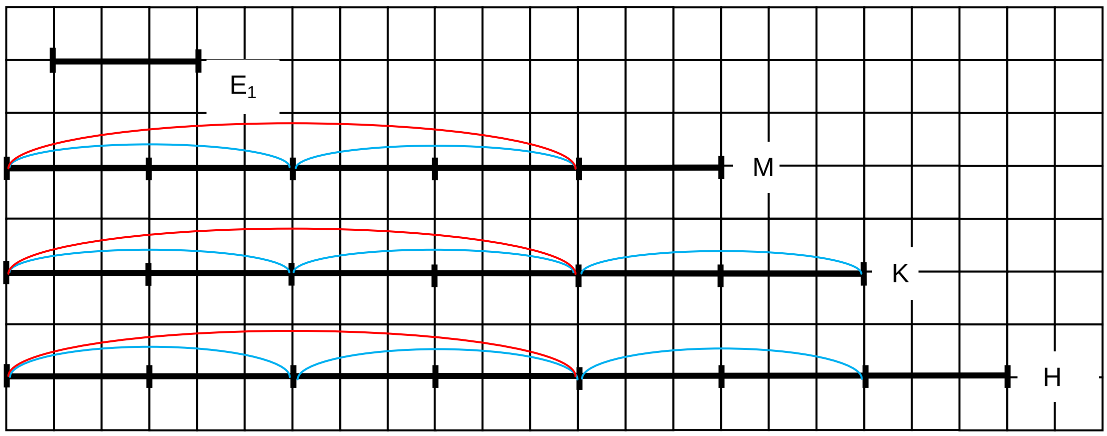


Ilustração 57: tarefa 22 - Segmentos M, K e H para ser medido
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

A unidade de medida de primeira ordem é formada por *três* unidades de comprimento da malha (Ilustração 58). A unidade de medida de segunda ordem é duas vezes a de primeira ordem e a unidade de medida de terceira ordem é duas vezes a unidade de medida de segunda ordem.



$\frac{M}{2} = 101_{(2)}$ $\frac{K}{2} = 110_{(2)}$ $\frac{H}{2} = 111_{(2)}$

Ilustração 58: tarefa 22 - Medição segmentos e registro em linha
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Durante o processo de medição do comprimento com medida **M** (Ilustração 58), formou-se *uma* unidade de medida de primeira ordem, *nenhuma* unidade de medida de segunda ordem e *uma* unidade de medida de terceira ordem. No comprimento com medida **K**, formou-se *nenhuma* unidade de medida de primeira ordem, *uma* unidade de medida de segunda ordem e *uma* unidade de medida de terceira ordem. E, no comprimento com medida **H**, formou-se *uma* unidade de medida de primeira ordem, *uma* unidade de medida de segunda e *uma* unidade de medida de terceira ordem.

Segundo Grossnickle e Brueckner (1965, p. 41), “o zero tornou possível o valor relativo em um número escrito”. Conforme a posição que um algarismo ocupa este representará um valor diferente em função da base. Por exemplo, o algarismo *um* (1), na tarefa anteriormente apresentada, para medir o segmento com medida **M**, repete-se duas vezes, 101(2). O primeiro (da direita para esquerda), representa *uma* unidade de medida de primeira ordem e o segundo algarismo um (1), representa *uma* unidade de medida de terceira ordem.

2.10 REGISTRO POSICIONAL DO NÚMERO

<u>Tarefa 23:</u> Os estudantes contarão as grandezas discretas da ilustração 59 (os botões), no sistema numérico quartenário. A unidade de medida de primeira ordem coincide com a unidade ilustrada (um botão). O resultado da contagem deverá ser registrado em linha (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012):

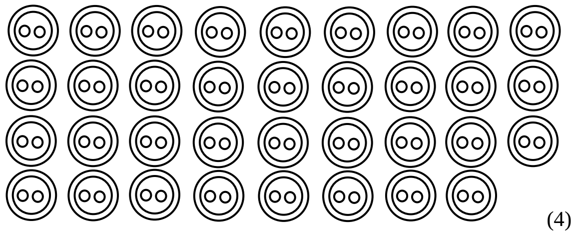
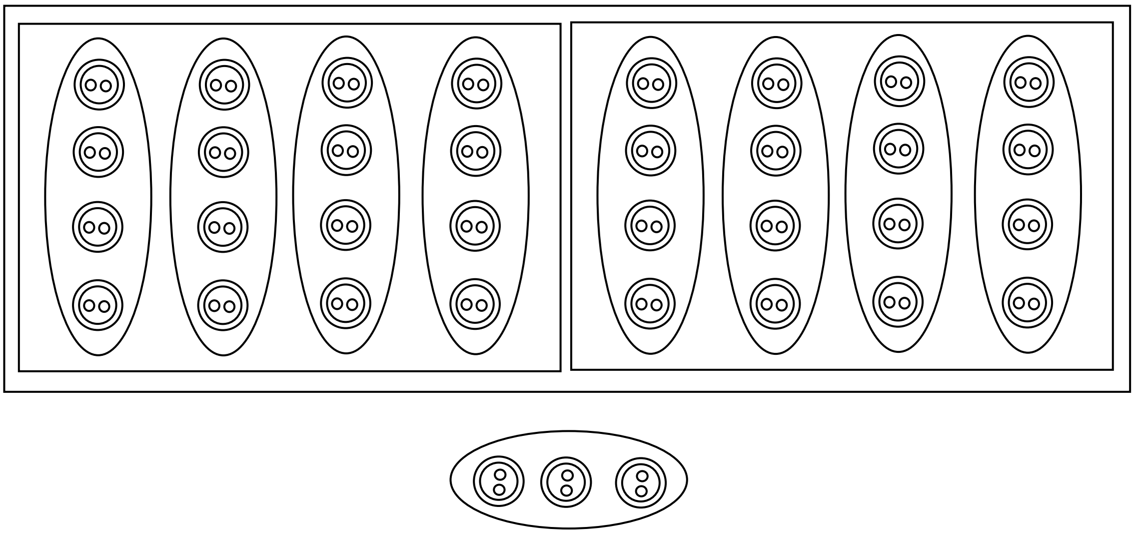


Ilustração 59: tarefa 23 - Contagem botões
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012, p. 72)

No processo de contagem (Ilustração 60), formaram-se *dois* agrupamentos de terceira ordem (quatro vezes o de segunda ordem), *nenhum* agrupamento de segunda ordem e sobraram três unidades de primeira ordem.



$203_{(4)}$

Ilustração 60: tarefa 23 - Contagem e registro botões
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

O valor da contagem foi registrado em linha, 203 $_{(4)}$. O professor deve enfatizar o fato de, todas as unidades de medida de segunda ordem estarem agrupadas em unidades de medidas de terceira ordem.

Segundo Duarte (1987), com o zero formou-se o sistema de numeração escrito e este “possibilita ao pensamento trabalhar com os números livre de qualquer limitação”. Ou seja, historicamente o zero possibilitou a humanidade trabalhar com os números independentemente do ábaco. E nas proposições davydovianas, possibilita o registro dos números fora do quadro valor de lugar.

2.11 O MÉTODO MAIS CÔMODO

Tarefa 24: Nesta tarefa os estudantes deverão medir o volume que está no recipiente (Ilustração 61). A base numérica utilizada será a quartenária, as unidades de medidas de primeira e segunda ordem estão indicadas na malha. O procedimento realizado com a água durante o processo de medição deverá ser representado no esquema (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

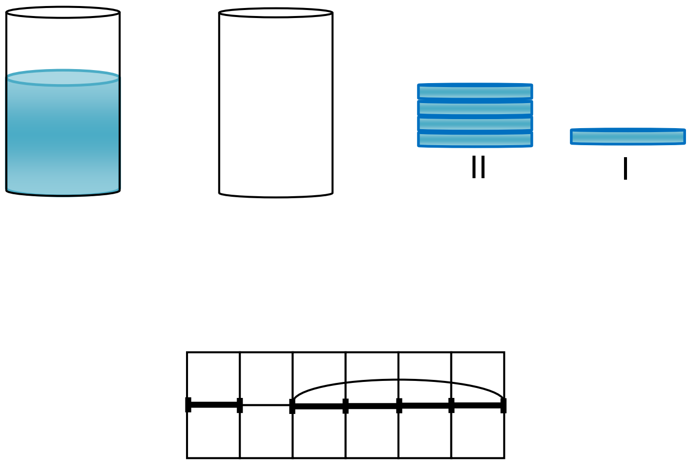


Ilustração 61: tarefa 24 - Medição volume
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

O professor questiona os estudantes: por qual unidade de medida vamos iniciar o processo de medição?

Os estudantes concluirão, com orientação do professor, que o processo se iniciará pela unidade de medida de segunda ordem, pois esta é a maior. Os estudantes representam o processo por meio do esquema (Ilustração 62). Na continuidade do processo de medição utilizam-se mais quatro unidades de medida de primeira ordem. Representa-se também no esquema (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

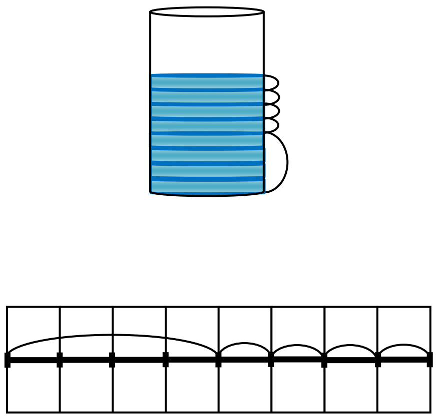


Ilustração 62: tarefa 24 - Início processo medição
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

O resultado do processo de medição (Ilustração 63) deve ser registrado no quadro valor de lugar e também fora dele (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

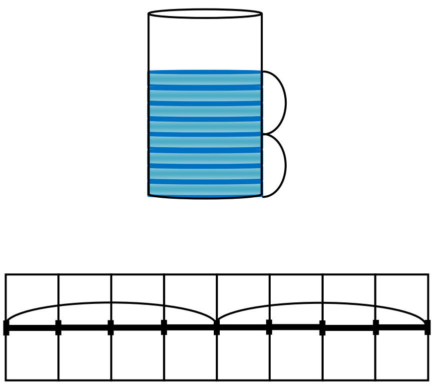
III	II	I
	1	4

(4) $14_{(4)}$

Ilustração 63: tarefa 24 - Registro no quadro valor e em linha
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Os estudantes serão questionados pelo professor: será possível medir o volume de uma forma mais rápida?

Conclui-se que sim. Pois, o volume pode ser medido de uma forma mais rápida, apenas com a unidade de medida de segunda ordem (Ilustração 64). A tarefa será desenvolvida novamente e os estudantes representarão por meio dos esquemas o processo de medição. Embora que, por meio dos dois métodos de medição foi possível medir e registrar, o segundo método é mais cômodo (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).



III	II	I
	2	

(4) $20_{(4)}$

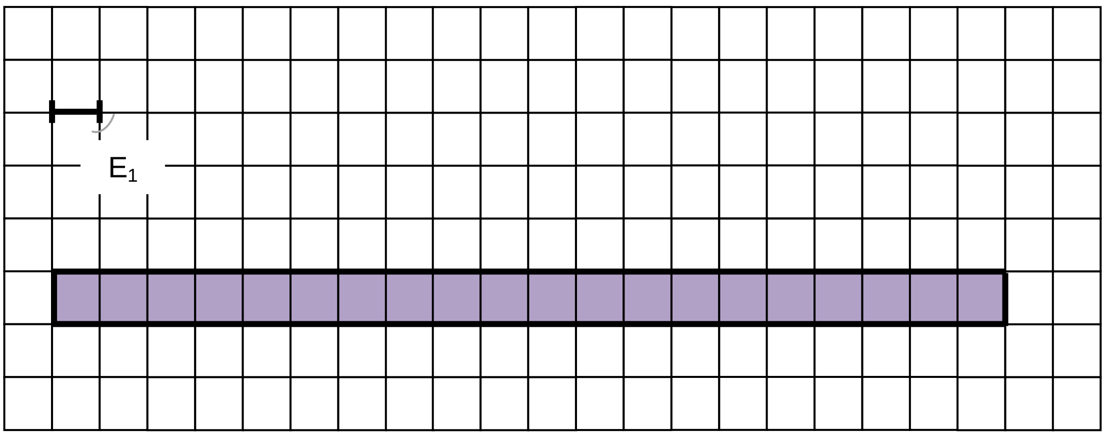
Ilustração 64: tarefa 24 - Processo medição valores reagrupados
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

O valor do segundo processo de medição realizado pelo método mais cômodo, de forma reagrupada, foi registrado (Ilustração 64) no quadro valor de lugar e fora dele: *duas* unidades de medidas de segunda ordem ($20_{(4)}$).

Segundo Grossnickle e Brueckner (1965), “os valores em um número composto de dois ou mais algarismos podem ter um *valor agrupado* ou um *valor não-agrupado*” (GROSSNICKLE e BRUECKNER, 1965, p. 44). O valor não agrupado de um algarismo “depende da transformação ou *reagrupamento*” (Ibidem). Ou seja, na tarefa em análise, o valor não agrupado do número $14_{(4)}$, é *uma* unidade de medida de segunda ordem e *quatro* unidades de medidas de primeira ordem.

Caso as unidades básicas sejam reagrupadas de acordo com a base, conforme prevê o sistema de numeração, temos $20_{(4)}$, ou seja, *duas* unidades de medidas de segunda ordem e *nenhuma* unidade de medida de primeira ordem.

<u>Tarefa 25:</u> A proposição desta tarefa consiste em analisar o valor registrado por dois estudantes, Nícolas e Tânia, no quadro valor de lugar (Ilustração 65). Ambos mediram o comprimento da largura de um mesmo retângulo, porém, o valor por eles registrado é diferente. O professor pergunta aos estudantes por que o registro foi diferente se o objeto medido foi o mesmo? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).



III	II	I
1	3	2

(3)

Nicolas

III	II	I
2		2

(3)

Tânia

Ilustração 65: tarefa 25 - Registros medição
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

Para compreender o processo de medição desenvolvido pelos estudantes, o professor sugere que a representação do processo de medição seja descrita conforme apresentaremos na sequência. Nícolas fez o seguinte procedimento: um; um, dois, três; e, um, dois. E, Tânia realizou do seguinte modo: um, dois e um, dois (Ilustração 66).

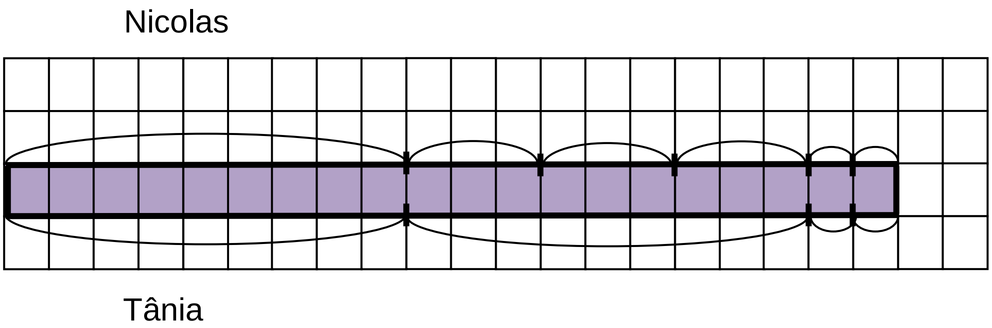


Ilustração 66: tarefa 25 - Processo medição
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Nícolas utilizou *uma* unidade de medida de terceira ordem, ***três*** unidades de medidas de segunda e *duas* unidades de medidas de primeira ordem. Porém, Nícolas desconsiderou o fato de as ***três*** unidades de medidas de segunda ordem formarem *uma* nova ordem de medida: a de terceira ordem. Foi deste modo que Tânia procedeu. Conclui-se que o método utilizado por Tânia é mais cômodo do que o método adotada por Nícolas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Grossnickle e Brueckner (1965, p. 45), afirmam que~~,~~ os professores “levam os alunos a identificar sòmente[6] o valor agrupado dos algarismos em um número”. Tal postura obstaculiza o processo de operacionalização numérica.

2.12 ALGARISMOS PARA CADA PARTICULARIDADE DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Tarefa 26: Os estudantes construirão figuras geométricas com as áreas de medidas **A** e **B** (Ilustração 67). O valor aritmético das medidas **A** e **B** estão registrados no quadro valor de lugar (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

[6] Grafia conforme o original

	III	II	I	
A	1	2	2	(3)
B		3	1	(3)

Ilustração 67: tarefa 26 - Valores das áreas A e B no quadro valor de lugar
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Para tanto, será necessário construir as unidade de medidas de primeira, segunda e terceira ordem no sistema ternário (Ilustração 68), ou seja, a unidade de medida de segunda ordem é *três* vezes a unidade de medida de primeira ordem e a unidade de medida de terceira ordem é *três* vezes a unidade de medida de segunda ordem.

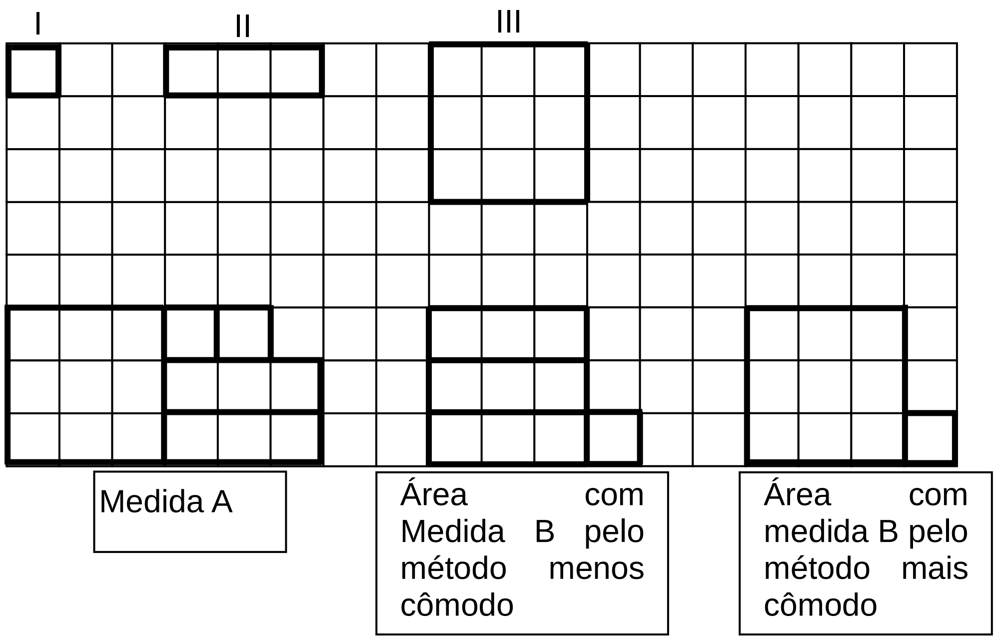


Ilustração 68: tarefa 26 - Construção das áreas com medidas A e B
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Na área com medida **A** (Ilustração 68), foi necessário utilizar uma unidade de medida de terceira ordem, duas unidades de medidas de segunda ordem e duas unidades de medidas de primeira ordem. Embora a figura de área com medida **B** possa ser construída sem que as unidades de medidas sejam reagrupadas, ou seja, foram utilizadas três unidades de medidas de segunda ordem e uma unidade de medida de primeira ordem. Este, não é o procedimento mais cômodo. Para tanto, as unidades devem ser reagrupadas, ou seja, o número 31(3) em concernência com a base será assim registrado: 101(3). Pois, *três* unidades de medidas de segunda ordem formam *uma* unidade de medida de terceira ordem e não sobra *nenhuma* unidade de medida de segunda ordem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

A proposição desta tarefa consiste em auxiliar os estudantes na compreensão de como se constitui o sistema numérico para cada base. E, sobre quais os algarismos são necessários para formar o sistema numérico binário, ternário, quinário, decimal, entre outros. Além disso, o professor deve ressaltar, durante o desenvolvimento da tarefa em análise, que o sistema ternário é composto pelos algarismos 0, 1 e 2 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Tarefa 27: Esta tarefa é semelhante à anterior, os estudantes deverão construir as figuras com área de medida **M** e com área de medida **C** (Ilustração 69). Porém, o sistema numérico utilizado será o quaternário, ou seja, a unidade de medida de segunda ordem será composta por quatro vezes a unidade de medida de primeira ordem. E, a unidade de medida de terceira ordem será quatro vezes a unidade de medida de segunda ordem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

	III	II	I	
M	1	2	3	(4)
C		1	4	(4)

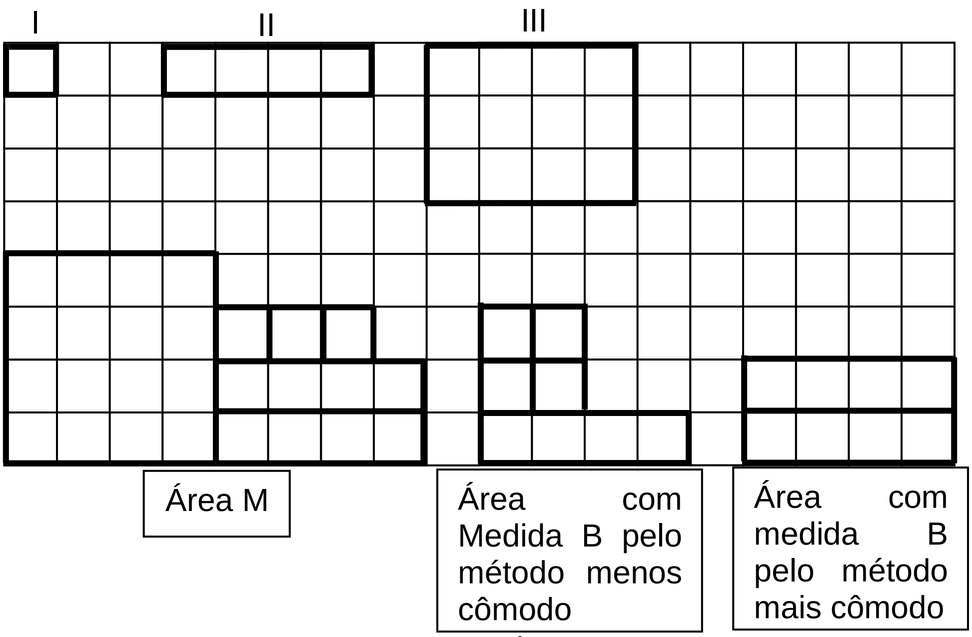


Ilustração 69: tarefa 27 - Áreas com medidas M e C
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Os algarismos do registro referente à área com medida **C** (Ilustração 69) devem ser reagrupados, ou seja, em vez $14_{(4)}$, o correto, de acordo com a base em referência, é $20_{(4)}$. A conclusão prevista na presente tarefa, consiste em que o sistema numérico quartanário é composto pelos algarismos 0, 1, 2 e 3.

Costa (1866) apresenta os algarismos que compõem alguns sistemas numéricos, tais como, binário: 0 e 1; ternário: 0, 1 e 2; quaternário: 0, 1, 2 e 3; quinário: 0, 1, 2, 3, 4; novenal: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8; entre outros. Ou seja, cada sistema numérico particular é composto sempre pelo algarismo zero (0) e contém a quantidade de algarismo igual ao valor da base numérica. Por exemplo, no sistema numérico binário, os algarismos utilizados são *dois* (0 e 1), mesma quantidade da base. No sistema "undecimal são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, e, por exemplo, $\propto$ para representar dez; os do duodecimal são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $\propto$, e, por exemplo, β para representar onze" (Costa, 1866, p. 22).

2.13 O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

<u>Tarefa 28:</u> Os estudantes contarão os quadrados (Ilustração 70) e registrarão o resultado no quadro valor de lugar e fora dele. A unidade de medida de primeira ordem é *uma* unidade (um quadrado) e a base numérica considerada é a decimal. Ou seja, os agrupamentos deverão ser compostos por dez unidades de medidas básicas. (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).

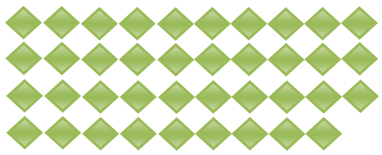
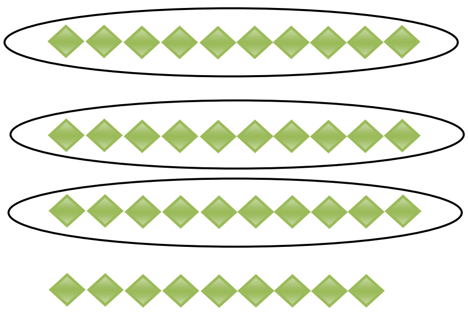


Ilustração 70: tarefa 28 - Contagem no sistema decimal
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Durante o processo de contagem (Ilustração 71) formam-se *três* unidades de medidas de segunda ordem (agrupamentos com dez unidades cada) e *nove* unidades de medidas de primeira ordem (não chegou a formar um novo grupo com dez unidades).



II	I
3	9

39

Ilustração 71: tarefa 28 - Agrupamento sistema decimal
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

O professor questiona: Quais são os algarismos que compõem o sistema numérico decimal?

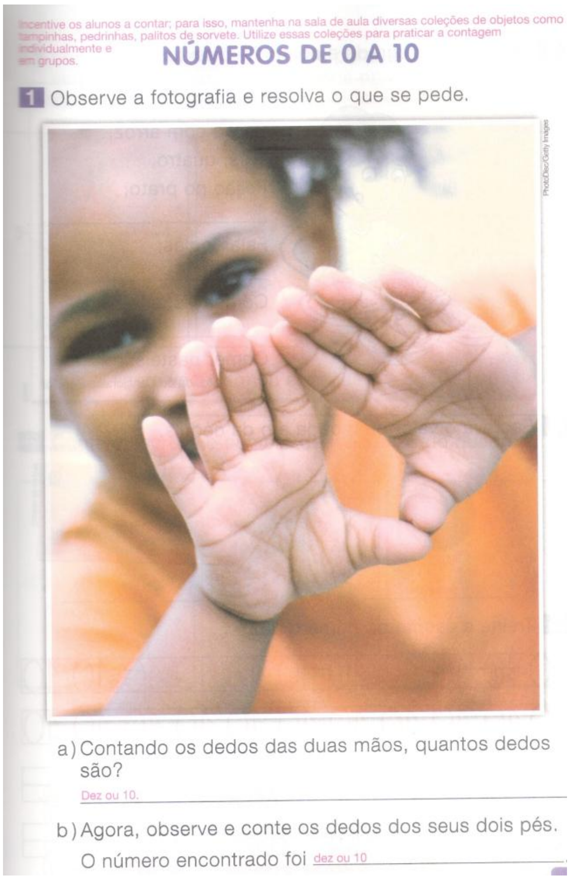
Os estudantes concluirão, com base nas tarefas desenvolvidas anteriormente e com orientação do professor, que os algarismos que compõem o sistema de numeração decimal são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, ou seja, a quantidade de algarismo do sistema em referência é a mesma quantidade da base.

No sistema numérico decimal não há necessidade de registrar ao lado do quadro valor de lugar a base numérica considerada (10). O professor informa que atualmente, esse sistema é o mais utilizado pela humanidade (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Segundo Boyer (1974), o sistema numérico mais utilizado atualmente, é o decimal, embora tenha surgido posteriormente ao binário e ternário. Tal ênfase se deve ao fato de o homem possuir dez dedos nas mãos. Como “Aristóteles observou há muito tempo, o uso difundido do sistema decimal é apenas o resultado do acidente anatômico de que quase todos nós nascemos com dez dedos nas mãos e nos pés” (BOYER, 1974, p. 3).

Historicamente, surgiram primeiramente outras bases numéricas, e a lógica que a humanidade desenvolveu serve para todos os sistemas de numeração independentemente da base. Entretanto, as proposições de ensino apresentadas nos livros didáticos brasileiros, limitam-se ao sistema numérico decimal.

A proposição ilustrada na sequência (Ilustração 72), é que os estudantes observem a fotografia de uma criança com as mãos expostas e respondam as seguintes questões: contando os dedos das duas mãos, quantos dedos são? E os dedos dos seus dois pés, quantos são?


Incentive os alunos a contar; para isso, mantenha na sala de aula diversas coleções de objetos como tampinhas, pedrinhas, palitos de sorvete. Utilize essas coleções para praticar a contagem individualmente e em grupos.

NÚMEROS DE 0 A 10

1 Observe a fotografia e resolva o que se pede.

PhotoDisc/Getty Images

a) Contando os dedos das duas mãos, quantos dedos são?

Dez ou 10.

b) Agora, observe e conte os dedos dos seus dois pés.

O número encontrado foi dez ou 10

Ilustração 72: tarefa 28 - Números de zero a dez
Fonte: MENEGHELLO e PASSOS (2008, p. 23 – segundo ano)

Ambas as respostas são dez (10). Ou seja, a gênese do sistema de numeração decimal apresentada no livro didático está diretamente relacionada à quantidade de dedos que a maioria dos seres humanos tem nas mãos ou nos pés. Porém, segundo Duarte (1987), o nosso atual sistema de numeração é decimal, “não porque o dez tenha alguma propriedade matemática especial, mas pelo fato de que temos cinco dedos em cada mão” (DUARTE, 1987, p. 56). As propriedades fundamentais do sistema de numeração decimal não estão relacionadas à quantidade de dedos, mas aos agrupamentos compostos por dez unidades cada e que cada nova ordem conterá no máximo dez vezes a anterior. Essa propriedade vale para os demais sistemas, o que varia é o valor da base numérica considerada.

Conforme já mencionamos, a base decimal não foi a primeira que surgiu historicamente, mas foi amplamente difundida pelos povos primitivos, devido à comodidade de operacionalização que esta propicia em função da coincidência com o número de dedos das mãos ou dos pés. Mas, será que os estudantes precisam passar pelas etapas que a humanidade já superou para se apropriarem de uma particularidade do sistema de numeração?

Kopnin (1978) afirma que “o pensamento não é obrigado a seguir cegamente o movimento do objeto em toda parte” (KOPNIN, 1978, p. 184). Ou seja, “o estudioso deve começar o estudo do objeto pelo fim, a partir de sua forma mais madura” (KOPNIN, 1978, p. 185).

Com base no princípio filosófico anteriormente apresentado, Davydov diz que os estudantes devem iniciar o estudo do sistema de numeração, por meio da definição das relações de multiplicidade e divisibilidade entre grandezas, no processo de medição. Os resultados desse processo “são registrados na forma de um número posicional que, dependendo do valor da relação constante entre as medidas, pode pertencer a qualquer sistema de numeração, inclusive o sistema decimal, se a relação for múltipla de dez” (DAVÍDOV, 1988, p. 210).

Tarefa 29: Os estudantes deverão medir a área com medida *k* (Ilustração 73), nos sistemas de numeração quartenário e decimal. A unidade de medida de primeira ordem (E_1), esta indicada na malha: *duas* unidades de área (ДАВЫДОВ et al, 2012).

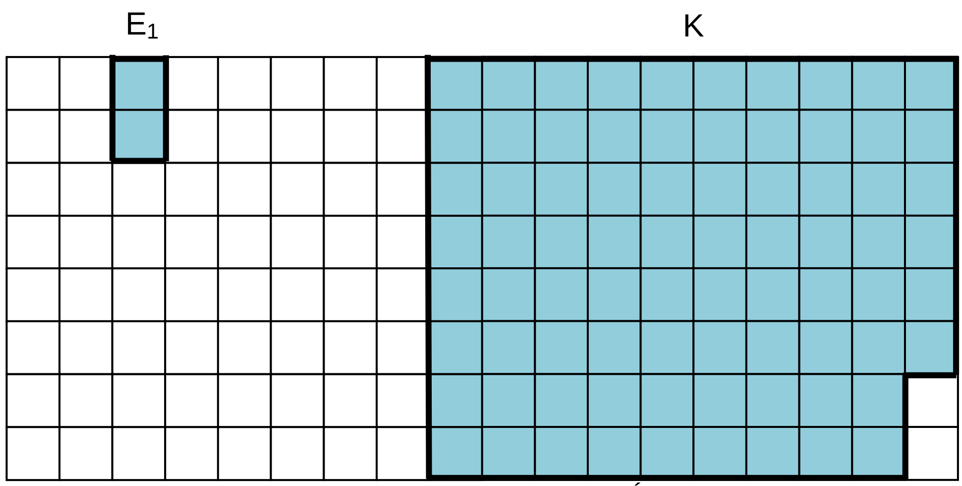
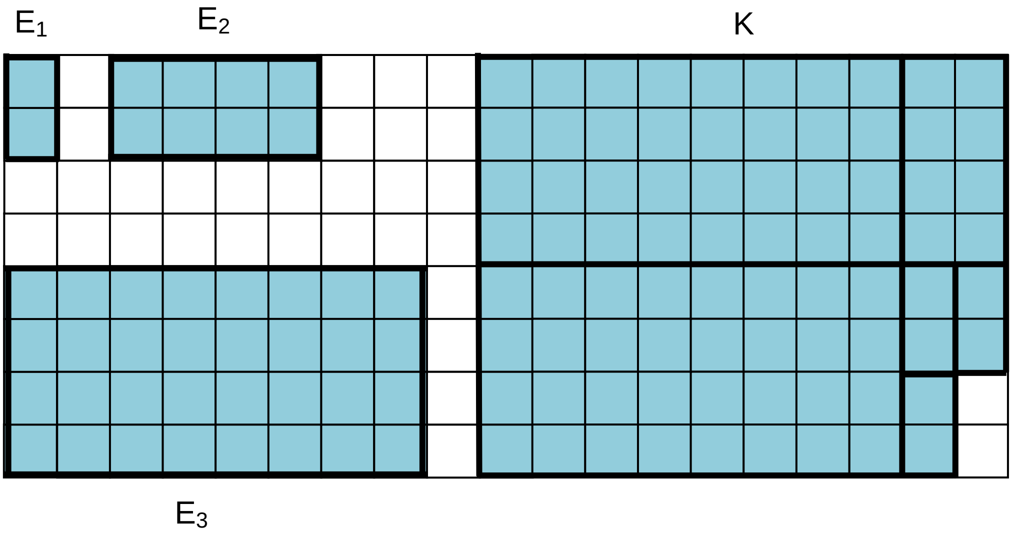


Ilustração 73: tarefa 29 - Área *K*
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

O processo de medição será iniciado com a área de medida *k*, no sistema numérico quartenário (Ilustração 74). Primeiro faz-se necessário construir a unidade de medida de segunda e terceira ordem. A unidade de medida de segunda (E_2), será composta por *quadro* vezes a unidade de medida de primeira ordem e a de terceira ordem (E_3), composta por *quatro* vezes a unidade de medida de segunda ordem, conforme ilustrado na sequência.



$$K = 213_{(4)}$$

Ilustração 74: tarefa 29 - Medição área com medida *k* na base quaternária
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

No processo de medição (Ilustração 74), foram utilizadas *duas* unidades de medidas de terceira ordem, *uma* unidade de medida de segunda ordem e *três* de primeira ordem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Ou seja, o resultado do processo foi: $213_{(4)}$ (dois, um, três na base quatro)

Para medir a área de medida **k**, no sistema de numeração decimal (Ilustração 75) faz-se necessária a construção da unidade de medida de segunda ordem (E_2). Esta é composta por dez vezes a unidade de medida de segunda ordem (vinte unidades).

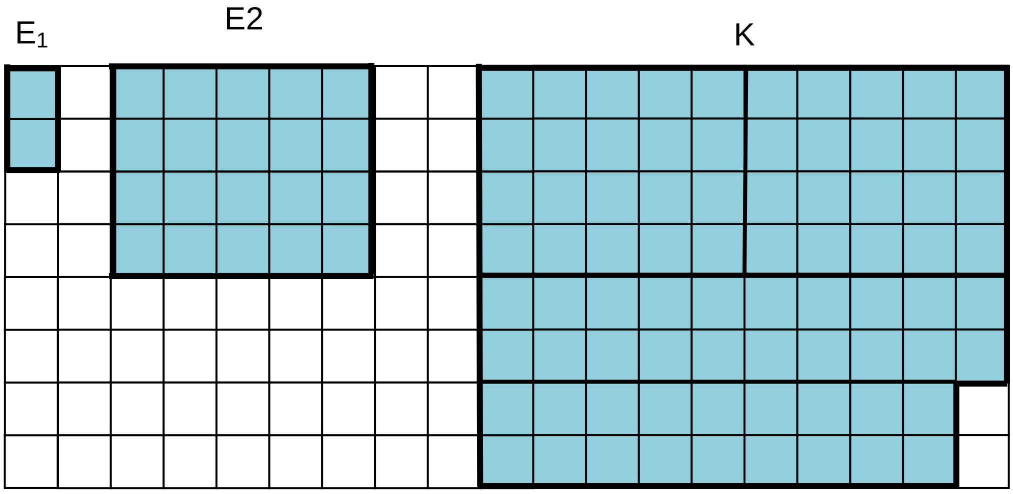


Ilustração 75: tarefa 29 - Medição área *k* base decimal
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

K = 39

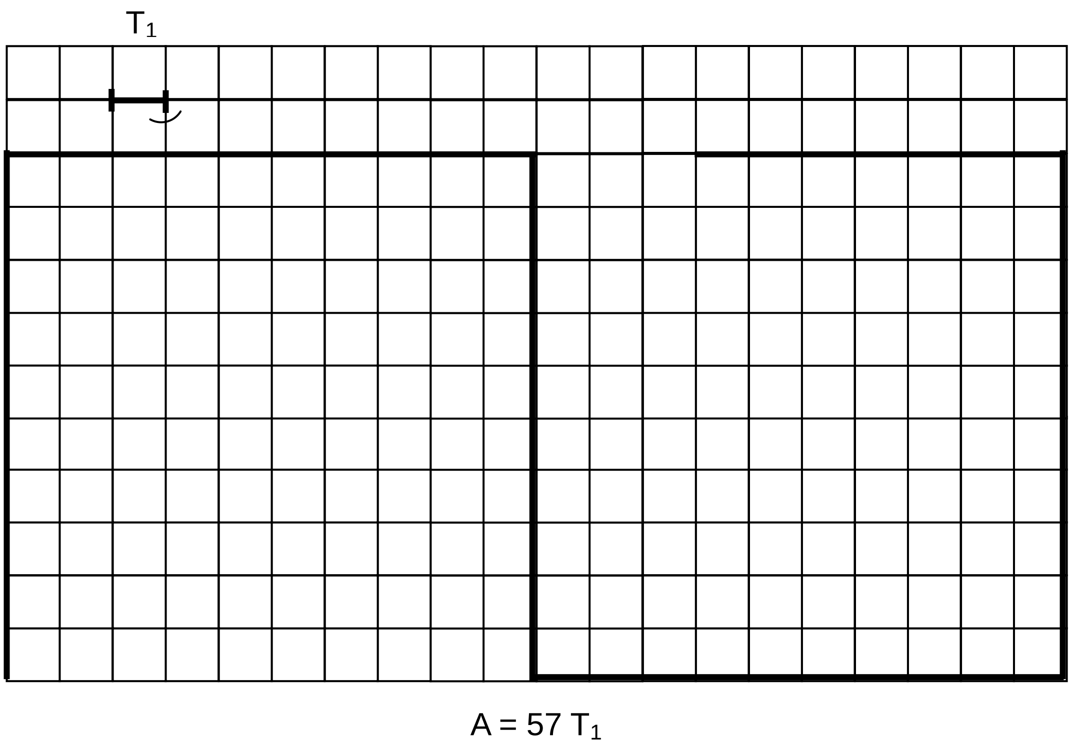
No processo de contagem (Ilustração 75), foram utilizadas *três* unidades de medida de segunda ordem e *nove* unidades de medida de primeira ordem. Registra-se o valor da contagem k = 39 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Subjacente à essência do sistema de numeração decimal está à lógica das diferentes bases numéricas, pois esta é igual para todos os sistemas de numeração particulares.

> A tomada de consciência do sistema decimal, isto é, a generalização, que redunda na sua compreensão como caso particular de qualquer sistema de cálculo, leva à possibilidade de ação arbitrária nesse e em outro sistema. O critério de tomada de consciência reside na possibilidade de passagem para qualquer outro sistema, pois isto significa generalização do sistema decimal, formação de um conceito geral sobre os sistemas de cálculo (VIGOTSKI, 2000, p. 373).

A lógica utilizada para medir a área com medida *k* foi a mesma tanto na base numérica quartenária quanto na decimal. Ambas, compõem dois diferentes sistemas numéricos particulares de um sistema de numeração mais amplo, composto pelos diversos sistemas particulares. Essa mesma lógica possibilita a medição da área com medida *k*, em qualquer sistema numérico particular. Tal possibilidade ocorre a partir do desenvolvimento das tarefas precedentes, pois tal desenvolvimento nos permitiu revelar a lógica universal de composição das diferentes bases numéricas.

Tarefa 30: A linha quebrada deverá ser medida pelos estudantes (Ilustração 76) no sistema decimal. A unidade de medida de primeira ordem (T_1), é *uma* unidade de comprimento da malha (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009;



ДАВЫДОВ et al, 2012).

Ilustração 76: tarefa 30 - Medição da linha quebrada no sistema decimal
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

Cada parte da linha quebrada (Ilustração 76) é composta por dez unidades (unidades de medida de segunda ordem) e a última parte é composta por sete unidades (unidade de medida de primeira ordem).

A conclusão prevista para essa tarefa é que a linha quebrada possui *cinco* (5) unidades de medida de segunda ordem e *sete* (7) unidades de medida de primeira ordem. Ao final, registra-se o valor numérico que resultou da contagem (57 T_1). Como o sistema numérico utilizado foi o decimal, não é necessário indicar a base numérica adotada.

Segundo Vigotski (2000), o sistema de numeração decimal é apresentado às crianças como “único”, sem a devida compreensão da lógica do mesmo. “A criança aprende a atuar no plano do sistema decimal antes de tomar consciência dele, porque ela não domina o sistema mas é tolhida por ele” (Vigotski, 2000, p. 373).

Nas proposições davydovianas o sistema decimal não é apresentado como o único. As tarefas possibilitam o trânsito entre várias bases numéricas e a generalização da lógica inerente às mesmas em um sistema único de numeração composto por vários sistemas particulares. O sistema de numeração decimal é introduzido após a lógica, do sistema de numeração em geral, ser desenvolvido. Portanto, ocorre durante o desenvolvimento das tarefas com os sistemas particulares e não a partir da análise da quantidade de dedos das mãos, ou até mesmo do trabalho com o ábaco.

2.14 A RETA NUMÉRICA

<u>Tarefa 31:</u> A proposição dessa tarefa (Ilustração 77) consiste na localização dos números, formados a partir da base quatro, da reta numérica. Os estudantes deverão completar a sequência (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).

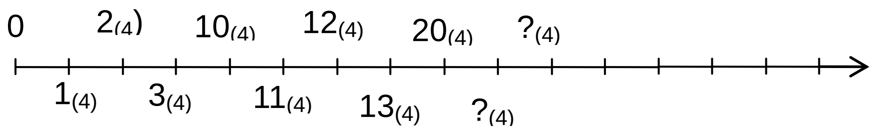


Ilustração 77: tarefa 31 - Registro algarismos na reta numérica
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012, p. 80)

Os números já registrados na reta numérica (Ilustração 77) são: zero (0), um ($1_{(4)}$), dois ($2_{(4)}$), três ($3_{(4)}$), um zero ($10_{(4)}$), um um ($11_{(4)}$), um dois ($12_{(4)}$), um três ($13_{(4)}$), dois zero ($20_{(4)}$). O professor questiona: Quais são os próximos números que deveram ser registrados na reta? A conclusão será que os próximos números (Ilustração 78) a serem registrados na reta numérica são: dois um ($21_{(4)}$), dois dois ($22_{(4)}$), dois três ($23_{(4)}$), três zero ($30_{(4)}$), etc. (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

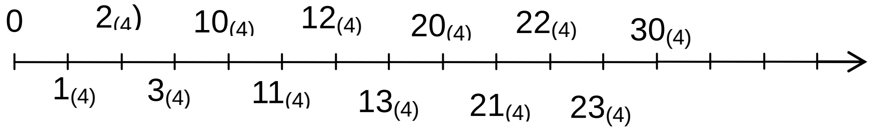


Ilustração 78: tarefa 31 - Sequência do registro na reta numérica
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

O professor questiona os estudantes sobre os algarismos que compõem o sistema numérico quartenário. Conclui-se que será: 0, 1, 2 e 3. Além disso, propõe a seguinte reflexão: Por que o algarismo quatro não aparece no registro na reta numérica? A resposta é porque quatro unidades de medidas formam *uma* unidade de medida de segunda ordem ($10_{(4)}$).

A próxima sequência de registro dos algarismos na reta numérica (Ilustração 79) é no sistema numérico quinário. (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).

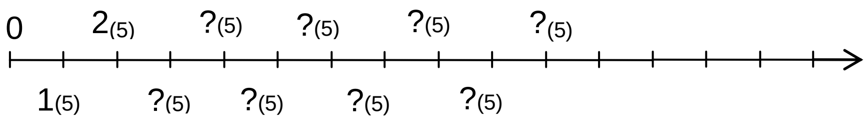


Ilustração 79: tarefa 31 - Registro algarismos na reta numérica
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012, p. 80)

Os números registrados na reta numérica (Ilustração 80) foram: zero (0), um ($1_{(5)}$), dois ($2_{(5)}$).

Os estudantes completarão a reta numérica com os números: três ($3_{(5)}$), quatro ($4_{(5)}$), um zero ($10_{(5)}$), um um ($11_{(5)}$), um dois ($12_{(5)}$), um três ($13_{(5)}$), um quatro ($14_{(5)}$), dois zero ($20_{(5)}$) , etc... (Ilustração 80).

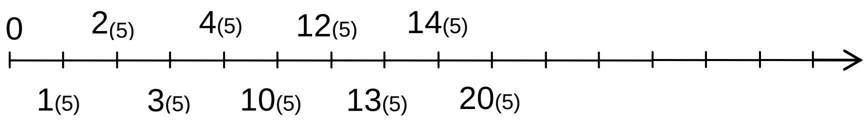


Ilustração 80: tarefa 31 - Registro na reta
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Na sequência procede-se a seguinte reflexão: Quais algarismos serão utilizados no sistema quinário? Conclui-se que o sistema quinário (Ilustração 80) é composto pelos algarismos por cinco algarismos: 0, 1, 2, 3 e 4. O algarismo *cinco* não é incluído, pois, a partir de cinco unidades de medidas, forma-se *uma* nova unidade de medida.

Na sequência, por meio de alguns registros que estão indicados na reta numérica (Ilustração 81), os estudantes deverão determinar a base numérica considerada e registrar os números desconhecidos (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e

САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).

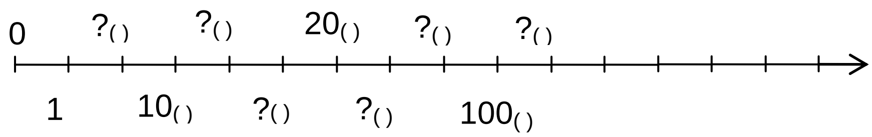


Ilustração 81: tarefa 31 - Determinar a base numérica
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012, p. 80)

Os estudantes concluirão, a partir da análise do registro $10_{(\ )}$ e sua localização na reta (Ilustração 81), que a base numérica considerada foi a ternária. A partir de então, é possível registrar na reta numérica os demais números (Ilustração 82): zero (0); um ($1_{(3)}$), dois ($2_{(3)}$), um zero ($10_{(3)}$), um um ($11_{(3)}$), um dois($12_{(3)}$), dois zero ($20_{(3)}$), dois um ($21_{(3)}$), dois dois ($22_{(3)}$), um zero zero ($100_{(3)}$), um zero um ($101_{(3)}$) etc... (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

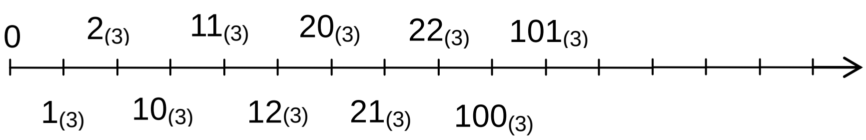


Ilustração 82: tarefa 31 - Registro na reta na base ternária
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Conclui-se que os algarismos que compõem o sistema ternário (Ilustração 82), são: 0, 1 e 2. O algarismo *três*, não é considerado no referido sistema porque a partir de um agrupamento composto por três unidades, forma-se uma nova unidade de medida.

Nas proposições davydovianas, a localização dos números formados a partir de diferentes bases, na reta numérica pressupõe a compreensão prévia da lógica interna do sistema de numeração desenvolvida a partir da ação objetal nas tarefas precedentes. Ou seja, trata-se do concreto pensado referente ao sistema de numeração.

> Na ascensão do abstrato ao concreto verifica-se não simplesmente um processo de totalização, de urdidura de uma abstração após outra, mas uma síntese de abstrações que corresponde às relações internas, às relações no objeto (KOPNIN, 1978, p.163).
>
> A ascensão do abstrato ao concreto é um movimento para o qual todo início é abstrato e cuja dialética consiste na superação desta abstratividade. O progresso da abstratividade à concreticidade é, por conseguinte, em geral

> movimento da parte para o todo e do todo para a parte (KOSIK, 1978, p. 30).

As situações apresentadas na tarefa em análise (tarefa 31) sintetizam as abstrações correspondentes às relações internas do sistema de numeração, reveladas nas tarefas anteriores, por meio de ações objetais, relacionadas a agrupamentos de medidas de grandezas organizadas em diferentes ordens. Ao revelarmos o modelo universal do sistema de numeração procedemos ao movimento de redução das representações caóticas das relações entre grandezas ao abstrato. O movimento conseguinte, do modelo universal até a presente tarefa consistiu no movimento de ascensão do abstrato ao concreto. Ambos os movimentos, de redução e ascensão, não ocorreram orientados em uma sequência linear, mas, marcado por idas e vindas, ou seja, esse movimento ocorre dialeticamente.

Tarefa 34: Os estudantes deverão dar continuidade em cada sequência numérica (Ilustração 83), porém fora da reta numérica, em linha (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

1	2	3	4	5	$10_{(6)}$	$11_{(6)}$	$?_{(6)}$	$?_{(6)}$	$?_{(6)}$
1	2	3	4	5	$?_{(7)}$	$?_{(7)}$	$?_{(7)}$	$?_{(7)}$	$?_{(7)}$
1	2	3	4	5	...				

Ilustração 83: tarefa 34 - Completar a sequência dos números fora da reta
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012, p. 80)

Para tanto, faz-se necessário considerar a base numérica de cada sequência (Ilustração 84). Na primeira linha a base numérica é seis (6), na segunda linha, a base é sete (7) e na terceira linha a base numérica é dez (10).

1	2	3	4	5	$10_{(6)}$	$11_{(6)}$	$12_{(6)}$	$13_{(6)}$	$14_{(6)}$
1	2	3	4	5	$6_{(7)}$	$10_{(7)}$	$11_{(7)}$	$12_{(7)}$	$13_{(7)}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Ilustração 84: tarefa 34 - Registro dos números sem a reta numérica
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

O professor explica que os números, no sistema decimal, são denominados do seguinte modo: um (1), dois (2), três (3), quatro (4), cinco (5), seis (6), sete (7), oito (8), nove (9), dez (10), onze (11) etc...

Segundo Costa (1866), “o número de sinais, figura ou algarismos diferentes, de cada sistema de numeração denomina-se base do sistema” (COSTA, 1866, p. 18). Assim, na primeira linha a base considera era seis e a quantidade de algarismos era, também, seis: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

2.15 ORDENS DE MEDIDAS NO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Tarefa 35: As unidades de medidas de primeira, segunda, terceira e quarta ordem, foram construídas no sistema de numeração decimal (Ilustração 85). O professor pergunta aos estudantes: quantas vezes a unidade de medida de primeira ordem (E_1) cabe em uma unidade de medida de segunda ordem (E_2)? Quantas vezes a unidade de medida de segunda ordem (E_2) cabe na unidade de medida de terceira ordem (E_3)? E, quantas vezes a unidade de medida de terceira ordem (E_3) cabe na unidade de medida de quarta ordem (E_4)? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).

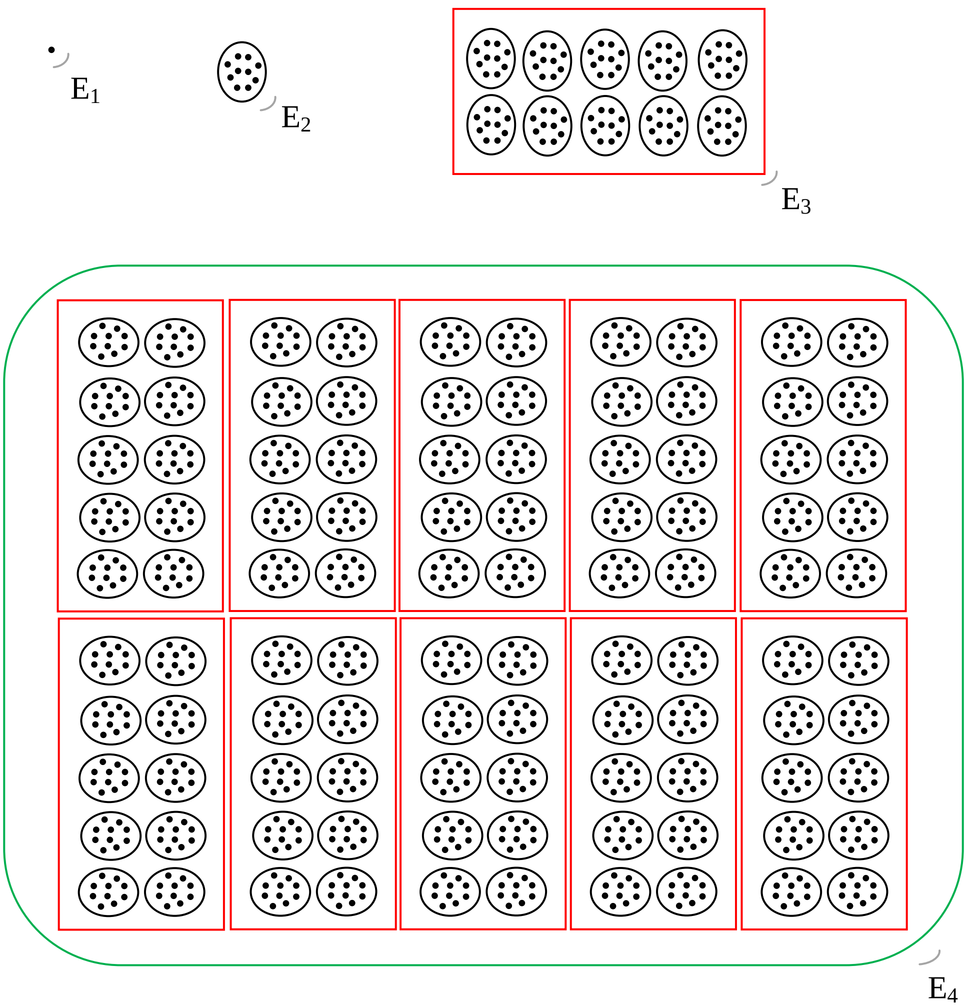


Ilustração 85: tarefa 35 - Unidades de medidas sistema decimal
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012, p. 82)

Os estudantes analisam a ilustração 85, e constatam que a unidade de medida de primeira ordem (E_1) cabe *dez* vezes na unidade de medida de segunda (E_2). A unidade de medida de segunda ordem (E_2) cabe *dez* vezes na unidade de medida de terceira ordem (E_3). E, a unidade de medida de terceira ordem (E_3) cabe *dez* vezes na unidade de medida de quarta (E_4) ordem. Portanto, concluem que a unidade de medida de uma ordem inferior cabe *dez vezes* na próxima ordem superior.

O professor chama a atenção dos estudantes para o fato de que, a unidade de medida de terceira ordem, foi contornada pela forma retangular, com a cor vermelha, e a de quarta ordem, com a cor verde. As unidades de medidas de segunda ordem são chamadas de dezenas, a de terceira ordem de centenas e quarta ordem de milhares.

O ponto representa a unidade (unidades de medidas de primeira ordem), as 10 unidades circuladas representam a dezena (unidades de medidas de segunda ordem), àquelas contornadas pelo retângulo, a centena (unidades de medidas de terceira ordem) e o contorno maior compõe um agrupamento com uma de milhar (unidades de medidas de quarta ordem), etc (ГОРБОВ, МИКУЛИНА е САВЕЛЬЕВА, 2009).

A ilustração 86, na sequência foi extraída de um dos livros referendados nesta pesquisa, sobre as proposições tradicionais de ensino. Este propõe que os estudantes "descubram" a quantidade de mudas que contém cada caixa. Os estudantes deverão registrar a quantidade em unidades e também em dezenas.

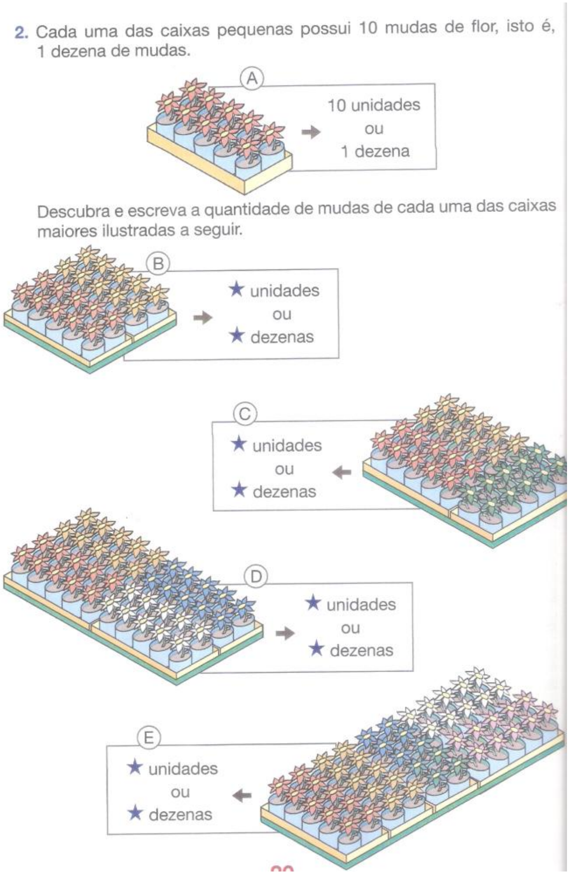


Ilustração 86: tarefa 35 - Estudo quantidade de dezenas
Fonte: LOYOLA, ISHIKAWA, SASSÁ apud MENEGHELLO, PASSOS, et al (2005, p. 20 – segundo ano)

Cada unidade de medida é representada por uma grandeza discreta, ou seja, por uma muda de flor. No processo de contagem os resultados seriam; vinte (20) unidades ou duas (2) dezenas; trinta (30) unidades ou três (3) dezenas; quarenta

(40) unidades ou quatro (4) dezenas, etc... Ou seja, são apresentadas algumas dezenas (unidades de medidas de segunda ordem).

Após um intervalo de cinco páginas (Ilustração 87) apresenta-se aos estudantes o número (100) cem, por meio de dinheiro: notas com valores de *dez* reais. Os estudantes deverão verificar qual a quantia em reais que Pedro e Leila possuem.

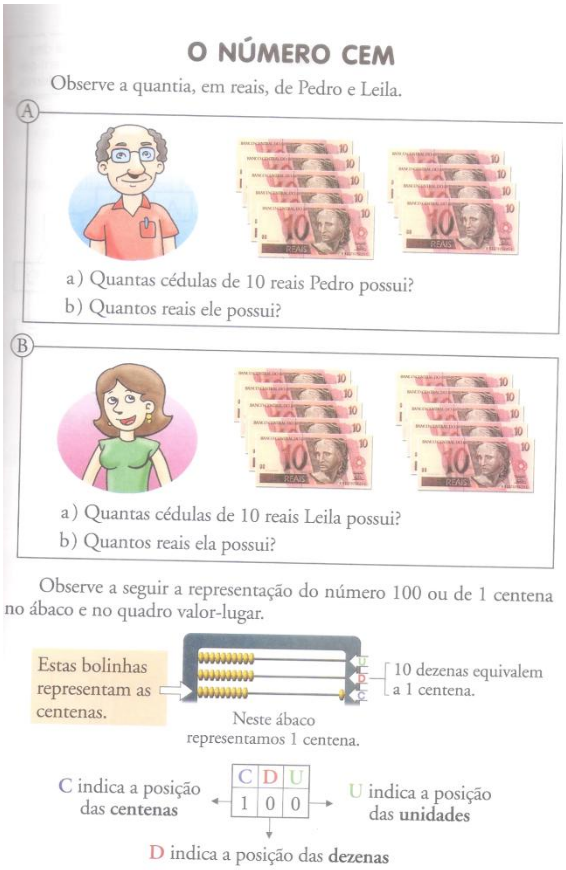


Ilustração 87: tarefa 35 - Estudo das centenas
Fonte: LOYOLA, ISHIKAWA, SASSÁ apud MENEGHELLO, PASSOS, et al (2005, p. 27 – segundo ano)

A constatação será que Pedro possui nove notas de dez reais, portanto noventa reais (Ilustração 87). E Leila possui dez notas de dez reais, ou seja, cem reais.

Como já mencionamos no decorrer desta monografia, o ábaco ainda é utilizado nas proposições de ensino tradicionais conforme evidencia a ilustração 87. Nesta, a representação de dez dezenas equivalem a uma centena.

Só após um intervalo de nove páginas é que o livro didático em análise apresenta o número mil (Ilustração 88), ou seja, a quarta ordem do sistema de numeração decimal. Tal representação ocorre por meio de caixas de palitos de dentes, com cem palitos cada caixa. Os estudantes deverão observar quantas caixas de palitos na primeira e segunda situação (a e b).

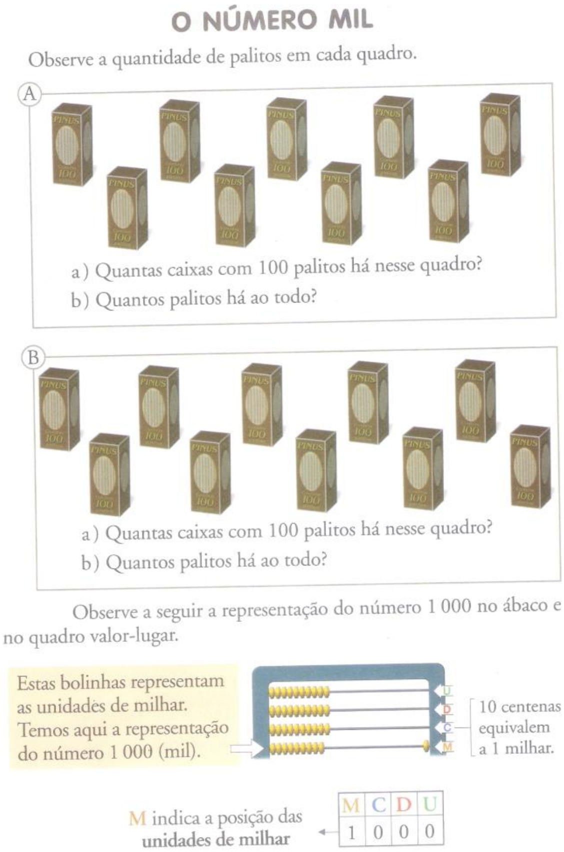


Ilustração 88: tarefa 35 - Introdução do número mil
Fonte: LOYOLA, ISHIKAWA, SASSÁ apud MENEGHELLO, PASSOS, et al (2005, p. 36 – segundo ano)

Os estudantes deverão perceber que na primeira situação há nove caixas, portanto novecentos palitos e na segunda situação dez caixa, ou seja, mil palitos. Mais abaixo, o número mil é representado no ábaco com explicitação da seguinte equivalência: dez centenas equivalem a uma unidade de milhar e sua posição no quadro valor de lugar.

No ensino tradicional, as diferentes ordens do sistema de numeração decimal, são apresentadas de forma fragmentada, sem interconexão entre elas. Ou seja, fundamenta-se na lógica formal. Uma lógica, “sem movimento, como elementos estáticos” (OLIVEIRA, 2001, p. 14).

De outro modo, nas proposições davydovianas, as unidades de medidas foram representadas até a quarta ordem em uma mesma tarefa, ou seja, cada ordem de medida é revelada na sua inter-relação com as demais ordens. Ou seja, as diferentes ordens de medidas são apresentadas a partir do movimento proposto pela lógica dialética, já apresentada anteriormente.

Tarefa 36: A tarefa 36 é realizada com base na análise do desenvolvimento da tarefa anterior. Os questionamentos norteadores são: em qual ordem de medida podemos encontrar *três* unidades? E *quatro* dezenas? E *duas* centenas? E *dois* mil?

Os estudantes, sob orientação do professor, concluirão que, *três* unidades (de primeira ordem) podem ser encontradas na unidade de medida de segunda ordem (dezena), na de terceira (centena) e na de quarta (milhar). Quatro dezenas podem ser encontradas na unidade de medida de terceira ordem (centena) e na de quarta ordem (milhar). Duas centenas podem ser encontradas apenas na unidade de medida de quarta ordem (milhares). E, dois mil podem ser encontrados na unidade de medida de quinta ordem, porém na ilustração da tarefa anterior está representado somente até a unidade de medida de quarta ordem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Ou seja, não se pode encontrar *dois* mil na representação de uma unidade de milhar (1.000).

O princípio fundamental do sistema de numeração consiste, segundo Costa (1866), que um algarismo a esquerda de outro algarismo, representa uma ordem de medida superior. As unidades de medidas de segunda ordem podem ser encontradas nas unidades de medida de terceira, quarta ... porém nunca na unidade de medida de primeira ordem.

Tarefa 37: Nessa tarefa (Ilustração 89) os números estão registrados em bases numéricas diferentes. Os estudantes completarão cada sequência numérica de acordo com a base numérica indicada (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).

$10_{(5)}$	$11_{(5)}$	$?_{(5)}$	$?_{(5)}$	$?_{(5)}$	$?_{(5)}$	$?_{(5)}$
$32_{(5)}$	$33_{(5)}$	$34_{(5)}$	$?_{(5)}$	$?_{(5)}$	$?_{(5)}$	$?_{(5)}$
34	35	36	...			

Ilustração 89: tarefa 37 - Completar sequência numérica
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012)

Na primeira e segunda linha (Ilustração 90) os estudantes completarão a sequência dos números na base numérica quinária e na terceira linha no sistema numérico decimal (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

$10_{(5)}$	$11_{(5)}$	$12_{(5)}$	$13_{(5)}$	$14_{(5)}$	$20_{(5)}$	$21_{(5)}$
$32_{(5)}$	$33_{(5)}$	$34_{(5)}$	$40_{(5)}$	$41_{(5)}$	$42_{(5)}$	$43_{(5)}$
34	35	36	37	38	39	40

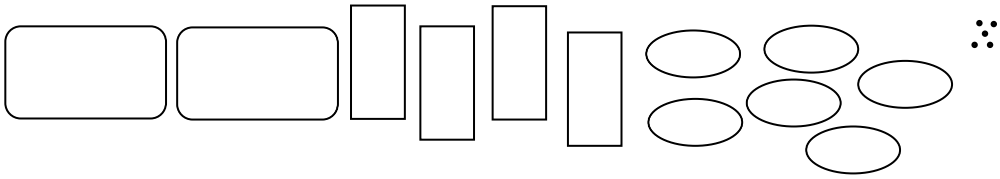
Ilustração 90: tarefa 37 - Sequência numérica completa
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Os estudantes concluirão que para completar a primeira linha (Ilustração 90) os algarismos utilizados foram: um dois, um três, um quatro, dois zero e dois um. Na segunda linha: quatro zero, quatro um, quatro dois e quatro três. E, na terceira linha o sistema numérico utilizado foi o decimal. Esse sistema já é conhecido pelos estudantes que poderão citá-los do modo conhecido por eles. O professor orientará os estudantes a denominá-los conforme a composição das ordens de medidas. O número três sete é denominado por três dezenas e sete unidades; três oito, por três dezenas e oito unidades; três nove, por três dezenas e nove unidades; e, quatro zero, por quatro dezenas e zero unidade.

Segundo Costa (1866) quando um algarismo é colocado à esquerda de outro algarismo, no sistema de numeração decimal, este indica uma coleção de unidades dez vezes maior. Pois, cada unidade de segunda ordem é dez vezes a unidade de primeira ordem.

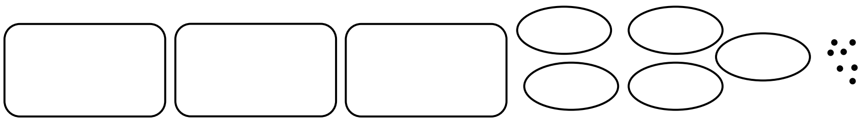
Tarefa 38: Os estudantes deverão registrar no quadro valor de lugar, os valores das medidas **A**, **B** e **C**, (Ilustração 91) que estão representados em forma genérica. Cada representação refere-se a uma ordem de medida diferente. O *ponto* representa as unidades (unidade de medida de primeira ordem), a *elipse* a dezena (unidade de medida de segunda ordem), o *retângulo* a centena (unidade de medida de terceira ordem) e a figura maior a unidade de milhar (unidade de medida de quarta ordem). O sistema numérico é decimal. A proposição de registrar no quadro valor de lugar envolve a relação do nome das ordens de medidas na composição numérica (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).

A



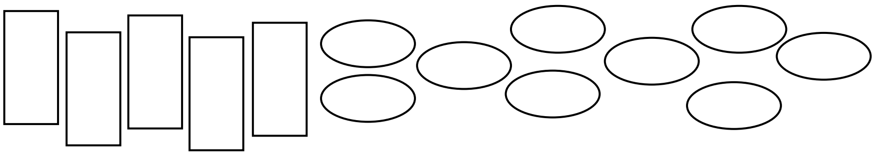
	IV	III	II	I
A	2	4	6	5

B



	IV	III	II	I
B	3		5	7

C



	IV	III	II	I
C		5	9	

Ilustração 91: tarefa 38 - Registro do número no quadro
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

A medida **A** é composta por duas figuras maiores, quatro retângulos, seis elipses e cinco pontos (Ilustração 91). Registra-se no quadro valor de lugar *duas* (2) unidades de medidas de quarta ordem, *quatro* (4) unidade de medidas de terceira ordem, *seis* (6) unidades de medidas de segunda ordem e *cinco* (5) unidades de medidas de primeira ordem. Ao realizar o registro o professor orienta os estudantes a falarem os nomes das ordens de medidas no sistema decimal e a respectiva quantidade que estas representam. Ou seja, a composição de cada número, no exemplo em análise (2.465) são duas (2) milhares, quatro (4) centenas, seis (6) dezenas e cinco (5) unidades.

A medida **B**, é composta por três (3) figuras maiores, nenhum (0) retângulo, cinco (5) elipses e sete (7) pontos, registram-se no quadro valor de lugar: *três* (3) unidades de medida de quarta ordem, *nenhuma* (0) unidade de medida de terceira ordem (não há necessidade de registrar o algarismo zero no quadro valor, pois, o espaço vazio do quadro, indica que a aquela ordem de medida não tem unidades), *cinco* (5) unidades de medidas de segunda ordem e *sete* (7) unidades de medidas de primeira ordem, Ou seja, 3.057 três (3) unidades de milhar, zero (0) centena, cinco (5) dezenas e sete (7) unidades.

A unidade **C** é composta por nenhuma (0) figura maior, cinco (5) retângulos, nove (9) elipses e nenhum (0) ponto. Registram-se: *cinco* (5) unidades de medidas de terceira ordem, *nove* (9) unidades de medida de segunda ordem e zero (0) unidade de medida de primeira ordem. Ou seja, 590 cinco (5) centenas, nove (9) dezenas e zero (0) unidade.

No ensino tradicional, inicialmente a quantidade é representada por objetos discretos (Ilustração 92), ou seja, *vinte* dezenas (duas unidades de medidas de segunda ordem) ou *duas* centenas (duas unidades de medidas de terceira ordem) são representas por duzentos objetos.

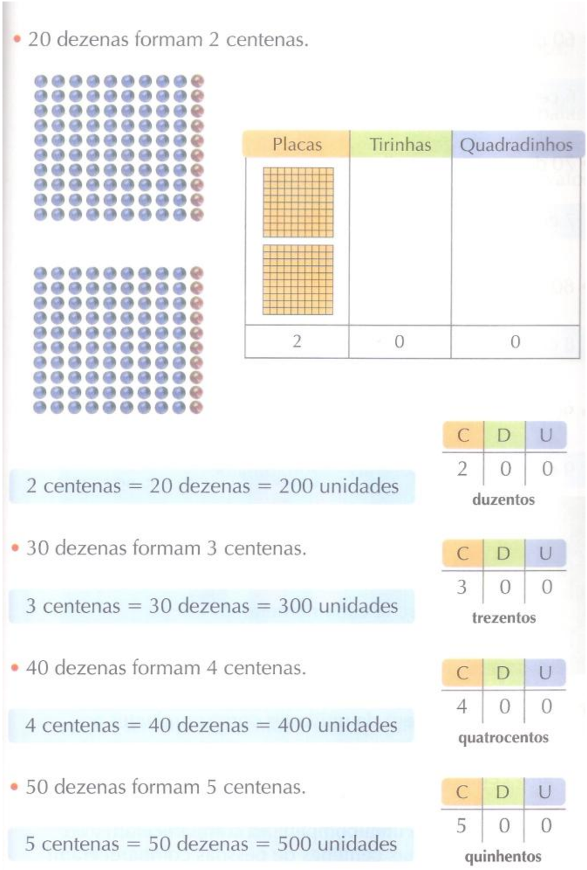


Ilustração 92: tarefa 38 - Composição das centenas
Fonte: BONJORNO e BONJORNO (2001, p. 63 – segundo ano)

Na sequência, na mesma página do livro didático em análise (Ilustração 92), são apresentadas algumas centenas (unidades de medida de terceira ordem), e seu registro no quadro valor de lugar. Tal proposição ocorre apenas no contexto das significações aritméticas. Todas são desenvolvidas da mesma forma, muda apenas a aparência externa em função da quantidade que representa.

2.16 COMPOSIÇÃO NUMÉRICA

Tarefa 39: Para desenvolver essa tarefa (Ilustração 93) um estudante registra no quadro valor de lugar e fora dele, os números que o professor irá ditar (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).

3 milhares, 1 centena, 2 dezenas e 5 unidades;
5 centenas, 4 dezenas e 8 unidades;
4 milhares, 2 dezenas e 3 unidades;
9 centenas e 4 dezenas;
5 milhares e 3 dezenas;
3 centenas;
7 dezenas;
8 milhares;

IV	III	II	I

Ilustração 93: tarefa 39 - Registro no quadro valor de lugar
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Para registrar os números, no quadro valor de lugar (Ilustração 94), os estudantes deverão saber relacionar os nomes das diferentes ordens de medidas no sistema numérico decimal e sua localização no quadro.

3 milhares, 1 centena, 2 dezenas e 5 unidades;
5 centenas, 4 dezenas e 8 unidades;
4 milhares, 2 dezenas e 3 unidades;
9 centenas e 4 dezenas;
5 milhares e 3 dezenas;
3 centenas;
7 dezenas;
8 milhares;

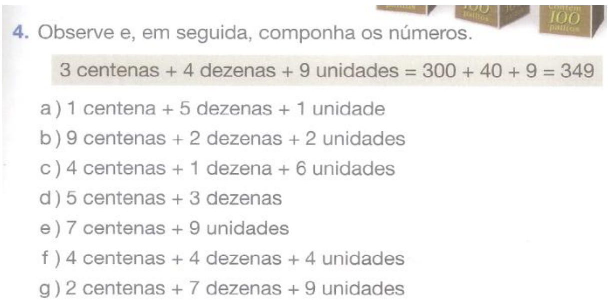
IV	III	II	I	
3	1	2	5	3125
	5	4	8	548
4		2	3	4023
	9	4		940
5		3		5030
	3			300
		7		70
8				8000

Ilustração 94: tarefa 39 - Registro no quadro e fora
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

O registro fora do quadro valor de lugar (Ilustração 94), requer a compreensão da composição dos números. Por exemplo, no número 300, o algarismo três (3), registrado na terceira ordem do quadro é composto por três (3) centenas, o zero (0) dezena e zero (0) unidade.

Mas, por que o algarismo zero não foi utilizado no quadro valor de lugar? Vale lembrar que o espaço vazio de uma determinada ordem, no quadro, indica que aquela ordem não foi utilizada. O registro fora do quadro requer um algarismo que represente este espaço vazio. Em síntese, o zero no quadro valor de lugar é um excesso, porém fora do quadro valor é indispensável, pois, este no registro escrito, indica a posição de cada algarismo, para compor o número.

A ilustração 96 foi extraída de um dos livros didáticos brasileiros aqui analisados. Este apresenta uma "atividade"[7] (Ilustração 95) na qual os estudantes deverão observar o exemplo de uma situação e a partir deste resolver as demais.


4. Observe e, em seguida, componha os números.

3 centenas + 4 dezenas + 9 unidades = 300 + 40 + 9 = 349

a) 1 centena + 5 dezenas + 1 unidade
b) 9 centenas + 2 dezenas + 2 unidades
c) 4 centenas + 1 dezena + 6 unidades
d) 5 centenas + 3 dezenas
e) 7 centenas + 9 unidades
f) 4 centenas + 4 dezenas + 4 unidades
g) 2 centenas + 7 dezenas + 9 unidades

Ilustração 95: tarefa 39 - Composição dos números
Fonte: LOYOLA, ISHIKAWA, SASSÁ apud MENEGHELLO, PASSOS, et al (2005, p. 33 – segundo ano)

Esta "atividade" (Ilustração 95) está direcionada à composição dos números. Porém, o exemplo dado reduz o processo complexo de composição numérica a uma forma mecânica de junção dos números.

Nas proposições davydovianas, a tarefa relacionada ao registro dos números no quadro valor de lugar e fora dele, concomitantemente, exige a reflexão sobre a relação interna que origina a composição numérica.

Vale ressaltar, também, o fato de que, no ensino tradicional as proposições para a composição dos números contemplam apenas até a terceira ordem (centena), enquanto que, algumas tarefas davydovianas para serem desenvolvidas no segundo ano do Ensino Fundamental, contemplam até quarta ordem.

Tarefa 40: Os estudantes devem localizar na reta numérica (Ilustração 96), os

[7] Denominamos por "atividade" aquelas situações de ensino extraídas dos livros didáticos brasileiros, conforme comumente adotada no contexto educacional brasileiro.

números na base quinária. Estes estão apresentados na seguinte ordem: um zero, dois zero, um dois, dois dois e seis (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).

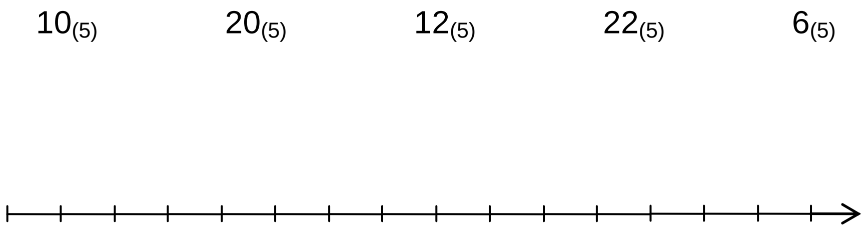


Ilustração 96: tarefa 40 - Registrar na reta numérica
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Vale observar que os números não estão organizados na sequência crescente ou decrescente (Ilustração 97). O último número da sequência dada é o algarismo seis (6). Contudo, será possível registrá-lo se o sistema numérico considerado é o quinário? No sistema quinário o algarismo seis (6), indica que se tem uma vez a unidade de medida da base (uma unidade de medida de segunda ordem) e mais uma unidade (uma unidade de medida de primeira ordem). Portanto, o algarismo seis (6), no sistema quinário reagrupado será $11_{(5)}$. Esse será o número registrado na reta numérica (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

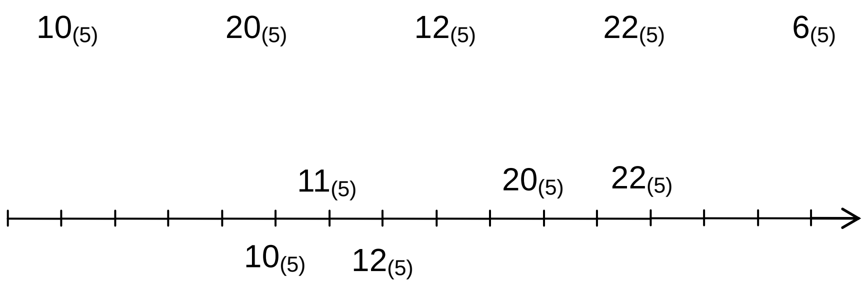
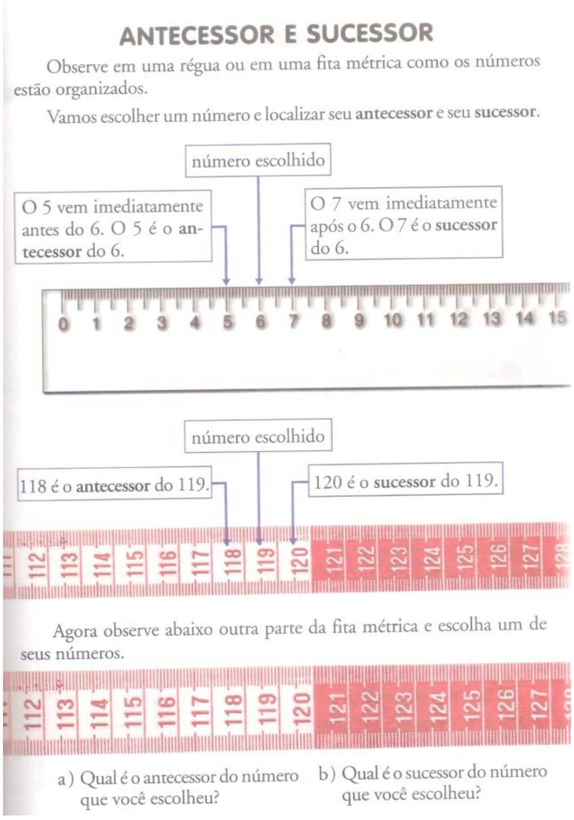


Ilustração 97: tarefa 40 - Registro na reta numérica
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Em um dos livros didáticos brasileiros referenciados na presente pesquisa, a sequência numérica é abordada no contexto da régua e da fita métrica a partir da ideia de antecessor e sucessor (Ilustração 98).



ANTECESSOR E SUCESSOR

Observe em uma régua ou em uma fita métrica como os números estão organizados.

Vamos escolher um número e localizar seu **antecessor** e seu **sucessor**.

Agora observe abaixo outra parte da fita métrica e escolha um de seus números.

a) Qual é o antecessor do número que você escolheu?

b) Qual é o sucessor do número que você escolheu?

Ilustração 98: tarefa 40 - Antecessor e sucessor
Fonte: LOYOLA, ISHIKAWA, SASSÁ apud MENEGHELLO, PASSOS, et al (2005, p. 31 – segundo ano)

Na ilustração anterior (98), o algarismo cinco (5) está localizado *antes* do algarismo seis (6), portanto, o algarismo cinco (5) é o antecessor do algarismo seis (6). E, o algarismo sete (7) está localizado *depois* do algarismo seis (6), desse modo, o algarismo sete (7) e o sucessor do algarismo seis (6).

<u>**Tarefa 41:**</u> Os estudantes deverão completar as sequências numéricas (Ilustração 99). Na primeira sequência o sistema numérico é o quartenário, na segunda e terceira o decimal (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009; ДАВЫДОВ et al, 2012).

$22_{(4)}$	$23_{(4)}$	$?_{(4)}$	$?_{(4)}$	$?_{(4)}$	$?_{(4)}$	$?_{(4)}$	$?_{(4)}$
45	46	47	...				
86	87	...					

Ilustração 99: tarefa 41 - Completar o registro em linha
Fonte: ДАВЫДОВ, et al (2012, p. 86)

A tarefa é desenvolvida, conforme segue a ilustração 100.

$22_{(4)}$	$23_{(4)}$	$30_{(4)}$	$31_{(4)}$	$32_{(4)}$	$33_{(4)}$	$40_{(4)}$	$41_{(4)}$
45	46	47	48	49	50	51	52
86	87	88	89	90	91	92	93

Ilustração 100: tarefa 41 - Registro completo
Fonte: Elaboração nossa, com base nas proposições davydovianas

Na primeira linha (Ilustração 100), o sistema numérico considerado foi o quartenário, portanto o primeiro número desconhecido na sequência era $30_{(4)}$. O algarismo três deve-se a formação de uma nova unidade de medida de segunda ordem. O mesmo procedimento ocorre na segunda e terceira linha, por exemplo, na segunda linha após o registro do numero 49, foi registrado o número 50, pois se formou uma nova unidade de segunda ordem.

Vale ressaltar que no sistema decimal a segunda ordem é denominada de *dezena.* O professor orienta os estudantes a falarem a composição dos números no sistema decimal. Por exemplo, o número 45, é composto por quatro (4) dezenas e cinco (5) unidades (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

No ensino tradicional a sequência numérica já é apresentada pronta, para ser observada. Diferentemente das proposições davydovianas em que a sequência numérica é reconstruída a partir de várias bases numéricas. Ou seja, no ensino tradicional o foco é a representação externa da sequência, enquanto que em Davydov, a pretensão é revelar a lógica interna que permite construir a sequência numérica em qualquer sistema de numeração particular.

O desenvolvimento das tarefas davydovianas possibilita a revelação do movimento interno que reflete a essência dos conceitos. Segundo Kopnin (1978):

> o *concreto* no pensamento é o *conhecimento* mais *profundo* e *substancial* dos fenômenos da realidade, pois reflete com o seu conteúdo não as definibilidades exteriores do objeto em sua relação imediata, acessível à contemplação viva, mas diversos aspectos substanciais, conexões, relações em sua vinculação interna necessária (KOPNIN, 1978, p. 162).

O desenvolvimento das tarefas davydovianas sobre o sistema de numeração, objeto do presente trabalho, revela as conexões e relações internas, tais como, a lógica de formação de unidades de medida nas diversas ordens, de composição dos números e, finalmente, da sequência numérica.

No decorrer do presente capítulo apresentamos algumas tarefas davydovianas relacionadas ao ensino do sistema de numeração para o segundo ano do Ensino Fundamental.

Em síntese, as referidas tarefas revelam que o sistema de numeração é composto por diversas bases numéricas, ou seja, por diversos sistemas de numeração particulares. No entanto, o sistema numérico decimal é o mais utilizado atualmente, neste, cada ordem de medida tem uma denominação (unidade, dezena, centena,...). Enfim, as tarefas davydovianas são voltadas para promover o desenvolvimento do sistema de numeração em sua totalidade. Esta é composta pelas diferentes bases numéricas que geram diversos sistemas de numeração particularidades, inclusive o decimal.

3 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso objeto de estudo na presente investigação foi às proposições davydovianas para o ensino do sistema de numeração. Analisamos além das aparências externas das tarefas referentes ao ensino do sistema de numeração, expressas nas imagens do livro didático e das orientações para realização de cada tarefa no livro do professor.

Inicialmente, o desenvolvimento das tarefas envolvia ações objetais com ênfase nas relações entre grandezas (medição de volumes, áreas, comprimentos e contagem). O resultado da medição era expresso por agrupamentos de dois em dois, três com três..., enfim, o valor do agrupamento dependia da base numérica considerada. Os numerais não eram apresentados a partir da relação direta com a representação de quantidades discretas ou contínuas, mas mediado pela base numérica considerada. Em Davydov, inicialmente, o desenvolvimento das tarefas que revela a lógica dos agrupamentos é com base nas ações objetais. Posteriormente esta é elevada ao plano mental.

Durante o procedimento de análise revelamos a relação universal do sistema de numeração, subjacente às proposições davydovianas, e a modelamos. Verificamos que esta relação é que dá origem aos diversos números, durante o processo de medição de grandezas, mediado pelas diferentes bases numéricas. Estas, por sua vez, são formadas a partir de agrupamentos das unidades de medidas.

Durante a análise das proposições davydovianas estabelecemos um diálogo com as proposições apresentadas por alguns livros didáticos aprovados pelo MEC (Ministério da Educação e Cultura), também para o segundo ano do Ensino Fundamental (BONJORNO e BONJORNO, 2001; MENEGHELLO e PASSOS, 2008; PROJETO PITANGUÁ: MATEMÁTICA/ ORGANIZADORA EDITORA MODERNA, 2005; MENEGHELLO e PASSOS, 2005). Constatamos que o único sistema numérico considerado nas proposições brasileiras, representadas pelos livros didáticos já mencionados, é o decimal. Este é apresentado de modo fragmentado, por meio de contagem de grandezas discretas. A utilização dos dedos e do ábaco é proposta com frequência e o teor conceitual limita-se ao empírico.

Por outro lado, as proposições davydovianas partem do geral, para qualquer sistema de numeração particular, as grandezas. A partir do estudo das grandezas são revelados os diversos sistemas de numerações particulares, inclusive o decimal. Este é considerado como uma particularidade do sistema de numeração.

Constatamos que Davydov e seus colaboradores não contemplam a utilização do ábaco em suas proposições de ensino. O fundamento em Davydov são as relações entre grandezas discretas e contínuas, enquanto que o ábaco possibilita apenas a representação discreta. Além disso, trata-se de um instrumento que não condiz com o atual desenvolvimento tecnológico. Para o cálculo, Davydov e seus colaboradores propõem o uso da calculadora para conferir os resultados obtidos durante a realização de algumas tarefas desde o primeiro ano do Ensino Fundamental.

Por meio do estudo da história do conceito do sistema de numeração, concluímos que embora o ábaco tenha sido muito utilizado no processo de desenvolvimento histórico, ele antecede a escrita. Portanto, não é o conhecimento mais atual que a humanidade já produziu. Acreditamos que essa é uma das razões pelas quais este instrumento não é contemplado nas proposições davydovianas.

Verificamos que Davydov e seus colaboradores, adotam a unidade entre o lógico e o histórico em suas proposições de ensino para introdução do sistema de numeração no segundo ano do Ensino Fundamental.

O sistema de numeração, em Davydov, é introduzido a partir do elo que inter-relaciona a lógica das diferentes bases numéricas, ou seja, a partir da formação das diferentes ordens de medidas, por meio dos agrupamentos. De acordo com Duarte (1987) o lógico reflete o processo histórico, porém, não de modo direto. O lógico orienta o estudo do histórico e, reciprocamente, este orienta a reformulação do lógico.

Nas proposições davydovianas a lógica do conceito do sistema de numeração (a formação das diferentes ordens de medidas a partir dos agrupamentos) reflete a sua história. Historicamente, os agrupamentos eram realizados nas diferentes bases. Tal procedimento é desenvolvido nas proposições davydovianas, porém sem repetir a história fielmente. Davydov e seus colaboradores não mencionam os fatos históricos, mas os refletem. Ou seja, as proposições davydovianas para o ensino do sistema de numeração transitam pela lógica comum das diversas bases numéricas particulares. O procedimento adotado é o de redução das representações caóticas ao abstrato e, posteriormente, de ascensão do abstrato ao concreto pensado, na unidade entre o lógico e o histórico.

Atualmente algumas tribos primitivas utilizam a base numérica binária, outras comunidades utilizam a base numérica quinária e a sociedade em geral à base numérica decimal. Tal realidade poderia gerar a ideia de que, para trabalhar de acordo com a cultura de cada povo, na tribo as proposições de ensino estariam organizadas a partir de situações que envolvem a base numérica binária. Na comunidade a educação escolar focaria a base numérica quinária. E na sociedade em geral, o foco seria a base numérica decimal, tal como apresentam os livros didáticos brasileiros.

As proposições davydovianas seguem outra orientação, contemplam a lógica inerente a todas as bases numéricas. Consequentemente, os estudantes poderão se apropriar das significações conceituais adotadas pelas pessoas que convive. Mas tem a liberdade de transitar entre as diferentes bases e de se comunicar com os povos das diferentes culturas. Em síntese, as proposições de Davydov e seus colaborados, superam àquelas apresentadas no Brasil. Em Davydov vislumbra-se o desenvolvimento do pensamento dos estudantes ao nível teórico.

Durante o desenvolvimento da presente investigação surgiram algumas questões que não foram aqui resolvidas. Estas serão retomadas em nossa pesquisa de mestrado a ser realizado no programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL) nos anos de 2013 e 2014.

4 - REFERÊNCIAS

BONJORNO, J, R; BONJORNO, R, A. Matemática pode contar comigo. São Paulo: FTD, 2001.

BOYER, C. B. **História da matemática;** tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1951.

COSTA, J.M.C. Da. **Tratado de arithmetica**. Lisboa: Imprensa Nacional, 1866.

DAVÍDOV, V. V. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: SHUARE, M. **La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS.** Moscú: Progreso, p. 143-155, 1987.

DAVYDOV, V.V. **Tipos de generalización en la enseñanza.** 3ª. ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

DAVÍDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico:** investigación teórica y experimental. Trad. Marta Shuare Moscú: Editorial Progreso, 1988.

DUARTE, N. **A relação entre o lógico e o histórico no ensino da matemática elementar.** 1987. 185 f. Dissertação (Mestrado em educação)-Universidade Federal de São Carlos, São Paulo.

PROJETO PITANGUÁ: MATEMÁTICA/ ORGANIZADORA EDITORA MODERNA. **Obra Coletiva Concebida, Desenvolvida E Produzida**. 1ª. Ed. São Paulo: Moderna, 2005.

EVES, H. **Introdução à historia da matemática.** Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. – Campinas, São Paulo: Unicamp, 2004.

GUNDLACH, B. H. **História dos números e numerais: tópicos de história da**

matemática para uso em sala de aula; trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

GROSSNICKLE, F.E; BRUECKNER, L.J. **O ensino da aritmética pela compreensão**; trad. Olga. Barroca et al. Fundo de Cultura. Rio de Janeiro: 1965.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos. Volume 1: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo;** tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997-2v.

KARLSON, P. **A Magia dos Números**. Porto Alegre: Globo, 1961.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

KOSIK, K. **Dialética do concreto.** Trad. Célia Neves e Alderico Toríbio. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

MARX, K. **Para a crítica da economia política:** do capital**.** São Paulo: Nova cultural, 1999. 256 p. (Os pensadores).

MENEGHELLO, M; PASSOS, A. **De Olho No Futuro**: matemática. São Paulo: Quinteto Editorial, 2005. IL. LOYOLA, ISHIKAWA, SASSÁ.

MENEGHELLO, M; PASSOS, A. **De Olho No Futuro**: alfabetização matemática. São Paulo: Quinteto Editorial, 2008.

OLIVEIRA, B. **O método materialista histórico dialético.** In: V Encontro de Psicologia Social Comunitária, 16 a 18/08/2001, Unesp-Bauru.

ROSA, J. E. **Proposições de Davydovy para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar:** inter-relações dos sistemas de sistema de significações numéricas. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná, 2012, 244 f.

ROSENTAL, M. M. O histórico e o lógico**.** In: ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M**. Categorías del Materialismo Dialéctico.** Tradução de Adolfo Sanchez Vazquez e Wenceslao Roces. México: Grijalbo. 1960. p. 324-357.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação.** São Paulo: Atlas, 1987.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**; tradução Paulo Bezzerra. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

ГОРБОВ, С. Ф. МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. . **Обучение математике. 2 класс: Пособие для учителей начальной школы** (Система Д.Б.Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида. перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб, 2009. **[Ensino de Matemática. 2 ano: livro do professor do ensino fundamental** (sistema do D.B.Elkonin – V.V. Davidov)/ S.F.Gorbov, G.G.Mikulina, O.V.Savieliev – 3ª edição, - Moscou, VITA-PRESS, 2009.

ДАВЫДОВ. В. В., ГОРБОВ С. МИКУЛИНА.Ф,Г. Г., САВЕЛЬЕВА.,О. В. **Математика: Учебник для 2 класса начальной школы.** В 2-х. Книга 2. - 11-е изд - М.: ВИТА-ПРЕСС, 2012. - 96 с.: ИЛ [DAVIDOV. SF, GORB. H, MIKULIN. Sr, SAVELIEV. OV, **Matemática: Livro de Leitura para Grau 2 da escola primária.** Livro 2, volume 2 - 11 ª edição - M.: VITA-PRESS, 2012. p. 96, IL]