UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE - UNESC
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

JOSIANE CRUZ GOULARTE DORIGON

PROPOSIÇÕES DE DAVYDOV PARA INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE EQUAÇÃO

CRICIÚMA
2013

JOSIANE CRUZ GOULARTE DORIGON

PROPOSIÇÕES DE DAVYDOV PARA INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE EQUAÇÃO

Monografia apresentada ao programa de Pós-graduação em Educação Matemática (*Lato sensu*) da Universidade do Extremo Sul Catarinense como exigência parcial à obtenção do título de especialista, com a orientação da Profª. Drª. Josélia Euzébio Da Rosa e co-orientação do Prof. Dr. Ademir Damazio.

CRICIÚMA

2013

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus. O que seria de nossas vidas sem que o espírito esteja em paz.

A minha mãe, ela foi a primeira a me incentivar, para fazer esta especialização. Sempre em minha memória, estará presente.

Ao meu pai, que sempre me conduziu, para ser a pessoa que sou (amor incondicional).

Ao meu marido, que com toda compreensão e amor, me apoiou nas horas de dificuldades. Sempre presente, contribuiu nos processos e etapas desta monografia.

A minha irmã, que sem exceção, com uma infinidade de atitudes, reforça mais os laços de união, amor e cumplicidade que temos uma com a outra.

Aos meus sogros, cunhada, cunhados e os concunhados. Que com todo carinho, estão presentes.

Foi necessária a colaboração de muitos, desse modo, muito obrigada:

Aos meus amigos e familiares.

Aos integrantes do GPEMAHC – Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural.

Aos professores da especialização e aos professores extracurriculares.

Ao meu co-orientador.

Ao CNPQ – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

Ao FUMDES – Fundo de Apoio à Manutenção e ao Desenvolvimento da Educação Superior.

A UNESC – Universidade do Extremo Sul Catarinense.

E um obrigada especial, a minha orientadora, que com toda paciência, compreensão, ótimo profissionalismo e principalmente que se tornou uma grande amiga para toda a vida. Assim, orientou, contribuiu e fez com que cada etapa desta monografia, fosse concretizada.

RESUMO

A presente monografia se caracteriza na modalidade teórica, a partir dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural. Investigou-se, nas proposições davydovianas, a introdução do ensino do conceito de equação. Para Davydov, no ensino, os conceitos devem ser organizados de forma orientada do geral para o particular, no procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. Mas, em que consiste organizar o ensino a partir desses pressupostos? Durante a análise das proposições davydovianas, revelou-se as características essenciais, no movimento entre as dimensões particular, singular e universal, pelo procedimento de redução do concreto caótico ao abstrato e, posteriormente, de ascensão do abstrato ao concreto. Com intuito de revelar a essência em detrimento da aparência, selecionou-se e analisou-se "atividades" de alguns livros didáticos brasileiros, utilizados por professores da rede municipal de Criciúma nos anos letivos de 2012 e 2013. Em tais livros a referência de análise foram suas definições e como é introduzido o conceito de equação do primeiro grau, em particular para as operações de adição e subtração. Durante a apresentação, explicação e análise das tarefas davydovianas, com o intuito de colocar o leitor em atividade, organizou-se o texto por meio de perguntas, que o levaria a pensar nas possíveis respostas para as tarefas, assim como também, para o processo de análise dos dados. Dentre os resultados da investigação, destaca-se as multiplas relações entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas em nível teórico. Além disso, confirmou-se que as proposições davydovianas são expressão da teoria anunciada, qual seja, a Teoria Histórico-Cultural. Por outro lado, as "atividades" dos livros didáticos enfatizam as dimensões empíricas do conceito de equação.

Palavras-chave: Proposições davydovianas. Equação do primeiro grau. Significações algébricas, aritméticas e geométricas.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO

A presente investigação foi iniciada no ano de 2011. Depois de concluir a licenciatura em Matemática na Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC (2010), a autora da presente monografia ingressou na Pós-graduação Latu Sensu em Educação Matemática da mesma instituição. Na primeira disciplina que se teve no curso de especialização, a professora da referida disciplina, estudiosa das proposições davydovianas, apresentou a proposta de Davydov e seus colaboradores como uma das possibilidades de objeto de estudo para se aprofundar na especialização. E, convidou os estudantes para integrarem o GPEMAHC (Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico Cultural).

O convite foi aceito, pela autora desta monografia, para participar do coletivo GPEMAHC. O grupo de pesquisa é composto por pesquisadores e estudantes de quatro universidades brasileiras, Universidade do Extremo Sul Catarinense, Universidade do Sul de Santa Catarina, Universidade Federal de Santa Catarina e Universidade Federal do Piauí. O grupo possui as obras didáticas de Davydov e seus colaboradores traduzidas da língua russa para a língua portuguesa, tais como livros didáticos para o Ensino Fundamental (ДАВЫДОВ, et al. 2012)[1] e livros que orientam o desenvolvimento em sala de aula da proposta de ensino desse autor (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2009).

A partir da experiência como professora no Apoio Pedagógico de Matemática[2], e durante as reuniões de orientação para a monografia observou-se a necessidade de se repensar o ensino do conceito de Equações na primeira fase do Ensino Fundamental, desde os anos iniciais. Davydov e seus colaboradores propõem que esse conceito seja objeto de estudo em todos os

---

[1] As traduções do Russo para o Português foram realizadas pela tradutora Elvira Kim, de nacionalidade russa. No Brasil, esta leciona a disciplina de russo na UFPR – Universidade Federal do Paraná.

[2] Projeto de apoio pedagógico da Prefeitura Municipal de Criciúma é implantado nos anos finais do Ensino Fundamental, nas disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa, para atender as dificuldades apresentadas pelos/as alunos/as na aprendizagem do conteúdo destas disciplinas. Outro motivo de sua implantação é o resultado das escolas estarem com o índice do IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) abaixo do nível desejado.

anos escolares do Ensino Fundamental, e não somente a partir do 7º ano, como acontece no ensino de uma forma geral aqui no Brasil.

A Proposta Curricular de Santa Catarina (SANTA CATARINA, 1991, 1998, 2000, 2005) e a proposta curricular de Criciúma (CRICIÚMA, 2008), são instrumentos de reflexão e apresentam alguns subsídios para a educação escolar com base na Teoria Histórico-Cultural.

Contudo, muitos professores, assim como autora da presente monografia, não se sentem seguros e com clareza para fundamentar a docência na referida teoria. Consequentemente, o livro didático torna-se a principal referência para subsidiar o planejamento e a prática pedagógica. O que geralmente não vai ao encontro da perspectiva teórica que fundamenta as referidas Propostas Curriculares.

A partir dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, no ensino, os conceitos devem ser organizados de forma orientada do geral para o particular, no procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. Mas, em que consiste organizar o ensino a partir desses dois pressupostos?

De acordo com Galperin, Zaporózhets, Elkonin (1987), Davydov e seus colaboradores elaboraram propostas para o ensino de Matemática que expressa, fidedignamente, os princípios da Teoria Histórico-Cultural. Por isso, a elegeu-se como objeto de estudo na presente investigação. Com base na problemática anunciada, cujo objetivo foi compreender o movimento conceitual apresentado por Davydov e seus colaboradores para introdução do conceito de equação no segundo ano do Ensino Fundamental. Em especial, no que se refere ao movimento do geral para o particular e de ascensão do abstrato ao concreto.

Os objetivos específicos consistem em:

- Verificar a expressão da teoria anunciada por Davydov, Teoria Histórico-Cultural em suas proposições para o ensino de equação;
- Analisar como são contempladas as significações aritméticas, algébricas e geométricas do conceito de equação do primeiro grau;
- Investigar os livros didáticos escolhidos por professores da rede municipal de Criciúma, para utilizarem no ano letivo de 2013 e os já utilisados atualmente, para o ensino introdutório do conceito de equações.

De caráter teórico, a proposta de Davydov foi analisada a partir do manual do professor para utilizar o livro didático davydoviano. As proposições de estudo, seguem o movimento pelo qual o conceito deverá ser desenvolvido em sala de aula. As análises gerais do tema são desenvolvidas e reproduzidas em tarefas particulares.

O estudo realizado em comparação com as tarefas davydovianas, dos livros didáticos escolhidos pelos professores da rede municipal para utilizar no ano letivo de 2013, e um livro que era utilizado no ano de 2012, tais como: A coleção Porta Aberta (2011) dos autores Marília Centúrión, Júnia La Scala e Arnaldo Rodrigues do primeiro ao quinto ano, e o livro didático da coleção Fazendo a diferença (2006) dos autores Bonjorno e Ayrton do sétimo ano.

Todo trabalho de pesquisa requer um método para fundamentá-lo. Em concernência perspectiva teórica aqui adotada, a Teoria Histórico-Cultural, fundamentou-se no método do Materialismo Histórico-Dialético.

Por meio do método é possível perceber o comportamento e as contradições do objeto de estudo, como por exemplo, da sociedade capitalista. Baptista (2010) comenta que na atual sociedade capitalista, no mercado de trabalho, onde o homem produz instrumentos, não há consciência significativa. Ou seja, o homem moderno aprende uma profissão e a executa, mas pela divisão social do trabalho, ele perde o contato com o produto final de seu trabalho.

A relação entre o antigo e o novo no processo de desenvolvimento histórico dos fenômenos ocorre a partir da lei da negação da negação. Na interpretação dialética, tal lei, segundo Triviños (1987, p. 71) se baseia na evolução e estuda “todas as classes de movimento: desenvolvimento, regressão e o movimento circular”. É consequência da luta dos contrários, e seu propósito é a passagem do inferior para o superior e vice-versa.

Na passagem do inferior para o superior ou o seu contrário, não significa, necessariamente, que o novo possa eliminar o antigo, pois possui muitas características e elementos do antigo. O objeto em desenvolvimento pode ser contestado, superado e ainda serem repetidas diversas etapas, com qualidades diferenciadas.

Masson (2007, p. 112) comenta que “os diferentes aspectos da realidade se entrelaçam, promovendo a inclusão dos aspectos contraditórios”.

A contradição, segundo Triviños (1987, p. 69), “é a fonte genuína do movimento da transformação dos fenômenos”, o materialismo dialético reconhece que “a contradição é uma forma universal do ser”. As contradições estão em oposição permanente, mas elas se penetram mutuamente, pois têm semelhanças, que são concebidas e superadas, logo que solucionada a passagem dos contrários de um para o outro. Quando há a superação, se atinge a identidade dos contrários, em tal interação surge um novo objeto, um novo fenômeno, um novo homem, com qualidades diferentes das anteriores, ou seja, transformado.

Marx (1985) diz que se o produto do trabalho não pertence ao operário, logo tal produto pertence a outro homem (patrão) e se a atividade do homem é um tormento, ela proporciona prazer para outro homem. Não são os deuses e nem a natureza que proporcionam esta força contraditória sobre o homem, mas sim o próprio homem sobre ele mesmo.

O ser humano, ao produzir para si, estabelece relações com a sociedade, isso exige uma consciência social e conforme produz, se condiciona, se relaciona e se desenvolve como ser, e assim, desenvolve a sua consciência. Por meio dessa atividade, gera também uma história, porém, se não consegue explicá-la em suas múltiplas determinações, em nível de concreto pensado, é porque sua forma de pensamento é empírica.

De acordo com Jardinetti (1996), o abstrato e o concreto manifestam-se no método dialético como uma tendência no processo de conhecimento. O concreto e o abstrato são momentos de pensamentos diferentes de um mesmo objeto, que deve ser analisado, no processo de investigação, em todos seus detalhes essenciais no seguinte movimento: concreto → abstrato → concreto. No início da análise, o objeto está concebido em sua forma imediata, trata-se do concreto real, ponto de partida. Para reproduzi-lo faz-se necessário extrair as inter-relações, no contexto de sua produção histórica e considerar suas contradições e essencialidades.

O procedimento em que se eleva do abstrato ao concreto está apoiado na formação do pensamento teórico, composto pelas dimensões universais, particulares e singulares do conhecimento. Por outro lado, o concreto ponto de partida é o aspecto sincrético dado empiricamente. Nesse momento do processo de cognição, o pensamento identifica os aspectos essenciais do objeto e extrai as relações essenciais, universais que vem a ser as abstrações teóricas. Essas constituem as mediações que possibilitam a superação do aspecto sincrético do objeto de conhecimento e proporcionam um salto qualitativo, no período analítico, para o concreto ponto de chegada. O concreto ponto de chegada, ou concreto síntese, é um nível superior atingido pelo pensamento no processo de conhecimento, ou seja, suas múltiplas determinações.

No método Materialista Histórico-Dialético, parte-se do concreto caótico, e por meio das abstrações chega-se ao concreto pensado, ou seja, a “síntese das múltiplas determinações” do objeto de investigação (MARX, 1985).

Como diz Kozik (1995), é essencial conhecer a estrutura do objeto de investigação, para tanto, é preciso examinar em partes o todo. Nesse processo, separa-se o que é essencial do que é menos importante para extrair conexão interna do objeto, sua lei: “por trás da aparência externa do fenômeno se desvenda a lei do fenômeno” (Idem, p. 20).

Para aprender o objeto, segundo Rigon, et al (2010), não se pode considerar apenas o ato direto e instantâneo dado pela aparência externa, mas sim ativar o pensamento até chegar à consistência do real, a sua essência.

A investigação da essência de determinado objeto se dá pela análise da sua forma mais desenvolvida (MARX, 1985). Na conexão dialética entre o universal, o particular e o singular:

> A prática, o ser (abstrato) e a essência são momentos do conceito; assim, todo ser determinado é um ser singular e, para se chegar ao conceito, é necessário estabelecer a conexão dialética entre singular e universal. Nessa conexão surge o papel do particular como mediador entre o universal e o singular. O particular é o ponto de partida do pensamento para chegar ao universal, bem como para explicar o singular. Portanto, para a formação de conceitos que penetrem além do sensível aparente é necessário estabelecer a conexão dialética entre o universal, o particular e o singular. A particularidade é uma categoria historicizante que possibilita a compreensão de outros aspectos do real, já que está no âmbito das mediações (MASSON, 2007, p. 111).

Para investigar o objeto no movimento das dimensões universal, particular e singular, faz-se necessário um processo de análise devidamente orientado teoricamente. Uma investigação particular sobre um determinado objeto só é possível, segundo Marx (1985), pela prática dos princípios teóricos gerais, tomado como ponto de partida a fase mais desenvolvida do objeto em movimento (Badiou,1979).

O movimento, segundo Engels (apud Triviños, 1987, p. 60) "é o modo de existência da matéria. Jamais existiu em algum lugar, nem pode existir, a matéria sem movimento". Os objetos e fenômenos, diferenciam-se entre eles pela qualidade, "isto é, pelo conjunto de propriedades que os caracterizam" (idem, p. 65).

> A qualidade representa o que o *objeto é* e não outra coisa. A distinção da qualidade do objeto, isto é, do objeto entre outros objetos, é a primeira fase do conhecimento do objeto. Isto quer dizer que o objeto nos apresenta e o separamos dos outros objetos pelo conjunto de suas propriedades (TRIVIÑOS, 1987, p. 65-66).

Só mais tarde, segundo Triviños (1987), é que, no processo de investigação sobre o objeto, são descobertas outras características tais como a quantidade, causa, essência etc.

Na presente monografia, cujo objeto de investigação é as proposições davydovianas para a introdução do conceito de equação, com base no método Materialismo Histórico-Dialético, revelou-se suas características essenciais, no movimento entre as dimensões particular, singular e universal, pelo procedimento de redução do concreto caótico ao abstrato e, posteriormente, de ascensão do abstrato ao concreto.

No contato inicial com objeto de estudo ainda não se enxergava com clareza a especificidade das proposições davydovianas, estas eram ofuscadas pelo conhecimento prévio referente as proposições tradicionais, pois estas permearam toda a formação básica, desde a Educação Infantil até a especialização. A investigação foi iniciada pelo estudo simultâneo do livro davydoviano que orienta o professor para o desenvolvimento das tarefas apresentadas no livro didático (sobre o conceito de equações), de uma coleção de livros didáticos brasileiros[3], dos livros sobre os fundamentos da Matemática[4] e algumas obras referentes a Teoria Histórico-Cultural[5].

---

[3] Optou-se por uma das coleções de livro didático de Matemática mais votadas pelos professores da rede municipal de criciúma para ser utilizada no ano letivo de 2013 (CENTURIÓN; SCALA; RODRIGUES, 2011) e um dos livros didáticos utilizado pelo 7º ano do ensino fundamental dois, dos autores (BONJORNO; AYRTON, 2006).

[4] Caraça (1951)

[5] JARDINETTI (1996);ROSA (2012) dentre outros autores.

Inicialmente sempre se concebia as equações em Davydov como base na concepção prévia sobre o referido conceito. O olhar inicial para as tarefas davydovianas sobre o conceito de equação era a partir dos livros didáticos do ensino tradicional. Realizou-se uma espécie de adaptação de cada tarefa de Davydov aos moldes de como seriam desenvolvidas a partir das proposições brasileiras: primeiro, com balanças, equivalência e com modelos algébricos prontos das equações definidas, que já seguiam inclusive para os macetes das operações inversas.

> O conhecimento da realidade, portanto, impõe uma superação da relativa imediaticidade da representação empírica inicial. O abstrato é a negação do concreto inicial, o concreto sensório perceptivo é o meio de se atingir o concreto real pensado. As abstrações são portanto, mediações de um concreto caótico, obscuro, para um concreto na compreensão as multiplicidade de suas partes (GIARDINETTO, p.26, 1991).

No momento em que o objeto estava dado caoticamente, aproximou-se Davydov com o modo tradicional de se ensinar o conceito de equações, de ensinar como é proposto inicialmente o conceito de equações. Ou seja, as proposições davydovianas pouco se diferenciavam das proposições brasileiras.

Porém, no aprofundamento das leituras referentes aos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural percebeu-se algumas diferenças entre as duas proposições de ensino. Em Davydov, o ponto de partida são as representações gerais das relações entre grandezas, quando o valor da medida de uma delas é desconhecido. O valor desconhecido, inicialmente é representado por um ponto de interrogação (?) e posteriormente substituído pela incógnita ***x***. Diferentemente dos livros didáticos brasileiros que nos anos iniciais representam a incógnita por uma flor, um tijolo etc. Enfim, uma representação que faça parte do dia-a-dia das crianças e, no sétimo ano, já se apresentam diretamente a incógnita.

Em Davydov as equações não aparecem prontas, assim como sugerem os livros didáticos brasileiros. Elas são construídas a partir de situações de análise, interpretadas por meio de esquemas, referentes a relação *parte-todo*. Tal relação é representada na forma algébrica e constitui o modelo universal de equação. Conseguiu-se extrair de todas as relações apresentadas por Davydov e seus colaboradores, nas diferentes tarefas, a essência, a gênese do objeto do objeto de estudo. Ou seja, atingiu-se o momento de abstração como fala Giardinetto (1991):

> As abstrações são o momento do pensamento em que se supera a caoticidade do todo pela compreensão de suas partes. Porém essas partes se tomadas isoladamente em si e por si, geram a atomização do todo, não permitindo a compreensão das relações que se dão entre essas partes, compreensão esta necessária para a reprodução qualitativamente nova do concreto no pensamento (GIARDINETTO, p. 27, 1991).

A partir do momento que identificou-se a relação universal (*todo-partes*) foi possível identificar também três relações particulares (a + x = c, x + b = c e a + b = x) que possibilitam a resolução de qualquer problema singular sobre adição e subtração.

> Para que se possa compreender a singularidade é indispensável que o pensamento tenha alcançado um máximo de aproximação do estágio mais desenvolvido das relativas particularidades e universalidades nas quais se insere a singularidade em estudo. Em outras palavras: o singular é tão mais compreendido, quanto mais se tenha captado suas mediações particulares com a universalidade. O singular, portanto, não existe em si e por si, mas somente em sua relação intrínseca com o universal que se faz somente através de mediações - o particular. Por outro lado, o universal só existe quando se concretiza no singular (OLIVEIRA, p. 19, 1998).

Para compreender o modo como Davydov e seus colaboradores abordam o conceito de equação nas proposições de ensino teve-se que negar as concepções iniciais no sentido de superá-las. Inicialmente estava-se com o pensamento tão focado nos princípios empíricos de ensino que ao organizar os dados da pesquisa, considerava-se a cor um elemento indispensável. Por exemplo, se a tarefa davydoviana apresentava uma situação na qual havia uma determinada quantidade de lápis azuis e outra quantidade na cor vermelha, então no esquema, fazia-se um arco azul para representar a quantidade de lápis azuis e um arco vermelho para representar a quantidade de lápis vermelhos. Ou seja, adaptava-se as tarefas davydovianas aos princípios da escola tradicional. O intuito era facilitar visualmente a localização da referida quantidade no esquema. Depois, a partir das reflexões com base no referencial teórico, verificou-se que tal conduta não propiciava a compreensão da relação *parte-todo*, subjacente ao conceito de equação sobre adição e subtração, assim como também não desenvolvia a ação investigativa da criança, pois os dados estavam explicitados por meio da cor. Assim, era suficiente a relação entre cores iguais e não a relação interna entre o valor desconhecido com os demais valores já conhecidos.

Vale ressaltar, que não se trata de suprimir do ensino o caráter visual, mas a necessidade de ir além do que está dado pela aparência externa. Para Amorin (2007)

> A lei dialética da negação da negação, numa perspectiva marxista, se torna fundamental para o entendimento do processo de evolução do conhecimento e dos fenômenos. Há uma forte relação entre o antigo e o conhecimento em estado de produção. O novo conhecimento não se desenvolve sem o velho. Este é assim definido pelo tempo que se originou na humanidade. A apropriação do antigo conhecimento, pelo sujeito, se transforma em um novo conhecimento e por sua vez desenvolverá outros que se traduz num processo dialético contínuo de entendimento da realidade (AMORIN, 2007, p. 57-58).

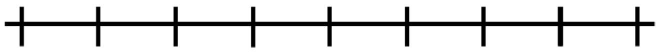
A presente monografia é composta por três partes, inter-relacionadas: Introdução e apresentação da problemática, objeto, objetivos, metodologia e fundamentação teórica da investigação; análise das tarefas davydovianas e “atividades” extraídas dos livros didáticos brasileiros e, finalmente, a síntese, na qual também procede-se as considerações finais. Durante a apresentação, explicação e análise das tarefas davydovianas, estas são organizadas com o intuito de colocar o leitor em atividade por meio de perguntas que o levam a pensar nas possíveis respostas para as tarefas, assim como também para o processo de análise dos dados. Ao final do capítulo referente a análise dos dados apresentou-se o movimento adotado por um livro didático brasileiro, para a introdução de equações. No decorrer da monografia, apresenta-se dados confirmadores de que as proposições davydovianas são expressão da teoria anunciada e divergentes às proposições brasileiras.

2 - APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DO OBJETO DE ESTUDO

No presente capítulo apresenta-se dez tarefas davydovianas para introdução do conceito de equação no segundo ano do Ensino Fundamental. Concomitantemente, também são apresentadas algumas “atividades” extraídas dos livros didáticos utilizados atualmente na rede municipal de Criciúma no ensino fundamental I (1º ao 5º ano) e no ensino fundamental II, em especial, o livro do 7º ano (6ª série). Vale explicar que serão denominadas por tarefas àquelas referentes as proposições davydovianas e por “atividades” as retiradas dos livros didáticos. Tais nomenclaturas são adotadas pelos seus respectivos autores.

No decorrer da análise, foram apresentadas ao leitor, algumas perguntas, com intuito de colocá-lo em atividade durante a leitura. Algumas das perguntas são respondidas outras, ficam em aberto para futuras investigações.

<u>Tarefa 1:</u> A primeira tarefa (Ilustração 1) consiste em preencher o quadro, a partir da resolução de duas expressões algébricas e com base no esquema (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).



a	5	7	6	14	13
a + 3					
a – 3					

Ilustração 1: Tarefa 1 – Quadro
Fonte: Elaboração com base nas proposições davydovianas

Nessa tarefa, propõe-se a reflexão sobre a leitura e o registro das expressões que são lidas de dois modos: com as palavras “aumentar” e “mais” para a expressão de adição **a + 3**, e com as palavras “diminuir” e “menos” para a expressão de subtração **a – 3** (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009)**.** No quadro anterior tem-se situadas as expressões algébricas e valores genéricos para a variável ***a***.

As tarefas davydovianas para o segundo ano do Ensino Fundamental, sobre expressões algébricas, referem-se às operações de adição e subtração. Expressão algébrica é "um conjunto de números e letras ligados por sinais de operação, no qual as letras só aparecem submetidas às operações elementares: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação" (PEREIRA, et al, 1986, p. 95).

As expressões **a + 3** e **a – 3**, apresentadas no quadro (Ilustração 1), na forma algébrica, são desenvolvidas no esquema, ou seja, na forma geométrica (Ilustração 2). Para **a + 3**, desloca-se três unidades à direita de ***a***, e para **a – 3**, desloca-se três unidades para esquerda de ***a***.

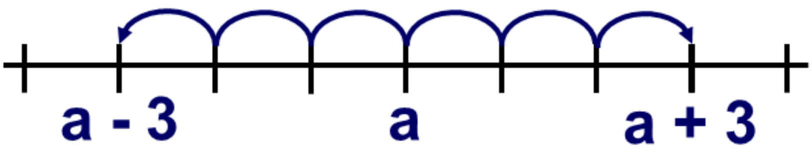


Ilustração 2: Tarefa 1 - Esquema geral da tarefa
Fonte: Elaboração com base nas proposições davydovianas

Em cada coluna do quadro, a partir da segunda, foram atribuídos valores aritméticos para ***a*** (5, 7, 6, 14, 13).

Para **a = 5**, serão percorridos pela reta, a partir do número cinco, três unidades para a direita: do cinco ao seis, do seis ao sete e do sete ao oito (5 + 3) e, três unidades para esquerda: do cinco ao quatro, do quatro ao três e do três ao dois (5 - 3), conforme ilustração 3.

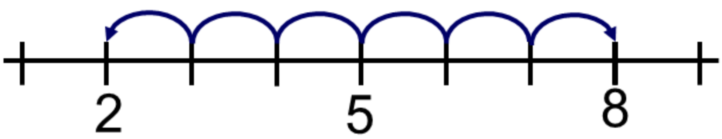


Ilustração 3: Tarefa 1 - Resolução na reta numérica
Fonte: Elaboração com base nas proposições davydovianas

Durante a realização da tarefa, a orientação é que o movimento seja realizado coletivamente e cada unidade percorrida na reta numérica deve ser pronunciada em voz alta por todos (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). A resolução da tarefa segue até completar o quadro com os demais valores (Ilustração 4).

a	5	7	6	14	13
a + 3	8	10	9	17	16
a – 3	2	4	3	11	10

Ilustração 4: Tarefa 1 - Quadro preenchido
Fonte: Elaboração com base nas proposições davydovianas

Na tarefa, inicia-se pelas representações algébricas, e, por meio da reta numérica, elemento mediador particular, determina-se os valores aritméticos, em sua forma singular. A letra ***a*** pode assumir quaisquer valores aritméticos dentre aqueles apresentados no quadro (Ilustração 1). Ou seja, trata-se de uma variável.

Caraça (1951) para definir variável, inicia de uma situação particular que corresponde a dois conjuntos aritméticos e para representá-los de maneira simbólica, é necessário introduzir o conceito de variável. Sem a representação simbólica, teria-se que aderir a tabelas com dados particulares e não haveria a representação de maneira generica correspondente.

Para explicar o conceito de variável, Caraça (1951), utiliza os elementos de um conjunto qualquer, denominado por conjunto (E), seja ele finito ou infinito. Todos os elementos deste conjunto é representado pela letra ***x***. Este símbolo ***x***, representativo de qualquer um dos elementos do conjunto (E), denomina-se de *variável*. Assim, a variável, “é e não é cada elemento do conjunto” (CARAÇA, 1951, p. 128). “Uma variável é o que for determinado pelo conjunto aritmético que ela representa – a sua substância, o seu domínio” (Idem).

Nesta tarefa, a ideia central do conceito de variáveis que são representados nas expressões desta tarefa por **a + 3** e **a – 3**.

As variáveis apresentadas nas expressões (**a + 3** e **a – 3**), durante o desenvolvimento da tarefa forma substituidas por valores aritméticos representados em sua forma aritmética, por meio da reta numérica. Davydov e seus colaboradores criam as condições, em suas proposições, para que a criança desenvolva os cálculos algebricamente, geometricamente e aritmeticamente em uma única tarefa.

Booth (1994, p. 24) diferencia a Álgebra da aritmética. Para o autor na atividade da aritmética ocorre o encontro de determinadas respostas numéricas particulares. Já na Álgebra o foco "é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral" (BOOTH, 1994, p. 24).

As expressões algébricas **a + 3** e **a – 3**, representam uma relação geral passível de ser generalizada para qualquer situação que envolva o acréscimo ou o decréscimo de três unidades a partir de um número qualquer. Por outro lado, do ponto de vista aritmético, ao atribuir-se valores para ***a***, obtive-se respostas singulares. Esse movimento, orientado do geral para o particular e singular, das significações algébricas para as significações aritméticas, foi mediado pelas significações geométricas, inicialmente de forma geral (esquema) e, posteriormente, em suas particularidades e singularidades (na reta númerica). Ou seja, a tarefa abrange um sistema conceitual matemático que, além de contemplar as significações já mencionadas, inter-relaciona as operações de adição e subtração.

Em relação com a tarefa 1 de Davydov, analisa-se uma "atividade" proposta pelos autores de um dos livros didáticos mais votados pelos professores da rede municipal de Criciúma para serem utilizados no ano letivo de 2013. Na "atividade" (Ilustração 5), Centurión, Teixeira e Rodrigues (2011) propõem o segmento (├─┤) como unidade de medida para a medição das distâncias percorridas pelos coelhos, as crianças deverão completar o quadro correspondente.

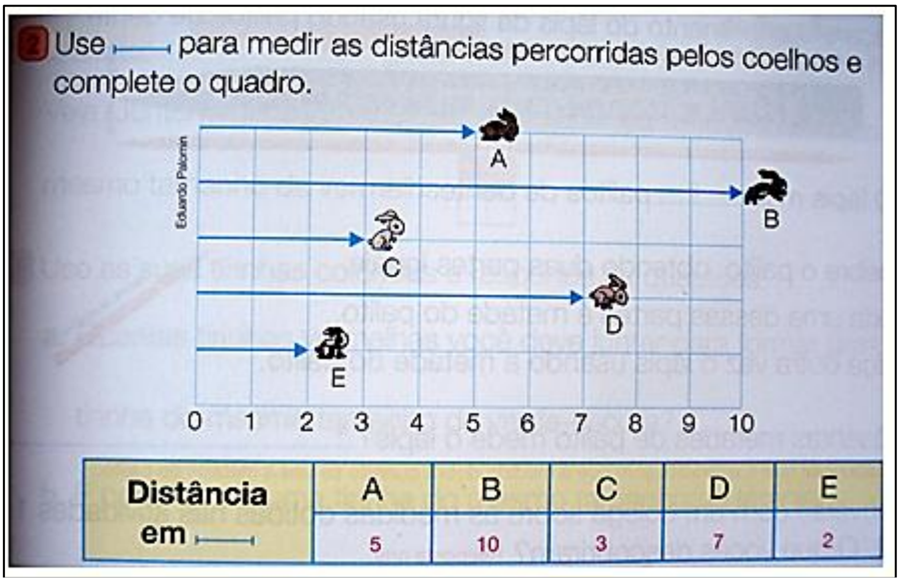


Ilustração 5: Atividade livro didático
Fonte: Centurión, Teixeira e Rodrigues, (2011, p.59)

Apesar da “atividade” envolver letras (A, B, C, D e E), estas são utilizadas apenas para representar os coelhos. Não se trata de um valor *genérico* que representa a distância percorrida por cada coelho. Além disso, não menciona a grandeza considerada para medir distâncias, o comprimento. Se assim o fosse, diria-se: A distância percorrida pelo primeiro coelho foi de **A** unidades de comprimento. Posteriormente, o valor **A** seria substituído, com base na análise da situação, por 5.

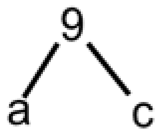
Tal conclusão seria realizada a partir da soma das unidades percorridas pelo coelho, ou seja, *um, mais um: dois. Dois, mais um: três. Três, mais um: quatro.* E*, quatro, mais um: cinco*. Portanto, o coelho percorreu cinco unidades de comprimento. Porém, a orientação para a análise da relação entre as unidades percorridas e o seu valor total, apenas há a identificação na sequência numérica já apresentada em sua forma estática ao final da malha. Desse modo, trata-se apenas de uma “atividade” associacionista, cabe ao estudante associar o final da seta que indica a distância percorrida pelo coelho ao algarismo.

Centurión, Teixeira e Rodrigues (2011) não contemplam, na “atividade” em referência (Ilustração 5), a soma *aritmética* das unidades percorridas e representadas por segmentos, ou seja, representadas *geometricamente*. A sequência poderia ser relacionada com o campo geométrico, pelo acréscimo de unidades na reta numérica, caso as setas que representam a distância percorrida pelos coelhos fossem assim consideradas.

Um professor, ao analisar superficialmente a ilustração 5, poderia concluir que esta “atividade” se aproxima das proposições davydovianas. Porém, como já anunciado anteriormente, entre ambas há mais distanciamentos que aproximações. Não há a relação entre as três significações matemática: algébricas, aritméticas e geométricas.

Com base nas proposições davydovianas, o ensino de matemática é organizado de forma que contemple a inter-relação entre as significações matemáticas, por meio da relação entre seus diversos conceitos. Assim, para a “atividade” apresentada na ilustração 5 se aproximar das proposições de Davydov e seus colaboradores, faz-se necessário repensá-la tanto do ponto de vista de seu conteúdo quando do método de ensino. Pois, do modo como está organizado não há aproximação alguma com os pressupostos davydovianos.

Tarefa 2: No esquema (Ilustração 6), o número *nove* (9) representa o *todo* e suas *partes* são apresentadas na forma algébrica (*a* e *c*). A tarefa consiste em completar os valores desconhecidos em cada coluna do quadro (Ilustração 6), com base na relação apresentada no esquema.



a	3		5		6		4	
c		7		1		2		8

Ilustração 6: Tarefa 2 - Tabela com partes faltantes
Fonte: Elaboração com base nas proposições davydovianas

As letras podem assumir quaisquer valores aritméticos singulares. Desse modo, “a” e “c”, possibilitam a representação de diferentes *partes* que juntas compõem o *todo* (*nove*). A partir do esquema é possível extrair as seguintes operações: “9 = c + a”, em que as *partes* ***a*** e ***c*** juntas compõem o *todo* (nove); e, “9 – a = c” ou “9 – c = a”, em que ao subtrair do *todo* (nove), uma das *partes* (**a** ou **c**) o resultado será igual à outra *parte*. Assim, o esquema nesta tarefa, proporciona a reflexão sobre relação *todo* e *partes* no movimento entre a operação da adição e sua inversa, a subtração.

Do ponto de vista dos fundamentos da matemática, sobre o movimento inverso entre as operações mencionadas, Caraça (1951) diz que:

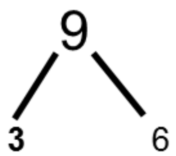
> Adição. – A inversão consiste em: dada a soma e uma das parcelas, determinar a outra. Deveria haver duas operações inversas, conforme se pedisse o adicionando ou adicionador, mas, em virtude da propriedade comutativa da adição, os papéis das duas parcelas podem trocar-se, e as duas inversas fundem-se numa só, que se chama subtração (CARAÇA, 1951, p. 20)[6].

Caraça (1951, p. 20) destaca ainda, que, “dado o resultado da operação e um dos dados” é possível “determinar o outro dado.” Davydov e seus colaboradores introduzem o conceito de equação referentes as operações de adição e subtração com base na inter-relação entre ambas. A partir da relação *todo-partes,* conclui-se que uma das *partes* subtraída do *todo*, resulta

[6] Sobre as relações internas entre as operações de adição e subtração em Davydov ver Alves (2013).

na outra *parte*, e, o com base no movimento inverso, que as *partes* juntas, resultam no *todo.*

Em cada coluna do quadro (Ilustração 7), a partir da segunda, uma das *partes* já é conhecida e a outra é desconhecida. Esta deverá ser determinada, no plano mental, com base na *parte* conhecida e no *todo* (nove).



a	**3**		**5**		**6**		**4**	
c	6	**7**		**1**		**2**		**8**

Ilustração 7: Tarefa 2 - Quadro com parte completa
Fonte: Elaboração com base nas proposições davydovianas

Na segunda coluna do quadro (Ilustração 7) a *parte* já conhecida, em negrito, era o valor de ***a*,** que correspondia, nessa coluna em particular, ao número três (3) e o valor ***c*** era a *parte* desconhecida. Assim, "9 – 3 = 6", pois "3 + 6" é igual ao *todo* (9), ou seja, na segunda coluna tem-se: ***c*** = 6.

O valor da *parte* desconhecida é proposto aleatoriamente sem seguir uma sequência previamente definida. Em alguns momentos o valor da *parte* ***a*** é o desconhecido, e em outros momentos, o valor desconhecido refere-se a outra parte: ***c***. Em síntese, para determinar a *parte* faltante a ser registrada no quadro, a referência para a resolução da tarefa é o *todo* (nove) e uma de suas *partes* já conhecidas (aleatoriamente a ou c). A resolução da tarefa segue até completar o quadro com os demais valores propostos (Ilustração 8).

a	**3**	2	**5**	8	**6**	7	**4**	1
c	6	**7**	4	**1**	3	**2**	5	**8**

Ilustração 8: Tarefa 2 - Quadro com parte já completa
Fonte: Elaboração com base nas proposições davydovianas

Na ilustração 8 os valores em negrito representam as parte conhecidas e os demais valores desconhecidos. Davydov e seus colaboradores propõem, em uma mesma tarefa (2) a inter-relação entre as significações aritméticas e algébricas do conceito de número. A tarefa foi organizada no movimento orientado do geral para o particular e singular. Ou seja, inicialmente os números eram apresentados genericamente e para cada coluna particular, havia um valor aritmético singular.

Em Davydov, as dependências internas essenciais dos conceitos são reveladas em um sistema de tarefas que reúnem situações distintas, não repetitivas do tipo siga o modelo, para evitar a generalização empírica do conceito (DAVÍDOV, 1988, p. 130).

Uma das "atividades" extraídas dos livros didáticos analisados, aparentemente, se aproxima da tarefa davydoviana em análise (tarefa 2), no que se refere a relação a *todo-partes* e esquema. A "atividade" se inicia do particular com significações aritméticas e não atinge as significações algébricas. Na "atividade", Centurión, Teixeira e Rodrigues (2011) propõem a escrita dos números que faltam em cada adição (Ilustração 09).

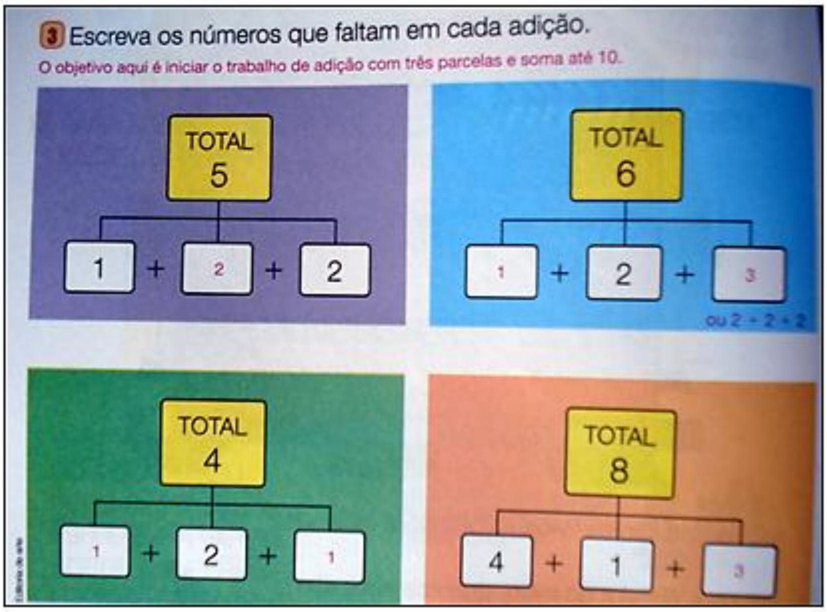


Ilustração 9: Tarefa 2 – Atividade do livro didático
Fonte: Centurión, Teixeira e Rodrigues (2011, p.74)

A "atividade" inicia com a composição das adições em cada esquema particular, já apresentado pronto, com uma resposta previamente definida. Não há relação da adição com sua inversa a subtração. A palavra total não possibilita a análise da identificação de quais elementos representam as partes e quais elementos representam o todo, este já está dado. Conforme já mencionado, a "atividade" é apresentada nos limites das significações aritméticas, com contempla as significações algébricas e geométricas e nem as dimensões entre o universal, geral, particular e singular, portanto, trata-se de uma atividade que promove apenas o desenvolvimento do conceito empírico.

Por outro lado, Davydov e seus colaboradores contemplam a integridade dos conceitos. As tarefas possibilitam a concretização do sistema conceitual em estudo. De acordo com Davídov, (1988, p. 131)

> No materialismo dialético esta integridade objetiva existente por meio da conexão das coisas singulares chama-se *concreto*. O concreto, segundo K. Marx, é "a unidade do diverso". Em sua exterioridade como algo formado, está dado na contemplação, na representação que capta o momento da inter-relação geral de suas manifestações. Mas, a tarefa consiste em representar este concreto como algo em formação, no processo de sua origem e mediatização, porque só este processo conduz à completa diversidade das manifestações do todo. Trata-se de examinar o concreto em desenvolvimento, em movimento, em que podem ser descobertas as conexões internas do sistema e, com isso, as relações do singular e do universal.
> É importante acentuar que a principal diferença entre os conceitos teóricos e as representações gerais é que nestes conceitos se reproduz o processo de desenvolvimento, de formação do sistema, da integridade, do concreto, e, só dentro desse processo, se revelam as particularidades e as inter-relações dos objetos singulares.

Por outro lado, as "atividades" analisadas, dos livros didáticos brasileiros já referenciados, limitam-se a singularidades fragmentadas, ou seja, não revela-se as inter-relações que envolvem o sistema conceitual na qual tais "atividades" estão inseridas.

Tarefa 3: Analise o esquema (Ilustração 10) e escreva as *partes* e o *todo* nos quadros abaixo da igualdade.

Ilustração 10: Tarefa 3 – Esquema todo-partes e representação algébrica
Fonte: Elaboração com base nas proposições davydovianas

A partir do esquema, sabe-se que treze (13) é o valor do *todo*. Inicialmente faz-se necessário identificar qual das significações algébricas, ***a***, ***b*** ou ***c***, representa o *todo* (13), na relação *parte-todo* expressa na igualdade ***a + b = c*** (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Igualdade, de acordo com Pereira (1986, p. 123), "é o conjunto de duas expressões do mesmo valor unidas pelo sinal = (de igual)". Desse modo, "dois ou mais termos são iguais quando são exatamente similares em grandeza e quantidade" (Idem). E quanto aos membros da igualdade, estes "são as expressões ou grandezas separadas pelo sinal de igualdade. O elemento à esquerda do sinal de igualdade é o primeiro membro e o que está à direita é o segundo membro da igualdade" (PEREIRA, 1986, p. 149).

Na igualdade ***a + b = c***, ***a + b,*** constituem o primeiro membro da igualdade, e ***c*** o segundo membro da igualdade. Tal igualdade é expressa por meio da operação de adição, a mais simples e da qual todas outras operações dependem (CARAÇA, 1951). A ideia de adição está subjacente a lógica da sequência dos números Naturais. Cada número na referida sequência, é composto a partir da ideia de somar ou adicionar: "O que é a operação elementar de passagem de um número ao seguinte, senão a operação de somar uma unidade ao um número?" (Idem, p. 17). Ou seja, ao adicionar a um número qualquer (***a***), uma unidade (***b***) e efetua-se uma transição de um número ao outro a partir da operação elementar de adição, assim representada: a + b.

Ao número ***a***, dá-se o nome de *adicionando* e representa o papel passivo da operação. O número ***b***, é denominado de *adicionador*, este desempenha o papel ativo. Os dois são denominados *parcelas* da adição (CARAÇA, 1951).

Na tarefa em análise, as *partes* juntas (a e b) compõem o *todo*. E a operação que se utiliza para determinar o *todo* a partir das *partes*, é a adição. Desse modo, o *todo* é registrado, na operação da adição, após a igualdade. Ou seja, nesta tarefa, o *todo* (13) corresponde ao valor algébrico ***c*** (Ilustração 11).

Ilustração 11: Tarefa 3 – esquema todo-partes representação algébrica com todo
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Se o *todo* (13) corresponde ao valor ***c***, as *partes* ***a*** e ***b*** serão menores que o *todo* ***c***. Assim dentre as duas opções, escolhe-se o valor de uma das *partes*, aleatoriamente (Ilustração 12).

Ilustração 12: Tarefa 3 – Uma das partes conhecida
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Dentre as várias opções de valores aritméticos para uma das *partes*, optou-se pelo número sete (7). Este, pela propriedade comutativa da adição (a + b = b + a), pode representar tanto a parte de valor ***a***, quanto a parte de valor ***b***. Optou-se, aleatoriamente, a título de exemplificação por a = 7.

Nesse estágio de resolução da tarefa, já se tem o valor aritmético do *todo* (13), e o valor aritmético da *parte* ***a*** (7). O professor sugere vários valores (9, 2, 5 etc.) para representar a outra parte desconhecida. A síntese a ser elaborada, a partir das observações do professor, com base na relação do *todo* com suas *partes*, é que somente um destes números corresponde a *parte* desconhecida. Ou seja, o valor aritmético de ***b*** não pode ser determinado aleatoriamente (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

A continuidade da tarefa é realizada no plano mental: quanto será necessário adicionar ao número sete (*parte)* para se obter o *todo* (13)? (Ilustração 13).

Ilustração 13: Tarefa 3 – Esquema e representação algébrica todo-partes
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

A partir da análise referente a ilustração 13, que formou uma sentença fechada de valor 7 + 6 = 13, tem-se as seguintes relações: a *parte* sete (7) adicionada a outra *parte* seis (6) resulta no *todo* treze (13). Ou, comutativamente, a *parte* seis (6) adicionada à *parte* sete (7) resulta no *todo* treze (13). A partir da operação inversa, a subtração, tem-se que a *parte* sete (7) subtraída do *todo* treze (13) resultará em seis (6). Ou a *parte* seis (6) subtraída do *todo* treze (13) resultará em sete (7).

A segunda questão da tarefa 3 (Ilustração 14), será realizada a partir da representação algébrica da operação “m – n = k” que é uma sentença aberta e do esquema com o valor do *todo* já apresentado, a partir da seguinte reflexão: qual das significações algébricas “m”, “n” ou “k”, representam o valor do *todo* (14)?

Ilustração 14: Tarefa 3 – Esquema todo-partes e representação algébrica
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

A partir da análise do esquema (Ilustração 14) conclui-se que o *todo* corresponde ao valor 14. Para relacionar este *todo* à representação algébrica, faz-se necessário considerar que na primeira parte da tarefa a operação considerada foi adição, agora trata-se da subtração.

A subtração, que define Caraça (1951) genericamente, é a operação pela qual, se determina um número *c*, que somado com *b*, resulta em *a* (*c* + *b* =

a), ou seja: *a* – *b* = *c*. Para o número *a*, dá-se o nome de diminuendo, para *b*, de diminuidor ou subtrativo, e para *c* de resto ou diferença. Para que a operação da subtração seja possível, nos limites dos números inteiros positivos, o aditivo deve ser maior que o subtrativo ou, igual a ele (a ≥ b) (CARAÇA, 1951, p. 21).

Costa (1866) define a operação de subtração como a

> operação que tem por fim decompor um número dado em duas partes, das quais uma é conhecida; ou é uma operação, que tem por fim, diminuir de um número dado quantas unidades contém outro número também dado. Ao resultado se chama resto, excesso ou diferença. Em vista desta definição é evidente que o processo da subtração se deduz facilmente do da adição, porque a primeira das duas é inversa da segunda (COSTA, 1866, p. 29).

Pereira (1986), por sua vez, define a operação de subtração, como a inversa da adição. Dada a soma de dois números (minuendo e subtraendo) determinar um outro (resto ou diferença). Para que uma subtração seja possível de ser operada, nos Naturais, é necessário que o minuendo, representado genericamente por ***m***, seja igual ou maior que o subtraendo, representado por ***s***. Desse modo, tem-se que: m ≥ s. Por meio da operação de subtração entre dois números obtem-se um terceiro que, adicionado ao segundo, resulta no primeiro.

Na tarefa em análise **m** é o *todo*, o minuendo. E as duas partes estão representadas por ***n*** e ***k***. Desse modo, poderia-se estabelecer as seguintes relações subtrativas: ***m – n = k*** ou ***m – k = n***. Nas quais, do *todo* **m** poderia-se subtrair uma das *partes* **n** ou **k**. Porém, a tarefa já determina que ***n*** é o subtrativo, ***k*** é o resto e quatorze (14) é o *todo* (Ilustração 15).

Ilustração 14: Tarefa 3 – esquema todo-partes representação algébrica com o todo
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Para completar, as *partes* do esquema, dentre várias opções, escolhe-se o valor de uma das *partes*, aleatoriamente.

Ilustração 15: Tarefa 3 – Todo e uma parte completa
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Optou-se, a título de exemplificação por ***n = 8***. Ou seja, tem-se o valor aritmético do *todo* (14), e de uma das *partes* (8). Quanto será a outra *parte*? (Ilustração 17).

Ilustração 16: Tarefa 3 – Todo-partes completas
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Na igualdade formada (**14 - 8 = 6)**, do *todo* quatorze subtrai-se a *parte* oito e resulta na outra *parte* seis.

Escolheu-se o número oito (8), dentre as várias possibilidades, para representar uma das *partes*. Por outro lado, o valor aritmético seis (6), foi determinado a partir dos valores conhecidos. Ou seja, a última *parte* faltante não pôde ser completa aleatoriamente. Em síntese, se tem dois valores conhecidos na relação entre *duas partes* e *todo*, o terceiro número não pode surgir de uma escolha arbitraria, este depende estritamente dos valores conhecidos.

Há uma “atividade” em um dos livros didáticos analisados que, aparentemente, se assemelha com a tarefa 3 de Davydov, no que se refere a relação a *todo-partes*, conforme ilustração 18.

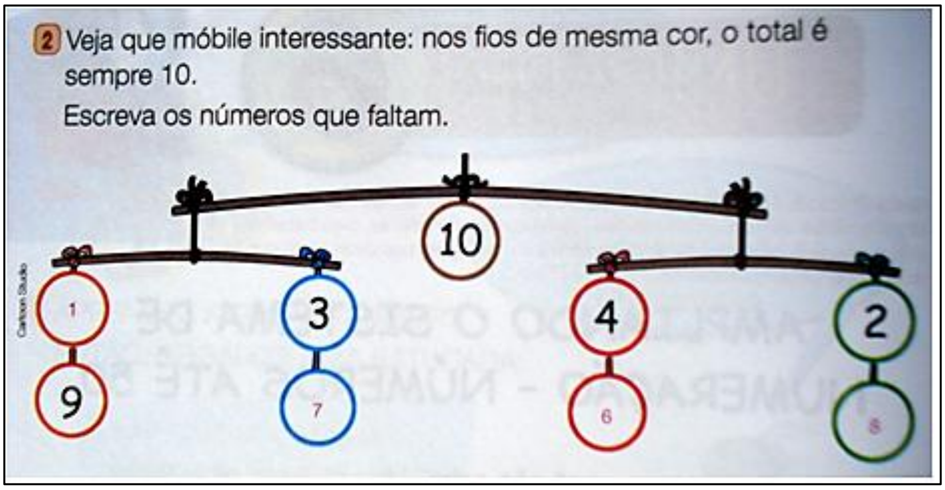


Ilustração 17: Tarefa 3 – "Atividade" do livro didático
Fonte: Centurión, Teixeira e Rodrigues (2011, p.74)

Centurión, Teixeira e Rodrigues (2011) propõem que os espaços vazios sejam preenchidos. A condição é que "nos fios de mesma cor" o total seja sempre 10 (p. 74). A análise da figura nos levou a reflexão sobre algumas questões, tais como: há quantos móbiles na "atividade"? Qual o significado do número dez representado no fio marrom? Trata-se do todo? Ou de mais uma parte? São quantas partes? A "atividade" envolve a relação *todo-partes*?

A relação todo-partes incide na análise de cada fio. Desse modo, o todo é sempre 10. A relação das partes, embora de forma implícita, foi proposta para que a criança complete os valores nos limites das significações aritméticas. Diferentemente das proposições davydovianas, aqui, os números desconhecidos são determinados sem explicitar o movimento que inter-relaciona as operações de adição e subtração, e sem a sistematização requerida pelas referidas operações (relação com a simbologia adequada: =, + e -). Além disso, não contempla as significações algébricas e geométricas concernentes ao conceito em estudo, limita-se apenas aos valores aritméticos.

Cada fio do móbile direciona, sempre, para uma mesma resposta. O que faz com que a "atividade" possa ser resolvida de forma mecânica, repetitiva nos limites de um todo expresso de forma singular. A criança completará cada fio, sem estabelecer relação com o todo sugestivo por uma relação sustentada em um sistema de móbiles, que vai além do número dez (10), conforme limita o próprio enunciado. Os números faltantes poderão ser completados nos espaços vazios de cada fio do móbile a partir do seguinte raciocínio: Fio cor de laranja - de 9 para chegar a 10 falta 1. Escreve-se o número um; Fio de cor azul - de 3 para chegar a 10, faltam 7 unidades. Escreve-se o número sete; Fio de cor vermelha - de 4 para chegar a 10, faltam 6 unidades; Fio de cor verde: de 2 para chegar a 10, faltam 8 unidades; e, o no fio marrom não há o que ser resolvido. Mas, qual o papel dos móbiles nessa "atividade"? Qual a relação dos fios (partes dos móbiles) com o suporte que o sustenta? E, qual a relação entre os três móbiles?

Essa "atividade", a partir das proposições davydovianas poderia ser organizada com base nas seguintes considerações: há um móbile maior que sustenta dois móbiles menores. Os três juntos forma um sistema organicamente equilibrado, por isso, cada fio possui sempre o mesmo valor aritmético (Ilustração 18). Em cada móbile menor, o todo é 20, formado a partir das partes constituídas pelos valores determinados na etapa anterior para cada fio (10).

Ao centro do móbile maior, o valor aritmético 10 seria substituído pelo número 40. Este seria o novo valor do todo, no sistema de móbiles, tomado os dois menores como partes (20 + 20). Ou seja, os números dez e vinte, tanto representam a parte quanto o todo. Trata-se, pois de um movimento interno em que o mesmo valor aritmético pode representar a parte ou o todo conforme a relação considerada.

O valor aritmético 10, ao centro do móbile maior descarta qualquer relação no sistema de móbiles. Ali está somente para reforçar o enunciado da "atividade", o que limita o foco da análise apenas nos fios e impossibilita qualquer relação entre o sistema de móbiles.

<u>Tarefa 4a:</u> Complete a igualdade c + b = e. A partir dos números 5, 7 e 15 (Ilustração 19).

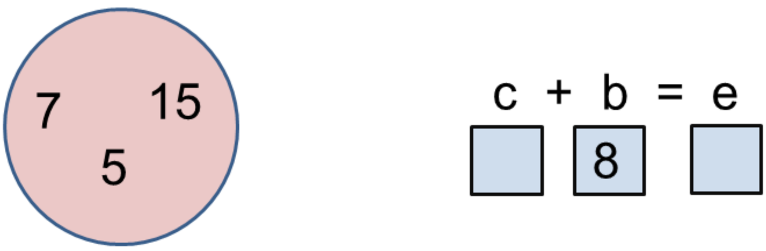


Ilustração 18: Tarefa 4 – representação algébrica de adição
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

A igualdade (Ilustração 19) **c + b = e** está representada genericamente e é formada pela operação da adição. Um de seus valores, neste caso o valor algébrico ***b***, já possui valor aritmético, oito (8).

Para a igualdade que envolve três termos, faltam determinar os valores aritméticos para as representações algébricas, ou incógnitas ***c*** e ***e***. Para tanto, há três opções singulares, circuladas ao lado esquerdo da ilustração (7, 5 e 15).

Com base na relação *todo-partes*, utiliza-se a operação de adição para determinar o valor aritmético do *todo*. Logo, o número oito (8), representado por ***b*** na igualdade, é uma das *partes*, que adicionada a outra parte resulta no valor do *todo*.

Na relação *todo-partes,* neste caso contemplado pela operação de adição, sabe-se que o *todo* será maior que a *parte* oito, e por representar tal operação, a totalidade é relacionada após a igualdade (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Após a identificação do o *todo* e das *partes*, na representação algébrica, procede-se a determinação, dentre as opções (7, 5 e 15), do valor aritmético que representa o *todo* (Ilustração 20). Se oito (8) é a *parte* conhecida, o *todo* será menor ou maior que oito? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

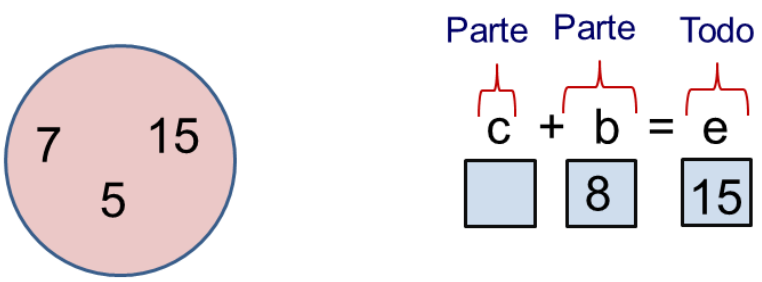


Ilustração 19: Tarefa 4 – determinação do todo
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Na igualdade representada algebricamente, o *todo* está representado por ***e***, as *partes* estão representadas por ***c*** e ***b****.*

Dentre as possibilidades circuladas, a opção que representou o *todo* foi o valor aritmético quinze (15), visto que os outros valores sugeridos na tarefa (7 e 5) são menores que a *parte* já conhecida, oito (8).

Em relação a representação algébrica tem-se: ***c*** é uma *parte* de valor aritmético ainda desconhecido, que adicionado a outra parte ***b***, de valor aritmético oito (8), resultam em ***e***. Ou seja, somadas, são iguais ao *todo* ***e***, cujo valor é aritmético quinze (15).

E qual dos valores, sete (7) ou cinco (5) representa o valor da *parte* ***c***, desconhecida (Ilustração 21)?

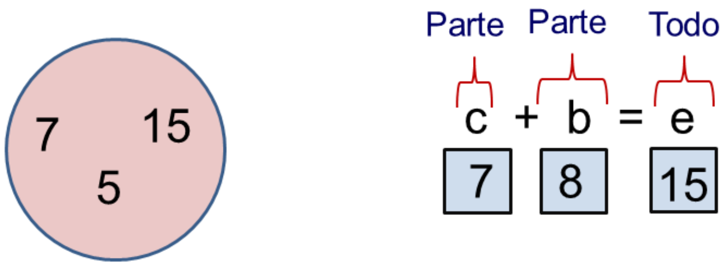


Ilustração 20: Tarefa 4 – parte c completa
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Embora, os números sete (7) e cinco (5) sejam menores que o *todo* quinze (15), apenas o valor aritmético sete (7) representa a parte desconhecida. Assim, a *parte* sete (7) adicionada a outra *parte* oito (8) resultam no *todo* quinze (15). O que resulta na sentença fechada **7 + 8 = 15**.

<u>**Tarefa 4b:**</u> A segunda igualdade **a – c = k** (Ilustração 22), está apresentada, genericamente, a partir da operação inversa à anterior, a subtração. Um de seus valores (***c***), já está determinado aritmeticamente, sete (7). Para determinar o valor aritmético das duas representações algébricas (***a*** e ***k***), há três opções singulares, circuladas ao lado esquerdo da ilustração (4, 6 e 13).

Antes de determinar os valores aritméticos das representações ***a*** e

Ilustração 21: Tarefa 4 – representação algébrica da subtração
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

k, deve-se identificar o *todo* e as *partes* (Ilustração 23) (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Para isso, sabe-se que o *todo* subtrai uma das *partes* para resultar e igualar ao valor de outra das *partes*.

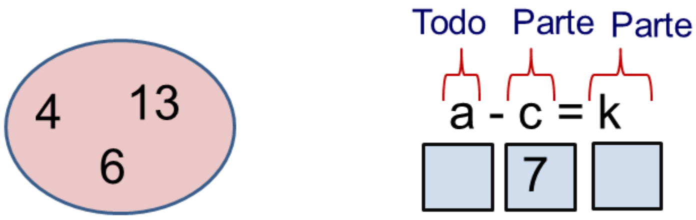


Ilustração 22: Tarefa 4 – Todo e partes
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

A igualdade **a – c = k** está significada por, ***a*** igual ao *todo* ainda desconhecido, ***c*** uma das p*artes* de valor aritmético conhecida por sete (7) e ***k*** outra *parte* também desconhecida.

Para obter o valor aritmético da igualdade, no registro da operação de subtração, é melhor determinar primeiro o valor do *todo*, e só após isso, o valor da outra *parte* (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Dentre os valores para completar (4, 13 e 6), o *todo* desconhecido será?

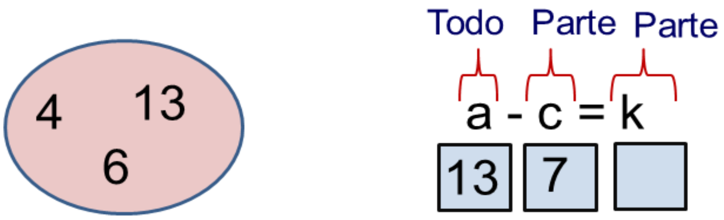


Ilustração 23: Tarefa 4 – Todo escolhido
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Sabe-se que o *todo* deve ser maior que as *partes*, por isso, dentre os valores (4, 6 e 13) escolheu-se a opção aritmética treze (13). A determinação foi por ser a única das opções aritméticas, de maior valor que a *parte* já definida, sete (7).

Na igualdade, tem-se o todo ***a*** de valor treze (13), a *parte* já conhecida ***c*** de valor sete (7), e outra *parte* de valor aritmético desconhecido representado algebricamente por ***k***.

Para o cálculo do valor aritmético, da *parte* desconhecida ***k***, tem-se o *todo* ***a*** de valor aritmético treze (13), que se subtrai a *parte* ***c***, cujo valor aritmético sete (7). Qual dos valores (4 e 6), representa a *parte* desconhecida ***k*** (Ilustração 25)?

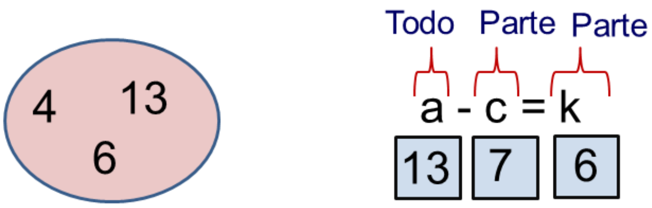


Ilustração 24: Tarefa 4 – Valor aritmético k
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Dentre os valores aritméticos quatro (4) e seis (6), apresentados como opção para representar a *parte* ***k***, somente o valor aritmético seis (6) poderia ser considerado, com este movimento, concluiu-se a sentença fechada **13 – 7 = 6**.

Assim, na igualdade **a – c = k**, o valor de ***a*** é treze (13), que ao subtrair a *parte* ***c***, de valor sete (7), resulta no valor seis (6), que corresponde a outra *parte* ***k***.

Os modelos abstratos **c + b = e**, **a – c = k**, das operações de adição e subtração, representam o movimento universal determinado pela relação *todo-partes*. A tarefa pré-determinava um valor singular para cada modelo. Na adição, o valor aritmético era oito. E, na subtração, o valor aritmético era sete. A partir da determinação dos demais valores singulares, obteve-se a representação concreta do modelo universal abstrato.

> Um importante componente da matéria escolar é o método de seu ensino, o qual é determinado pelo seu conteúdo e pelo programa da disciplina. Por exemplo, se o conteúdo da matéria escolar está estruturado em correspondência com o princípio da ascensão do pensamento do abstrato ao concreto, o método de ensino a ser empregado pelo professor deve assegurar uma atividade de estudo em cuja realização as crianças possam se apropriar de forma precisa este conteúdo. O professor emprega um método semelhante quando por exemplo introduz no processo de ensino o sistema de tarefas de estudo, cuja realização possibilitará a formação, nos escolares, das correspondentes ações de estudo. Este método permite aos alunos se apropriarem dos conhecimentos teóricos segundo o princípio da

> ascensão do pensamento do abstrato ao concreto (DAVÍDOV, 1988 p. 194).

Rigon, Asbahr e Moretti (2010), com base em Leontiev, falam sobre a atividade pedagógica que é desenvolvida para a “transformação do indivíduo no processo de apropriação do conhecimentos e saberes”. E o professor com a função primordial para tal ação educativa, tem por finalidade direta à organização do ensino para que os conhecimentos elaborados pela humanidade possam ser apropriados pelos indivíduos.

No ambiente escolar a criança deve apropriar-se, de acordo com Davydov (1982) do conhecimento científico, este é o objetivo principal da atividade de ensino. Tal conhecimento é revelado durante o desenvolvimento do sistema de tarefas davidoviano. Ou seja, tais proposições, são fundamentadas no método de ascensão do abstrato ao concreto.

Tarefa 5a: Determine os números desconhecidos e corrija os erros quando houver.

A igualdade (Ilustração 26) **a – k = c** representa a operação de subtração. Os valores algébricos ***a*** e ***c***, já estão definidos com valores aritméticos (8 e 14).

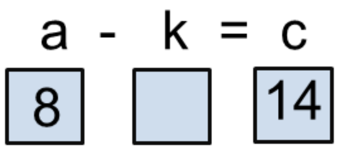


Ilustração 25: Tarefa 5 – representação algébrica com um valor à completar
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Na sentença anterior (Ilustração 26), ***a*** = 8 e ***c*** = 14, e o valor de ***k*** ainda é desconhecido. Para determinar o valor desconhecido, faz-se necessário realizar o seguinte raciocínio: de oito (8), se subtrai quanto para resultar em quatorze (14)?

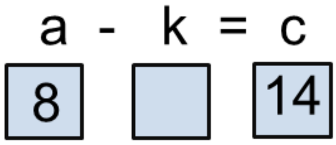


Ilustração 26: Tarefa 5 - Valor desconhecido de k
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

A igualdade **a – k = c** é uma “pegadinha” (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Trata-se de uma tarefa na qual o professor verifica se a criança realmente se apropriou do assunto estudado. As tarefas até aqui apresentadas revelam a seguinte ideia: o *todo* subtraído de uma das *partes* resulta no valor da outra *parte.* Assim, nos limites dos números Naturais, o valor do *todo* é maior ou igual às suas *partes*.

Na igualdade em análise (Ilustração 27), ***a*** representa o *todo*, ***k*** e ***c*** são as *partes*. As *partes* devem ser menores ou uma delas igual ao valor de ***a***. Mas, isso não ocorre na igualdade **a – k = c**. Pois, como, do valor aritmético oito (8) irá se subtrair um número, no limite dos Naturais, para resultar em quatorze (14)? Oito menos quanto resulta em quatorze? Matematicamente, trata-se de uma tarefa sem solução nos limites do campo aritmético considerado. Existem outros campos aritméticos para além dos Naturais, a operacionalização destes será introduzida mais tarde. A ideia de número real introduzida em Davydov desde o primeiro ano escolar está fundamentada no estudo das relações entre grandezas contínuas e sua localização na reta numérica (ROSA, 2012).

O valor aritmético da parte ***c***, representado aritmeticamente por quatorze (14), nessa igualdade (8 – k = 14), é maior que o valor do *todo* ***a*** (8).

Sugere-se então, reorganizar os valores, na igualdade, com base na relação *todo-partes* (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Para o cálculo do valor desconhecido, organiza-se os valores conhecidos da igualdade, de modo que o valor aritmético maior represente o *todo*, e o menor, uma das *partes*, conforme ilustração 28.

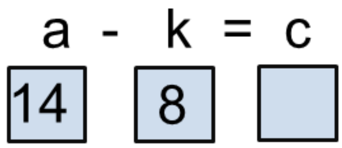


Ilustração 27: Tarefa 5 - Valor do todo e das partes organizados
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Na igualdade (Ilustração 28) tem-se ***a*** = 14, ***k*** = 8 e ***c*** ainda é um valor desconhecido.

Reorganizada a igualdade, vale estabelecer, conforme a ilustração 29, a relação entre as representações algébricas e aritméticas do *todo* e das *partes* (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

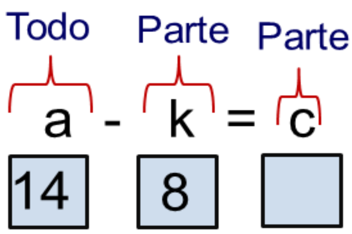


Ilustração 28: tarefa 5 – Relação todo-partes
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Na igualdade, tem-se o *todo*, representado algebricamente por ***a*** e aritmeticamente por quatorze (14). Uma das *partes* é representada algebricamente por ***k*** cujo valor aritmético é oito (8) e a outra *parte*, representada algebricamente por ***c***, possui valor aritmético desconhecido.

Tem-se o *todo* quatorze (14), que subtraído a *parte* oito (8), resultará em quanto a outra *parte*?

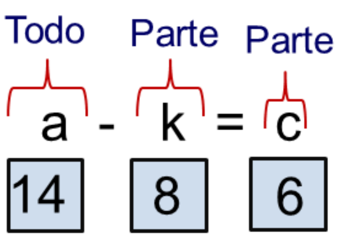


Ilustração 29: Tarefa 5: Todo e partes aritmeticamente
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Logo, do *todo* quatorze (14) subtrai-se a *parte* oito (8) e resultam seis (6), a outra *parte* até então desconhecida do ponto de vista aritmético.

A relação do *todo e* das *partes* referente a sentença fechada **14 – 8 = 6** pode ser representada por meio do esquema geométrico (Ilustração 31).

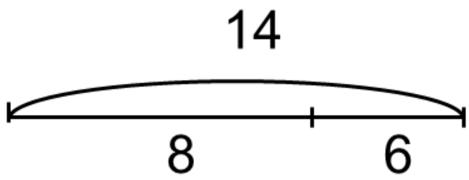


Ilustração 30: Tarefa 5 – Esquema parte e todo
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

No esquema (Ilustração 31), referente a operação da subtração **a – k = c**, verifica-se a relação interna dos valores aritméticos das *partes* e do *todo*. Subtrai-se o valor da *parte* oito (8) do *todo* quatorze (14) e resultará no valor da outra *parte* seis (6). Por meio da operação inversa, a adição, tem-se as *partes* oito (8) e seis (6), que juntas, compõem o *todo*, quatorze (14).

<u>Tarefa 5b:</u> Apresenta-se igualdade **e – m = p** (Ilustração 32), com valor aritmético definido para ***p***.

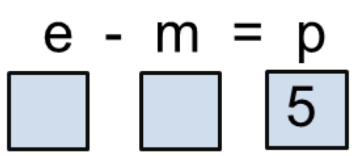


Ilustração 31: tarefa 5 – representação algébrica de subtração
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Na igualdade, o valor algébrico de ***p*** já está representado aritmeticamente por cinco (5). Para o cálculo dos valores algébricos (***e*** e ***m***), faz necessário o seguinte raciocínio: quanto se subtrai de quanto para resultar em cinco (5)?

Antes de proceder o cálculo, analisa-se a representação algébrica com base na relação entre o *todo* e as *partes* (Ilustração 33).

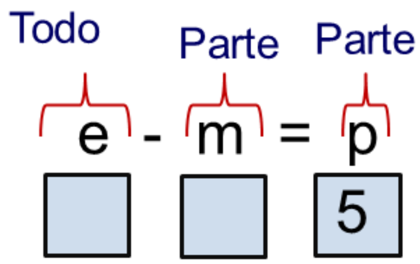


Ilustração 32: Tarefa 5 – nomeação todo-partes
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Esta igualdade é uma pegadinha. Não há uma única resposta. Existem infinitas possibilidades inclusive nos limites dos Naturais, uma vez que há, apenas, um valor conhecido (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). O *todo*, representado algebricamente por ***e***, ainda não possui valor aritmético conhecido. A *parte* ***m***, também não. E, a outra *parte* ***p*** o valor aritmético já é conhecido, cinco (5).

Dentre as infinitas opções, mesmo nos Naturais, escolhe-se, aleatoriamente, um valor aritmético para a variável ***e*** (*todo)*, ou para variável ***m*** (*parte*). Porém, com a limitação em relação à escolha do valor aritmético para representar o *todo*. Este deve ser maior que a *parte* já conhecida (cinco). A título de exemplificação, toma-se o valor aritmético oito (8) para representar o *todo* (Ilustração 34).

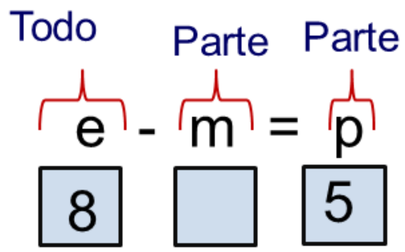


Ilustração 33: Tarefa 5 – Valor aritmético para todo
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Para determinar o valor da outra *parte* desconhecida, cabe a seguinte questão: qual valor aritmético que, acrescido à *parte* conhecida (5), resulta no *todo* (8)?

E, se a referência for o movimento inverso (Ilustração 35), a partir do valor do *todo* oito (8), qual será o valor da *parte* desconhecida? Ou seja, quanto subtraído de oito (8) resulta em cinco (5)?

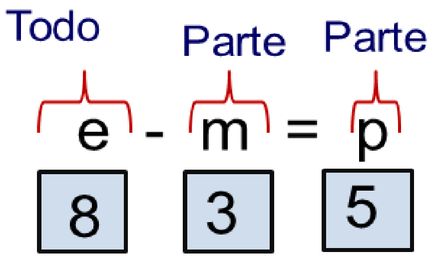


Ilustração 34: Tarefa 5 – parte completa
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Determinou-se o valor da *parte* desconhecida, a partir do seguinte raciocínio: do *todo*, oito (8) subtraído a *parte* três (3), resultou no valor aritmético da outra *parte* cinco (5). Outra forma de representar a operação do *todo* e as *partes* é por meio do esquema conforme a ilustração 36 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

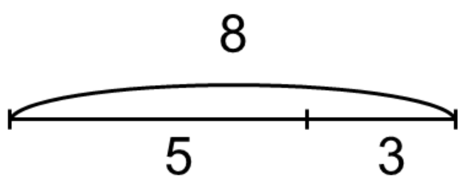


Ilustração 35: Tarefa 5 - Esquema todo e partes
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

A relação representada por três diferentes modos (algébrica, aritmética e geometricamente, e a mesma: o valor do *todo* é, algebricamente, **e** e, aritmeticamente, 8; o valor da *partes* são, algebricamente, ***m*** e ***p*** e, aritmeticamente, 3 e 5, respectivamente.

O movimento *todo-partes* entre os três elementos consiste, na operação da subtração em: do *todo*, oito subtrai-se a *parte* cinco e resulta no valor da outra *parte*, três. Ou do *todo*, oito subtrai-se a *parte* três e resulta no valor da outra *parte* cinco. Ou ainda, com base na operação da adição, as duas *partes* juntas (três e cinco), compõem o *todo*, de valor aritmético oito.

Tarefa 5c: A terceira igualdade, representada por **n – u = b**, consiste na determinação do valor aritmético de **n** (Ilustração 37).

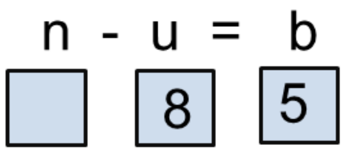


Ilustração 36: Tarefa 5 – Uma das partes desconhecida
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas.

Na representação algébrica **n – u = b**, ***u*** = 8, ***b*** = 5 e o valor aritmético da incógnita ***n*** é desconhecido.

Antes de proceder o cálculo para determinar o valor desconhecido, é essencial analisar a relação entre as *partes* e o *todo* da igualdade (Ilustração 38). O valor aritmético do *todo* ***n*** é desconhecido, e os valores aritméticos das *partes* (***u*** e ***b***), são, respectivamente, oito (8) e cinco (5).

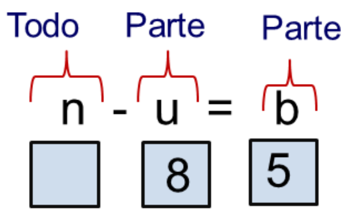


Ilustração 37: Tarefa 5 - Relação todo e partes
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Ao considerar que, oito (8) e cinco (5) são as *partes*, qual é o valor aritmético do *todo* (Ilustração 39)?

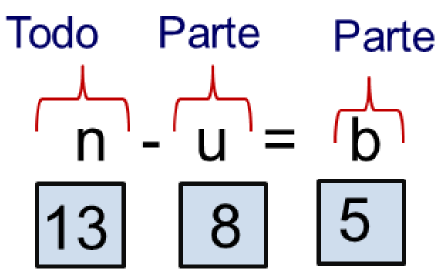


Ilustração 38:Tarefa 5: Todo e partes já completos
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

As partes oito (8) e cinco (5) compõem o *todo* treze (13). A operação realizada consiste em: do todo (13) subtrai-se a parte conhecida (8) e resulta na outra parte (5), conforme representação geométrica a seguir (Ilustração 40):

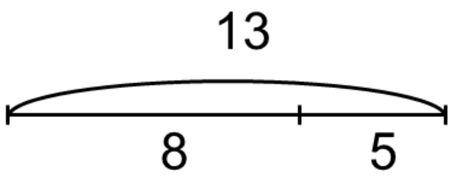


Ilustração 39: Tarefa 5 – Representação geométrica do todo e das partes
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

A síntese da relação *todo-partes* referente a igualdade em análise consiste em: do *todo*, treze, subtrai-se a *parte*, oito e resulta no valor da outra *parte*, cinco. Ou, do *todo*, treze, subtrai-se a *parte* cinco e resulta na outra *parte* oito. Ou ainda, as *partes* juntas, por meio da operação de adição (8 + 5 ou 5 + 8) resultam no valor do *todo* treze.

Há duas “atividades” em um dos livros didáticos analisados que, aparentemente, se assemelham com a tarefa 5 de Davydov, no que se refere a relação do valor desconhecido, conforme as ilustrações 41 e 42:

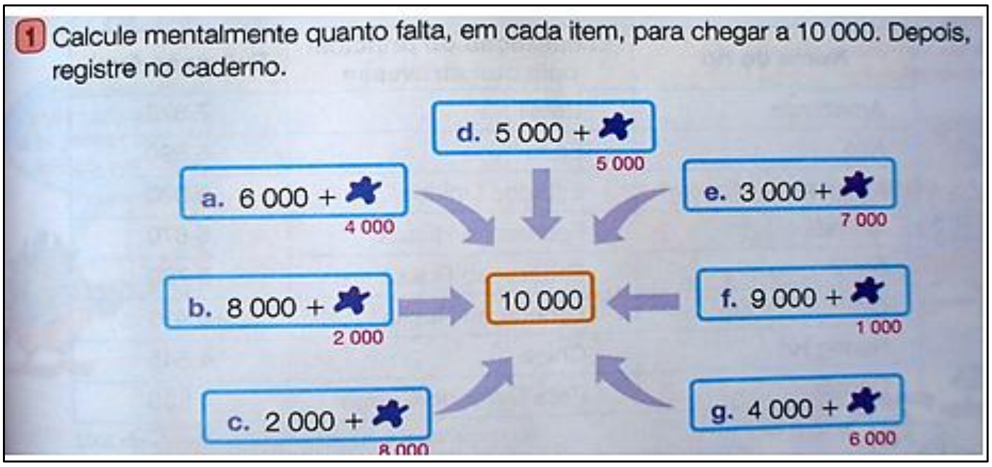


Ilustração 40: Tarefa 5 – “Atividade” do livro didático
Fonte: Centurión, Teixeira e Rodrigues (2011, p.79)

A primeira “atividade” (Ilustração 41) propõe o cálculo mental para determinar quanto falta para chegar a 10000, em cada item.

O valor desconhecido é representado por um desenho, que deve ser substituído pelo valor aritmético, determinado pelo cálculo. Em seguida procede-se o registro no caderno.

Por exemplo, de 5000 para chegar a 10000, faltam 5000, ou, de 6000 para se chegar à 10000, faltam 4000, etc.

A operação utilizada na “atividade”, para de um valor se chegar a outro, é a adição. Não envolve o movimento necessário para inter-relacionar a operação inversa, subtração, no cálculo do valor desconhecido. Pois, a expressão de “quanto falta”, lembra a operação de adição, ou subtração?

O valor desconhecido, nesta “atividade” é sempre referente a segunda parcela. Porque não considerar como valor desconhecido a primeira parcela também? Além disso, não são contempladas as representações geométricas (da soma dos valores aritméticos) e as algébricas (do valor desconhecido). Inclusive, não adota-se a simbologia matemática adequada para representar a igualdade, trata-se de uma seta que indica o caminho de forma “lúdica” para se chegar ao valor de 10000.

A segunda “atividade” foi extraída do livro didático dos autores CENTURIÓN; TEIXEIRA; RODRIGUES (2011). O enunciado solicita que as crianças descubram a parcela que falta em cada adição para que a soma seja sempre 1800.

Ilustração 41: Tarefa 5 “atividade” do livro didático
Fonte: CENTURIÓN, TEIXEIRA e RODRIGUES (2011, p.119)

“Descobrir”? Como ocorre tal descoberta? É esse o papel da criança no ensino tradicional: descobrir! (Ilustração 42). Enquanto que em Davydov as crianças reproduzem o conhecimento produzido historicamente pela humanidade. Neste caso, as crianças calculam, desenvolvem, efetuam... e, nesse processo, revelam a essência dos conceitos dados cientificamente.

Assim como na “atividade” anterior, não se dá o devido cuidado para a simbologia matemática. No lugar da igualdade, são apresentadas as “ruas” que ligam as casas ao valor referência “soma 1800”. Será que a criança, ao “descobrir” a parcela que falta vai compreender que o caminho percorrido representa a igualdade (=)?

A parcela referente ao valor desconhecido estão posicionadas de forma alternada. Porém, não trata-se da propriedade da comutativa da adição. E nem há relação com a operação inversa, a subtração.

Ao centro das casas há o valor do total (1800) ou, na linguagem davydovianas, do “todo”, escrita com a palavra soma: “soma 1800”. É necessário pôr em destaque a palavra “soma” para o resultado de tais operações? O próprio operador (+) já não indica que trata-se da soma? Do modo como as duas “atividades” anteriores são apresentadas reflete o estágio atual do desenvolvimento dos conceitos matemáticos contemplados?

Como diz Giardinetto (1991),

> os procedimentos de ensino contidos na maioria dos livros didáticos não procuram elaborar etapas de ensino que levem o aluno a apropriar-se das formas mais desenvolvidas do processo de elaboração dos conceitos. Em vez disto, os procedimentos apresentam logo de imediato apenas um aspecto do produto final deste processo de construção (GIARDINETTO, 1991, p. 166).

As formas mais desenvolvidas dos conceitos, mencionadas por Giardinetto 1991, são o ponto de partida em Davydov com base na inter-relação entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas. Por outro lado, nas “atividades” em análise, extraídas dos livros didáticos brasileiros, não há a relação com a totalidade do conhecimento teórico.

Tarefa 6: A partir do registro **k + b = c**, elabore o enunciado de um problema (ГОРБОВ, МИКУЛИНА е САВЕЛЬЕВА, 2009).

Tem-se o registro da representação universal da relação *todo-partes, p*or meio da operação de adição (**k + b = c)**. Forma-se o esquema (Ilustração 43), que é uma representação geométrica, da igualdade.

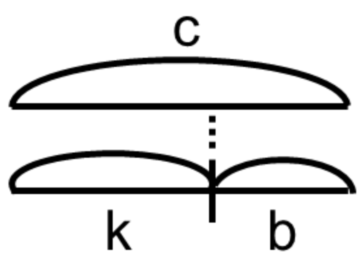


Ilustração 42: Tarefa 6 – Esquema genérico
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

A igualdade representada algebricamente da operação de adição, consiste na *parte* ***k***, adicionada a *parte* ***b***, para resultar no *todo* ***c***. A partir da análise dos dados organizados no esquema elabora-se uma história (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

A título de exemplificação, a história elaborada foi a seguinte: “Há ***c*** lápis na caixa, entre eles ***k*** vermelhos e ***b*** azuis”.

Sabe-se que ***c*** é o *todo* (total de lápis na caixa). Uma das *partes* é denominada por ***k*** (referente aos lápis vermelhos) e ***b*** é a outra *parte* (para lápis azuis).

A partir da história, com base na relação universal (*todo-partes*), elabora-se o enunciado de um problema particular: havia na caixa lápis vermelhos e azuis, em um total de ***c*** lápis. Sabe-se que eram ***k*** vermelhos. Quantos eram azuis?

Elaborado o enunciado do problema, constata-se que há um valor desconhecido a ser calculado, mas, qual deles ***c***, ***b*** ou ***k***? O valor desconhecido é representado no esquema (Ilustração 44).

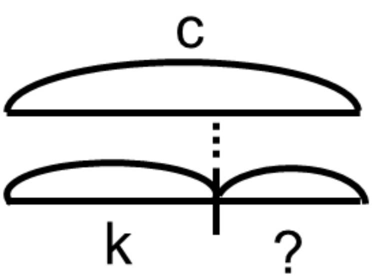


Ilustração 43: Tarefa 6 – Esquema genérico com interrogação
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

No problema, a pergunta é “quantos eram azuis?”. E sabe-se por meio da história elaborada que eram ***b*** azuis. Logo, ***b*** é o valor desconhecido. Este é substituído, nas representações por um sinal de interrogação.

k + b = c
k + ? = c

De acordo com Davydov e seus colaboradores, em Matemática, quando se pretende calcular um valor desconhecido, costuma-se utilizar uma letra, que designa uma incógnita (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Qual é essa letra? Geralmente, utiliza-se em Matemática a letra ***x*** para representar a incógnita. Assim, substitui-se o sinal de interrogação, pela incógnita ***x***. Altera-se novamente o esquema e a igualdade (Ilustração 45):

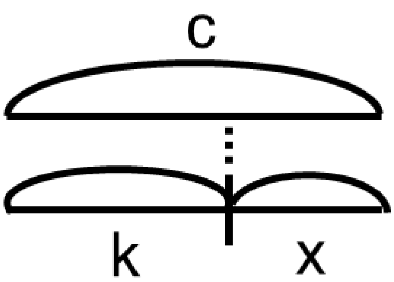


Ilustração 44: tarefa 6 – esquema genérico com incógnita x
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

k + b = c

k + ? = c

k + x = c

Até o momento elaborou-se a história, em seguida o problema, mas somente com valores algébricos, no movimento orientado universal para o particular. A partir do problema, os valores algébricos (***k*** e ***c***) serão substituídos por valores aritméticos singulares.

Para exemplificação, os números utilizados serão 8 e 15 (Ilustração 46). Estes serão representados tanto na igualdade quanto no esquema (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Os números genéricos ***k*** e ***c***, são substituídos pelos valores aritméticos 8 e 15. Mas, 8 é igual a ***k*** ou ***c***? O mesmo questionamento também é válido para o número 15.

k + x = c

8 + x = 15

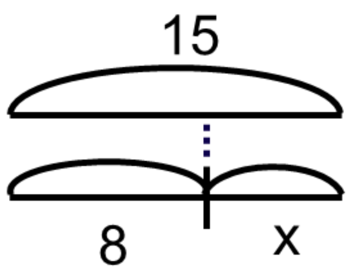


Ilustração 45: tarefa 6 – esquema com valores aritméticos
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Sabe-se, com base na relação *todo-partes*, que uma das *partes* é o valor aritmético desconhecido, e, também, que o *todo* deve ser maior que suas *partes*. Como quinze (15) é maior que oito (8), o primeiro (quinze) representa o *todo* e o segundo (oito) a outra *parte*. Informa-se as crianças que as igualdades com a incógnita são denominadas em matemática por equações.

Após a alteração da igualdade e do esquema reformula-se, também, o enunciado do problema, com a substituição dos valores representados algebricamente pelos aritméticos (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Enunciado reformulado: havia na caixa lápis vermelhos e azuis, em um total de 15 lápis. Sabe-se que eram 8 vermelhos. Quantos eram azuis?

O cálculo do valor desconhecido é fundamentado no seguinte raciocínio: qual número, que adicionado a oito (8) resulta em quinze (15)?

8 + x = 15

8 + 7 = 15

x = 7

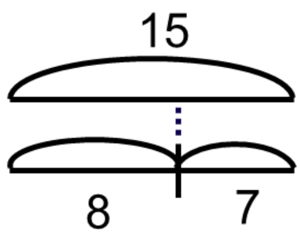


Ilustração 46: tarefa 6 – Esquema todo e partes
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Na equação formada **8 + x = 15**, ao oito, adiciona-se um valor desconhecido, para ser igual ao valor aritmético quinze. O calculo deve ser realizado mentalmente, por meio da reta numérica. Do número oito, adiciona-se sete unidades para a direita até atingir o número quinze. O total de unidades acrescidas representa o valor de ***x***. Portanto o valor aritmético que representa a quantidade singular de lápis azuis, neste problema particular, é sete.

Desse modo, em Davydov, entende-se a equação, em primeiro lugar, como a descrição do problema e só depois como certo registro. A equação, antes de tudo, é mais um formato de representação do problema junto ao esquema (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Portanto, a incógnita (representada aqui pela letra ***x***) faz mais o papel do sinal de interrogação do que representa um número como as outras letras. Ou seja, trata-se de um número a ser encontrado (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Davydov e seus colaboradores apresentam o conceito de equação, suas relações com o conceito de incógnita, no movimento mediado pela composição e estruturação de um problema e na inter-relação com um sistema de representações (aritméticas, algébricas e geométricas). Tal movimento seguiu, na especificidade da tarefa em análise, orientado do universal ao singular. Vale ressaltar que a relação universal, já havia sido revelada nas tarefas precedentes.

De acordo com Costa (1866):

> Para resolver um problema, é necessário aproveitar bem no enunciado a relação existente entre os números dados e a incógnita. Esta relação expressa abreviadamente ou simbolicamente, é o que denomina uma equação. Pôr um problema em equação, é reduzir seu enunciado à expressão mais simples, e representar sua análise com menor número possível de caracteres. [...] A equação é uma expressão simbólica, composta de duas partes separadas pelo sinal (**=**). A parte da esquerda de uma equação chama-se primeiro membro da equação; a outra parte é o segundo membro. Termos da equação são as diferentes partes de cada um dos seus membros, ligadas pelos sinais **+** ou **–** (COSTA, 1866, p. 122).

Caraça (1951) define como equação algébrica toda igualdade obtida igualando um polinômio inteiro a zero. Este, é representado na forma universal: $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$. Para ***n*** inteiro e positivo, chama-se grau da equação; à variável ***x***, chama-se incógnita e aos número $a_0, a_1, \ldots, a_n$, coeficientes da equação. Assim, a forma geral da equação do primeiro grau é expressa por $ax + b = 0,\ a \neq 0$. Pela propriedade de equivalência, se somar-se a ambos os membros da igualdade o número –*b*, ela não se altera ($ax + b – b = 0 – b$), o que resulta em*:* ax = -b. Toda equação do 1º grau, ax + b = 0, tem uma só raiz, e a solução de uma equação, é dada pelo valor que satisfaz a igualdade (CARAÇA, 1951, p. 154).

Nas proposições davydovianas para introdução ao conceito de equação no segundo ano do Ensino Fundamental, são abordadas apenas as equações relacionadas as operações de adição e subtração com coeficientes $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ apenas de valor um (1).

Até a tarefa número cinco, Davydov e seus colaboradores iniciavam pela representação genérica de uma operação. O desenvolvimento das tarefas culminava em uma representação particular composta por valores aritméticos e valores desconhecidos mas sem a sistematização da incógnita. Esta, é introduzida em Davydov, durante o desenvolvimento do sistema de tarefas, a partir de situações geradoras de necessidade da mesma, durante o calculo do valor desconhecido. Trata-se de uma introdução teórica, como síntese das múltiplas determinações que a envolvem, no movimento entre todas as dimensões conceituais (geral, universal, particular e singular).

<u>Tarefa 7:</u> Identifique quais das igualdades são equações. Marque o *todo* e as *partes* somente nas equações. E, investigue a operação a ser realizada para determinar o valor desconhecido com base em um esquema, mas no plano mental (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

9 + x = 16 **35 – 8 = 27** **x – 7 = 5**

A primeira igualdade, **9 + x = 16,** é uma equação? Sabe-se que para ser uma equação é necessário possuir o símbolo de igualdade e a incógnita. Assim, **9 + x = 16** é uma equação.

Para representar o *todo e* as *partes* da equação **9 + x = 16** (Ilustração 48), é necessário considerar que na adição, o *todo* é igual as *partes* juntas.

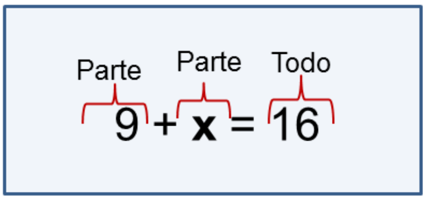


Ilustração 47: Tarefa 7 – Todo e partes
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

O valor aritmético nove é a *parte* conhecida, que adicionada a outra *parte*, de valor aritmético desconhecido resulta no *todo*, dezesseis. Qual número que adicionado a nove resulta em dezesseis (Ilustração 49)?

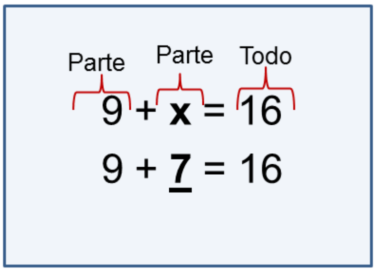


Ilustração 48: tarefa 7 – Calculo do valor da incógnita x
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Para o cálculo do valor da *parte* desconhecida, representada por ***x***, a partir do valor nove, adiciona-se unidades até atingir o número dezesseis. A conclusão é que o valor da incógnita ***x***, é igual a sete.

A segunda igualdade (**35 – 8 = 27**) é equação? Não, **35 – 8 = 27** não é equação, pois não possui incógnita. É uma igualdade determinada aritmeticamente pela operação da subtração.

E, por fim, a terceira igualdade (**x – 7 = 5**) é uma equação? Sim, **x – 7 = 5** é uma equação, pois possui igualdade e incógnita. O *todo* e as *partes* são identificados (Ilustração 50) e procede-se a análise destes.

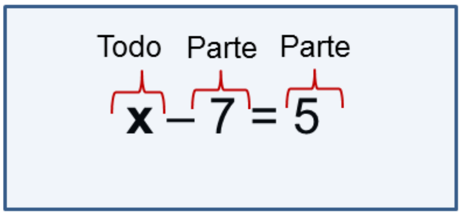


Ilustração 49: Tarefa 7 – Todo e partes definidos
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Qual é o valor da incógnita? Sabe-se que, ao subtrair-se do *todo*, uma das *partes* o resultado será a outra *parte*. Logo, nesta equação, o *todo* é a incógnita representada por ***x,*** que possui o valor aritmético desconhecido. Deste, subtrai-se uma *parte* de valor aritmético sete, para resultar no valor da outra *parte* (cinco).

Para determinar o valor aritmético da incógnita ***x*** cabe a seguinte pergunta: qual número que ao subtrair-se sete resulta em cinco (Ilustração 51)?

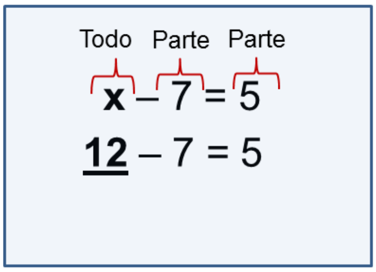


Ilustração 50: tarefa 7 – Cálculo do valor da incógnita x
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Na equação **x – 7 = 5**, ***x*** = 12.

O desenvolvimento do cálculo do valor da incógnita nas equações propostas, conforme propunha o enunciado, deveria ser realizado no esquema, mas no plano mental. Este foi o elemento mediador entre a relação universal e o resultado singular expresso aritmeticamente. Na sequência, apresenta-se os esquemas poderiam mediar o desenvolvimento da tarefa, no plano mental.

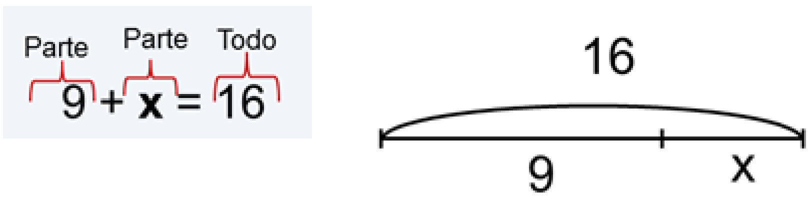


Ilustração 51: tarefa 7 – Esquema a ser idealizado
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Para a primeira equação **9 + x = 16** (Ilustração 52):

No esquema (Ilustração 52), tem-se o *todo* conhecido (dezesseis), uma *parte* conhecida (nove), e a *parte* desconhecida (***x***). Destaca-se que ordem das *partes* pode ser alternadas no esquema. Não há uma ordem definida para a representação das partes no esquema. Conclui-se que a *parte* desconhecida (***x***) tanto no esquema quanto na equação é sete.

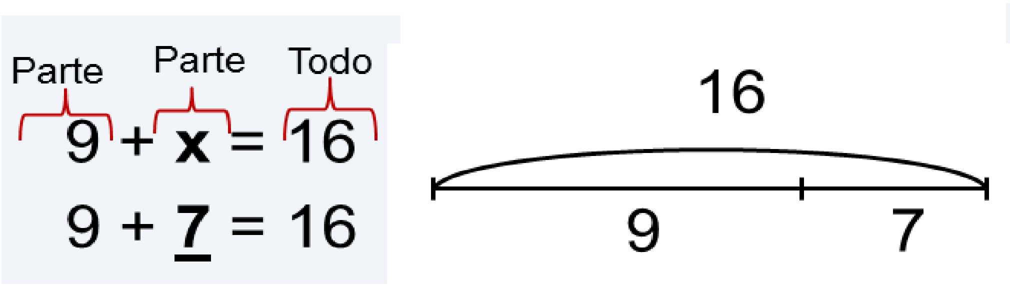


Ilustração 52: Tarefa 7- Esquema a ser idealizado
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Na segunda equação **x – 7 = 5**, terceira igualdade da tarefa, tem-se as *partes* sete e cinco conhecidas e o valor aritmético do *todo* é o desconhecido (***x***). Estes são localizados mentalmente no esquema (Ilustração 54).

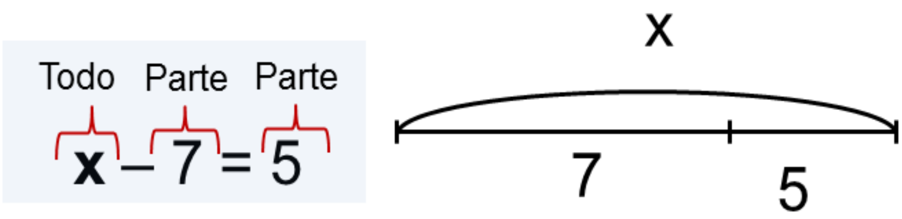


Ilustração 53: Tarefa 7 – Esquema a ser idealizado
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

O valor desconhecido do *todo* (***x***), não pode ser representado em qualquer lugar do esquema. Este é composto pelas as duas *partes*. Logo representa o comprimento total do segmento no esquema. Após a elaboração de tal imagem ideal (Ilustração 54), é possível determinar a operação a ser realizada, que nesta equação incide na subtração. Finalmente calcula-se o valor do número desconhecido.

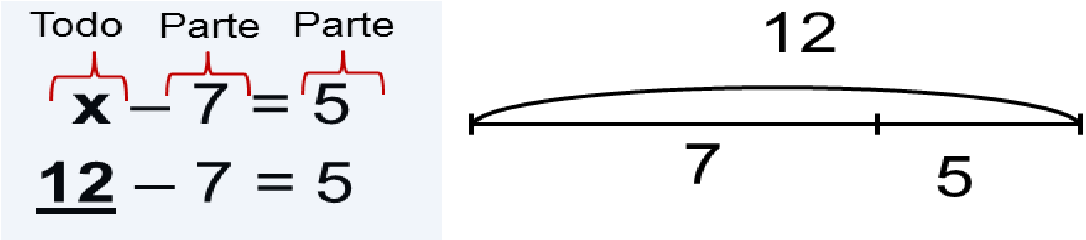


Ilustração 54: Tarefa 7 – Esquema a ser idealizado
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Assim, o número que subtrai sete e resulta em cinco é doze. Ou seja, as *partes* sete e cinco, compõe o valor do *todo*, que juntas são iguais a doze.

Para o cálculo do valor aritmético singular da equação, Davydov e seus colaboradores propuseram um elemento mediador, o esquema. Foi proposto ainda, que a determinação da operação, ou seja, interpretação do problema, fosse realizada mentalmente. Ou seja, as tarefas organizadas no sentido de organiza o pensamento do plano externo para o plano interno. Primeiro, as ações são desenvolvidas, no processo de resolução de problemas, com apoio do esquema dado externamente, fazia-se necessário registrá-lo em uma folha de papel, no quadro, entre outros. Agora, tal registro deve ser apenas imaginado, trata-se de uma ação mental, inerente a generalização teórica.

> A capacidade para orientar-se nestas relações, para operar com elas e, o mais importante, para generalizá-las levando-as à integralidade é o componente principal da capacidade da imaginação. A construção de uma imagem da fantasia torna-se possível como parte no processo de passagem pelo qual a pessoa efetua a transição na sua consciência do todo para as partes, do geral para o particular. Observemos que esta transição em sua forma peculiar é inerente à generalização teórica, que, evidentemente, é própria tanto da criação de uma imagem da fantasia como da construção de conceitos abstratos (isto indica a presença de uma determinada ligação entre a imagem e o conceito científico) (DAVÍDOV, 1988, p. 220).

Para a criança imaginar o esquema e interpretar o problema faz-se necessário que a relação universal e suas múltiplas determinações tenham sido reveladas durante o desenvolvimento das tarefas anteriores. Caso contrário, trata-se apenas do processo empírico de formação de conceitos.

<u>Tarefa 8:</u> Reescreva as equações (x – k = p, a + x = c) com os valores aritméticos 13 e 6.

A primeira igualdade **x – k = p**, é uma equação? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Conclui-se é uma equação porque possui incógnita, e igualdade.

Por se tratar da operação de subtração, ao subtrair uma *parte* do *todo* o resultado será igual a outra *parte*. Ou seja, de ***x*** *se* subtrai ***k*** para se obter o resultado ***p***. Assim, ***k*** e ***p*** são *partes e* ***x*** é o *todo*.

A incógnita (***x***) já é apresentada no primeiro termo desta equação (o *todo*), serão representados, aritmeticamente, o segundo e terceiro termo (Ilustração 56).

Para reescrever a equação genérica em forma particular, a representação da incógnita se mantém. Deste modo, há duas formas de representá-la, com os valores aritméticos treze (13) e seis (6). Uma delas consiste em (Ilustração 56):

$$x - k = p$$
$$x - \square = \square$$
$$x = \square$$

Ilustração 55: Tarefa 8 – Equação com a operação de subtração
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Para representar ***k*** e ***p*** com valores treze (13) e seis (6). Por opção aleatória, primeiramente completa-se, a título de exemplificação, com os seguintes valores: ***k*** = 13 e ***p*** = 6.

$x – k = p$

$x – 13 = 6$

Sabe-se que, as *partes* juntas resultam no valor do *todo*, logo o *todo* desconhecido é? Qual o valor que, subtraído de treze (13) resulta em seis (6)?

$x - k = p$

$x - 13 = 6$

$x = 19$

O *todo* é maior que suas *partes*. Desse modo, para calcular o valor desconhecido, do *todo* (***x***), faz-se necessário juntar 13 e 6. Por meio da operação inversa (de subtração para adição): o minuendo (13) é adicionado ao valor da diferença ou resto (6). Estes compõem o valor do *todo* desconhecido, dezenove. Assim, o valor aritmético, singular, de ***x***, para ***k*** = 13 e ***p*** = 6, é dezenove.

E para ***k = 6*** e ***p = 13***, qual seria valor aritmético do *todo* (***x***) na equação? Qual o valor que se subtrai seis e resulta em treze?

$x - k = p$

$x - 6 = 13$

$x = 19$

Como ***k*** e ***p*** são *partes,* não importa a ordem em que eles são apresentados, juntos, compõem o *todo*.

Na segunda igualdade (**a + x = c**), representada pelo valor algébrico de ***a***, adicionado um valor desconhecido (a incógnita ***x***), resulta em ***c***, é uma equação? Sim, é uma equação, pois possui incógnita e igualdade.

Sabe-se que as partes juntas, resultam no valor do *todo.* Porém, uma das *partes* é o valor desconhecido ***x***. Para determiná-la, tem-se a outra *parte* (***a***) e o *todo* (***c***).

Para utilizar os valores aritméticos treze (13) e seis (6), na igualdade em referência, faz-se necessário uma análise cuidadosa, da relação *todo-partes* (Ilustração 57). Pois, nessa situação, os valores aritméticos não podem ser posicionados, aleatoriamente, em qualquer um dos termos da equação. Para manter-se a igualdade tem-se um valor (***a***) que adicionado a ***x*** resulta no outro valor (***c***).

$$a + x = c$$
$$\boxed{} + x = \boxed{}$$
$$x = \boxed{}$$

Ilustração 56: Tarefa 8 – equação com a operação de adição
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Para **a = 13** e **c = 6**, tem-se o valor aritmético treze, que adicionado a um valor desconhecido (***x***), resulta em seis. Como é possível, nos limites dos números Naturais, resolver a equação **13 + x = 6**?

Qualquer valor, no campo dos Naturais, adicionado a treze (13), não resultará em seis (6). Assim, o valor aritmético seis deve ser considerado como *parte* (***a***) e treze como o *todo* (***c***).

a + x = c
6 + x = 13

Para resultar no número treze, seis deverá ser adicionado a quanto?

a + x = c
6 + x = 13
x = 7

A uma das *partes*, seis, adiciona-se a outra *parte* sete, para atingir o *todo*, treze.

Em síntese, na primeira equação, o valor aritmético obtido para a incógnita foi dezenove e na segunda equação o valor foi sete. Cabe aqui o seguinte questionamento: por que os valores obtidos foram diferentes para incógnita, se os números considerados, nas duas equações foram os mesmos (13 e 6)? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА е САВЕЛЬЕВА, 2009). A resposta para esse questionamento pode ser fundamentada com base nos esquemas referentes as equações em análise.

O esquema para a primeira equação **x – 13 = 6** consiste em (Ilustração 58).

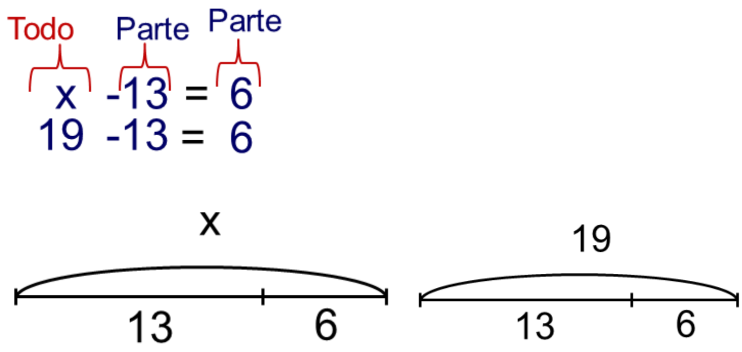


Ilustração 57: Tarefa 8 – esquema todo partes equação subtração
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

O valor do *todo* era desconhecido ***x***, e as *partes* eram treze e seis. Juntas totalizaram o valor aritmético do *todo* (dezenove).

O esquema para a segunda equação **6 + x = 13** é (Ilustração 59):

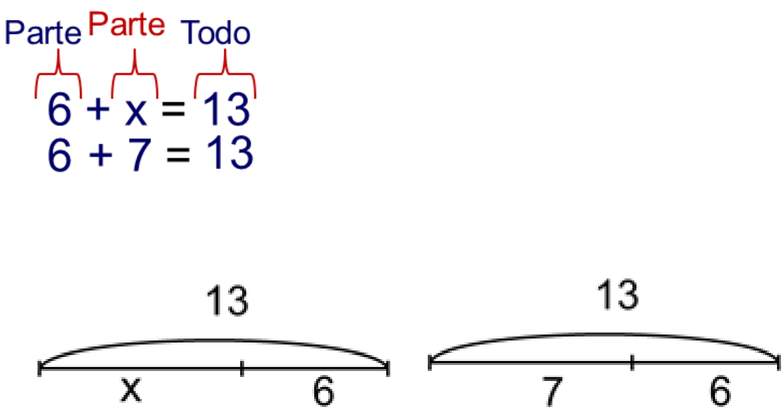


Ilustração 58: Tarefa 8 – Esquema todo partes equação
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

O valor aritmético do *todo* é treze, logo, as *partes* que são menores, uma já foi definida previamente pelo valor aritmético seis (6) e a outra, o valor era desconhecido (***x***). Por meio do cálculo, obteve-se o número sete (7).

<u>Tarefa 09:</u> Resolva com uma calculadora, o valor aritmético da incógnita ***x***, para as equações: **x – 27 = 46** e **84 – x = 52.**

A tarefa 09 propõe a utilização da calculadora. Tal orientação vai ao encontro do que propõe a Proposta Curricular de Santa Catarina (1998):

> A calculadora como um instrumento tecnológico utilizado socialmente, deve ser explorada didaticamente em sala de aula com vistas a: a) apropriação dos recursos tecnológicos deste tempo, fundamental para a formação do cidadão desta sociedade; b) compreensão do processo realizado pela calculadora e; c) compreensão das várias formas de cálculo (SANTA CATARINA, 1998, p. 109 -110).

Proposições de ensino que envolvam as tecnologias como recurso didático, neste caso em particular o uso da calculadora, atendem aos pressupostos da teoria Histórico-Cultural, desde que o movimento conceitual contemples a relações entre o geral, universal, particular e singular. Ou seja, desde que os conceitos sejam tratados teoricamente.

A primeira igualdade (**x – 27 = 46**) é uma equação? Sabe-se que é uma equação, pois possui igualdade e incógnita. É possível resolvê-la?(ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Sim, é possível, pois existe um número que ao subtrair (27), resulta em (46). Ou seja, vinte e sete (27) e quarenta e seis (46) são *partes* que compõem o *todo* ainda desconhecido.

Qual operação matemática, nesta equação, pode ser realizada para determinar o valor da incógnita ***x***? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Nas tarefas anteriores, o significado do ***x*** era determinado a partir da reta numérica ou mentalmente, pois os valores até então eram, relativamente, baixos. A partir desta tarefa, com o uso da calculadora, é preciso determinar quais são as operações aritméticas que permitirão calcular, com exatidão, o valor desconhecido.

Por isso, antes do cálculo do valor desconhecido, representa-se o *todo* e as *partes* da equação (Ilustração 60).

$$\overbrace{x}^{\text{Todo}} - \overbrace{27}^{\text{Parte}} = \overbrace{46}^{\text{Parte}}$$

Ilustração 59: Tarefa 09 – Todo e partes da equação
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Na equação **x – 27 = 46**, do *todo* de valor aritmético desconhecido, se subtrai a *parte*, de valor aritmético vinte e sete. Tal operação resulta na outra *parte* quarenta e seis.

Para o cálculo do valor da incógnita, cabe a seguinte questão: qual número que subtraído de vinte e sete resulta em quarenta e seis? Para responder essa questão, faz-se necessário, por meio da operação de adição, adicionar as *partes* para resultar no *todo* desconhecido (Ilustração 61).

$$\overbrace{x}^{\text{Todo}} - \overbrace{27}^{\text{Parte}} = \overbrace{46}^{\text{Parte}}$$

$$x = 46 + 27$$

$$x = 73$$

Ilustração 60: Tarefa 09 – Cálculo do valor aritmético da incógnita x
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Conforme ilustrado anteriormente, para o cálculo da incógnita ***x***, opera-se com as duas partes (46 + 27) que compõem o *todo*, por meio da operação de adição. O resultado é setenta e três. Logo, **x = 73**.

A mesma equação, também pode ser representada geometricamente no esquema (Ilustração 62). Nesta representação, objetiva-se a explicação da necessidade de se unir as *partes* para compor o *todo* até então desconhecido.

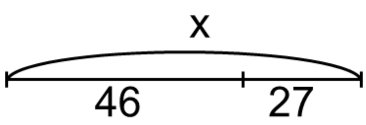


Ilustração 61: Tarefa 09 – Equação representada por esquema
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Por meio do esquema, pode-se visualizar, geometricamente, que à *parte* quarenta e seis (46) se adiciona a outra *parte* vinte e sete (27). Juntas, compõem o *todo*, representado por ***x***.

A partir do cálculo (46 + 27) determina-se o valor aritmético do *todo* (73). Assim, tem-se que ***x*** = 73 (Ilustração 63).

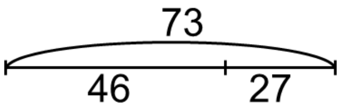


Ilustração 62: Tarefa 09 – Esquema com valor da incógnita calculado
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Em síntese, do *todo* (73), se subtrai a *parte* (46) e resulta no valor da outra *parte* (27). Ou, do *todo* (73), se subtrai o valor da *parte* (27) e resulta no valor da outra *parte* (46). Ou, ainda, as *partes* (46) e (27), por meio da adição, compõem o *todo* (73).

A segunda igualdade **84 – x = 52** é uma equação? É uma equação, pois possui igualdade e incógnita. É possível resolvê-la? Ou seja, é possível subtrair um número desconhecido de oitenta e quatro e resultar em cinquenta e dois? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

É possível resolvê-la, pois, existe um número que se subtrai de (84) resulta em (52). Antes do cálculo do valor da incógnita, representa-se *todo* e as *partes* da equação **84 – x = 52** (Ilustração 64).

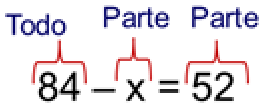


Ilustração 63: Tarefa 09 – Todo e partes da equação
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Do *todo* oitenta e quatro (84), se subtrai a *parte* de valor aritmético desconhecido, e resulta no valor da outra *parte* cujo valor aritmético é cinquenta e dois (52). Assim, de oitenta e quatro (84) se subtrai quanto (***x***), para resultar em cinquenta e dois (52)?

Qual operação deve ser realizada para determinar o valor de ***x***? A operação a ser realizada é a de subtração, uma vez que o todo e uma das partes são conhecidos. Assim, do *todo* (84) se subtrai a *parte* (52) e resulta no valor da outra *parte* (32), conforme ilustração 65:

$$\overbrace{84}^{\text{Todo}} - \overbrace{x}^{\text{Parte}} = \overbrace{52}^{\text{Parte}}$$
$$84 - 52 = x$$
$$32 = x$$

Ilustração 64: Tarefa 09 – Cálculo do valor aritmético da incógnita x
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

A equação **84 – x = 52** pode ser representada geometricamente pelo esquema (Ilustração 66). Neste, é possível visualizar a relação entre o *todo* e as *partes* que determina a realização da operação de subtração (84 – 52) para obtenção do valor da incógnita ***x*** (32).

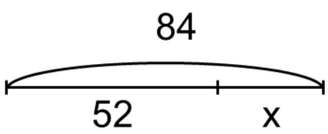


Ilustração 65: Tarefa 09 - Equação representada por esquema
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Do *todo*, oitenta e quatro, se subtrai a *parte* cinquenta e dois, o que resulta no valor até então desconhecido (32), conforme ilustração 67.

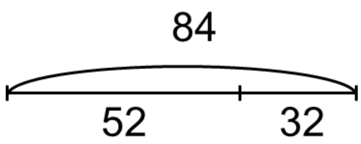


Ilustração 66: Tarefa 09 – Esquema com valores aritméticos
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

As duas equações resolvidas no decorrer da tarefa em análise (x – 27 = 46 e 84 – 52 = 32), são apresentadas com o operador “menos”. Ou seja, foram elaboradas a partir da operação de subtração. Mas, a operação utilizada para calcular o valor da incógnita, foi diferente. Na primeira a adição e na segunda a subtração.

Onde está o erro? Na solução da primeira equação ou da segunda? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Na primeira equação, as *partes* juntas resultam no *todo* desconhecido. Ou seja, nessa equação, a incógnita era o *todo* (Ilustração 68).

$$x - 27 = 46$$
$$x = 46 + 27$$
$$73 = 46 + 27$$

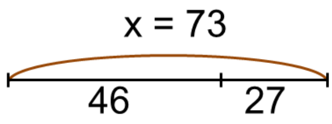


Ilustração 67 Tarefa 09 – Esquema comparação todo e partes
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Já na segunda equação, a incógnita era uma das *partes*: do *todo se* subtrai uma *parte* conhecida e resulta no valor da outra *parte* (Ilustração 69).

$$84 - x = 52$$
$$84 - 52 = x$$
$$84 - 52 = 32$$

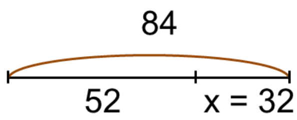


Ilustração 68 Tarefa 09 – Esquema comparação todo e partes
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Ou seja, não se trata de um erro. Num caso o valor desconhecido, a incógnita, era *todo* e, no outro, o valor desconhecido era a *parte* (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Em Davydov, o procedimento de resolução de equações não é apresentado por meio de regras do tipo: se está somando, passa para o outro lado da igualdade diminuindo; ou, se está diminuindo, para o outro lado da igualdade, somando. Tal conduta é característica do ensino tradicional.

Tarefa 10: Componha as equações e compare as soluções.

Com base no esquema (Ilustração 70), deve-se compor as três igualdades da tarefa: (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

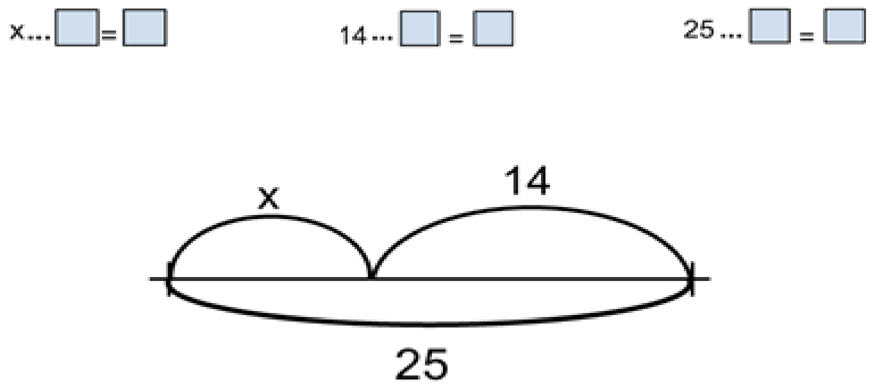


Ilustração 69: Tarefa 10 – esquema todo e partes
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

No esquema, o *todo* de valor aritmético vinte e cinco e as *partes* que compõem esse *todo* são de valor aritmético desconhecido (***x***) e valor aritmético quatorze.

Primeira igualdade (Ilustração 71):

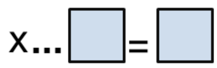


Ilustração 70: Tarefa 10 - Primeira igualdade para completar
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

A incógnita (***x***) já está apresentada no primeiro termo da equação. Serão representados, aritmeticamente, o segundo e terceiro termo, juntamente com a operação a ser definida (Ilustração 71).

Por meio do esquema (Ilustração 70), constata-se que a incógnita (***x***) é uma *parte* e, para representar a equação, restam o *todo*, vinte e cinco (25) e a *parte* quatorze (14). Se a incógnita (***x***) é uma *parte*, não poderá ser adicionada ao *todo* vinte e cinco (25).

Logo, para representar na igualdade: a incógnita (***x***) que é uma *parte,* deverá se unir à outra *parte* quatorze (14), juntas, por meio da operação de adição, irão compor o *todo,* vinte e cinco (25), conforme ilustração 72.

$$x \dotplus \boxed{14} = \boxed{25}$$

Ilustração 71: Tarefa 10 – Todo, parte e operação completos
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Qual o número adicionado a quatorze resulta no valor de vinte e cinco? Para o cálculo do valor aritmético de (***x***), do *todo* vinte e cinco (25) se subtrai a *parte* conhecida quatorze (14) e resulta em quanto (Ilustração 73)?

$$x \dotplus \boxed{14} = \boxed{25}$$
$$x + 14 = 25$$
$$x = 25 - 14$$
$$x = 11$$

Ilustração 72: Tarefa 10 – Cálculo da equação
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Do *todo* vinte e cinco, se subtrai a *parte* quatorze e resulta no valor singular da outra *parte,* onze. Ou seja, para **x = 11**, temos a *parte* onze, adicionada a outra *parte* quatorze, estas compõem o *todo* vinte e cinco.

A segunda igualdade (Ilustração 74).

$$14 \ldots \boxed{} = \boxed{}$$

Ilustração 73: Tarefa 10 – Segunda igualdade para completar
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Na segunda igualdade, já está representado o valor aritmético quatorze (14), no primeiro termo. Serão representados, o segundo e terceiro termo, juntamente com a operação a ser definida (Ilustração 74).

Por meio do esquema, constata-se que quatorze (14) é uma *parte* e, para representar a equação, restam o *todo* vinte e cinco (25) e a *parte* (***x***).

Se a *parte* quatorze (14), já está representada na igualdade, a operação é adição, visto que as *partes* juntas compõem o *todo*.

Conforme o esquema (Ilustração 70), a outra *parte* é a incógnita ***x*** e, para representar no segundo membro, resta o *todo* vinte e cinco (25), conforme ilustração 75.

$$14 \overset{+}{\dots} \boxed{x} = \boxed{25}$$

Ilustração 74: Tarefa 10 – Todo, parte e operação completos
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Na equação ilustrada anteriormente (75) tem-se a *parte* quatorze (14) adicionada a outra *parte* de valor desconhecido ***x***. Ambas compõem o *todo* vinte e cinco (25).

A quatorze, se adiciona quanto para resultar em vinte e cinco? Ou, do *todo* vinte e cinco (25), ao se subtrair a *parte* quatorze (14), resultará em quanto (Ilustração 76)?

$$14 \overset{+}{\dots} \boxed{x} = \boxed{25}$$

$$14 + x = 25$$

$$x = 25 - 14$$

$$x = 11$$

Ilustração 75: Tarefa 10 – Cálculo da equação
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Assim, o valor singular da incógnita é: **x = 11.** Quatorze e onze, juntos, são iguais a vinte e cinco.

Terceira igualdade (Ilustração 77):

$$25 \dots \boxed{} = \boxed{}$$

Ilustração 76: Tarefa 10 – Terceira igualdade para completar
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

A terceira igualdade está representada inicialmente, pelo valor aritmético vinte e cinco (25). Por meio do esquema (Ilustração 70), constata-se que é o *todo.* A operação não poderá ser adição, pois ao *todo* não se adiciona à *parte.*

Do *todo*, vinte e cinco (25), se subtrai uma *parte,* para obter o valor de outra *parte*. Logo, o esquema, possui duas partes: quatorze (14) e (***x***). Escolheu-se, aleatoriamente, a *parte* quatorze para o segundo termo, e a incógnita (***x***) foi registrada após a igualdade (Ilustração 78).

$$25 \overset{-}{\ldots} \boxed{14} = \boxed{x}$$

Ilustração 77: Tarefa 10 – Todo, parte e operação completos
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Do todo, vinte e cinco, se subtrai a *parte* de valor aritmético quatorze e resulta no valor desconhecido (***x***). Assim, de vinte e cinco se subtrai quatorze e resulta em quanto?

$$25 \overset{-}{\ldots} \boxed{14} = \boxed{x}$$
$$25 - 14 = x$$
$$11 = x$$
$$x = 11$$

Ilustração 78: Tarefa 10 – Cálculo da equação
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

A *parte* referente ao valor aritmético da incógnita (***x***), no esquema, é onze, assim como também, na equação. Para **x = 11**, tem-se (Ilustração 80):

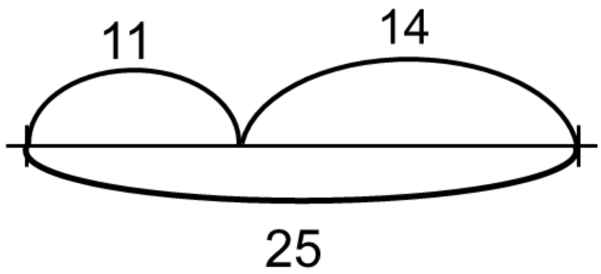


Ilustração 79: Tarefa 10 – Cálculo da equação
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Do *todo*, vinte e cinco, se subtrai a *parte* quatorze (14), o que resulta no valor da outra *parte*, onze (11).

Qual a solução das três equações?

Simultaneamente, para as três equações, a solução resultou no mesmo valor aritmético onze (11). Ou seja, o valor das incógnitas, nas três equações (**x + 14 = 25**, **14 + x = 25** e **25 – 14 = x)**, foi o mesmo valor: **x = 11**.

Cabe o seguinte questionamento: por que este resultado (**x = 11**) se repetiu para nas três equações? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

As três equações possuíam os mesmo termos (25, 14 e x). Porém, em cada equação, estes estavam posicionados em lugares diferentes. As três foram elaboradas a partir de um mesmo esquema universal, que continha os mesmos números singulares *parte* (14), *todo* (25) e a outra parte desconhecida também era a mesma.

Para cada equação particular, formada com base na relação universal *todo-partes,* obteve-se o mesmo valor aritmético singular onze (11).

Em síntese, o sistema de tarefas davydovianas até aqui exposto, para a introdução ao conceito de equação,

> permite construir, sobre a base da igualdade dada, vários tipos de equações (os estudantes concluem que a quantidade de tais equações é igual à quantidade de elementos incluídos na igualdade: *x + a = c, c – x = a, c – a = x*. De acordo com estas equações, as crianças transformam qualquer situação inicial na quantidade correspondente dos chamados problemas texto (DAVÍDOV, 1988, p. 211).

O valor numérico de cada de cada termo da equação pode ser determinado a partir do valor numérico dos outros termos. Além disso, é possível construir tantas equações, quantos componentes existirem na igualdade (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Tal síntese é elaborada durante o desenvolvimento das tarefas. Neste, reproduz-se o sistema de conexões internas do conceito de equação até atingir sua concretude em nível teórico.

Segundo Davídov (1988), o desenvolvimento do pensamento teórico, inicia-se pelas definições abstratas, que direcionam por meio do pensamento, até a reprodução do concreto.

> A tarefa do pensamento teórico consiste em elaborar os dados da contemplação e da representação em forma de conceito e com isso reproduzir omnilateralmente o sistema de conexões internas que geraram o concreto dado, revela sua essência (DAVÍDOV, 1988, p. 142).

Para Davydov (1988), a apropriação científica dos conceitos requer que estes sejam organizados, no ensino, por meio do procedimento de ascensão do abstrato ao concreto.

Durante as ações de estudo as crianças realizam “os procedimentos de reprodução de determinados conceitos, imagens, valores e normas e, através destes procedimentos, se apropriam do conteúdo destes conhecimentos teóricos” (DAVÍDOV, 1988 p. 178).

Vigotski (2000) diz que o ensino não é idêntico aos processos do desenvolvimento psíquico. O ensino, quando corretamente organizado, promove o desenvolvimento mental da criança. Desperta, na criança, uma série de processos de desenvolvimento que não ocorreriam fora do ensino. Portanto, o ensino é necessário e universal para o processo de desenvolvimento da criança. Para o desenvolvimento daquelas características humanas produzidas historicamente pela humanidade.

De acordo com Vygotsky (2000), a aprendizagem e o desenvolvimento não coincidem, embora sejam dois processos que se inter-relacionam. A aprendizagem só é boa quando está à frente do desenvolvimento. Ou seja, quando conduz o desenvolvimento.

Para Davydov (1982), a apropriação do conceito teórico possibilita ao sujeito reproduzi-lo, mentalmente. Tal apropriação requer o domínio do procedimento universal e suas relações com as particularidades e singularidades no plano mental. Após o sujeito tomar consciência dos conceitos teóricos, da relação universal destes, consegue aplicar nas diversas situações particulares que a vida de todos os dias requer.

Para o materialismo Histórico-Dialético, a realidade não se apresenta de imediato ao pensamento. Este capta do real, elementos mais perceptíveis, ou seja, de uma unidade caótica e confusa, que oculta as principais diferenças e aspectos das relações. O pensamento organiza cada parte das múltiplas relações, por meio de abstrações. Afasta-se do real para o entendimento através do processo analítico, assim o todo se decompõe em partes, e cada parte revela detalhes íntimos de todos seus aspectos e propriedades. Agora a imagem do objeto passa a ser o todo compreendido na sua essência (GIARDINETTO, 1991, p. 24).

O autor supracitado complementa ainda que “o pensamento não se encerra em abstrações, mas rearticula cada uma das partes em suas múltiplas relações para que se capite toda sua realidade” (GIARDINETTO, 1991, p. 24).

O conceito de equação, proposto por Davydov e seus colaboradores, por meio da articulação das suas múltiplas significações: aritméticas, algébricas e geométricas. As tarefas são organizadas no movimento que segue do universal, mediado pelo particular até atingir as singularidades, orientado do abstrato ao concreto.

Diferentemente, por exemplo, da concepção de Álgebra como aritmética generalizada. Nesta, o movimento é o inverso, segue da aritmética para Álgebra. Os adeptos a essa concepção entendem que a

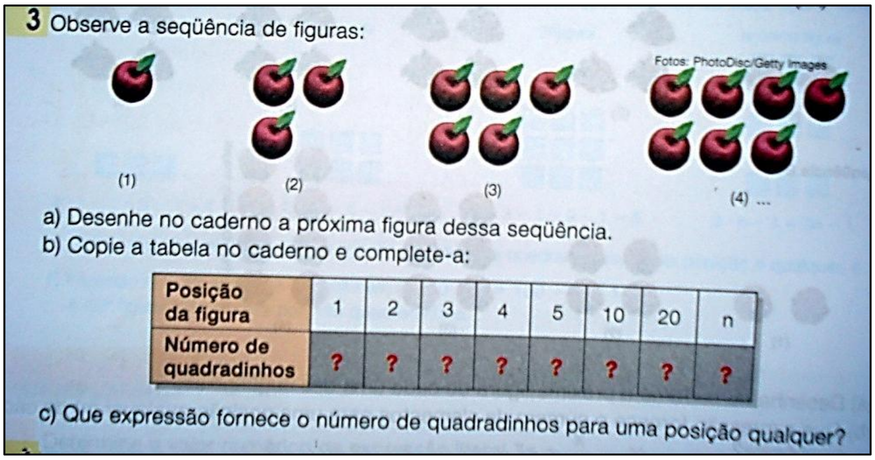
> álgebra não é isolada da aritmética; na verdade é, em muitos aspectos, a “aritmética generalizada”. [...] Para compreender a generalização das relações e procedimentos aritméticos é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam apreendidos dentro do contexto aritmético. [...] as dificuldades que o aluno tem em álgebra não são tanto de álgebra propriamente dita, mas de problemas em aritmética que não foram corrigidos (BOOTH, 1995, p. 33).

Tal dicotomia não ocorre em Davydov. Na verdade o movimento é o inverso, da Álgebra para a aritmética, mediado pelas significações geométricas. Alguns dos livros didáticos analisados se aproximam da concepção de Álgebra como aritmética generalizada. Propõem “atividades” desde os anos iniciais, com foco para as significações aritméticas, sem relação com as significações algébricas. Como já foi mencionado durante a análise das tarefas davydovianas (tarefas 01, 02, 03 e 05).

No livro didático do Ensino Fundamental II, analisado na presente pesquisa, o campo algébrico é sistematizado por volta do 7º ano, com a introdução das equações do primeiro grau. Vale ressaltar que trata-se de um dos livros didáticos adotados pelos professores das escolas da rede municipal de Criciúma.

Apresenta-se a seguir algumas “atividades” que evidenciam as proposições de ensino extraídas do mencionado livro. A sequência adotada consiste em: uma breve conceituação de expressões literais para introduzir os conceitos relacionados à Álgebra. São definidos os conceitos de igualdade e desigualdade, com ilustrações representativas da quantidade referente o valor numérico, na sua forma aritmética. Logo, nas inicia-se diretamente com o conceito de equação do primeiro grau, com a noção de equivalência.

A ilustração 81 foi extraída, do livro didático dos autores Bonjorno e Ayrton (2006). Os autores, disponibilizam alguns exemplos, como modelos, para a resolução de uma série de outras “atividades” semelhantes, apresentadas logo após os exemplos modelo. Além disso, a ênfase é para a Álgebra como aritmética generalizada (Ilustração 81).



3 Observe a seqüência de figuras:

Fotos: PhotoDisc/Getty Images

(1) (2) (3) (4) ...

a) Desenhe no caderno a próxima figura dessa seqüência.

b) Copie a tabela no caderno e complete-a:

Posição da figura	1	2	3	4	5	10	20	n
Número de quadradinhos	?	?	?	?	?	?	?	?

c) Que expressão fornece o número de quadradinhos para uma posição qualquer?

Ilustração 80: Atividade livro didático
Fonte: Bonjorno; Ayrton,(2006, p.147)

A "atividade” anterior (Ilustração 81) propõe a observação da sequência de maçãs, para posteriormente desenhar a próxima figura da sequência (o próximo agrupamento de maçãs) e completar a tabela definida, e generalizar em uma expressão referente a sequência de “quadradinhos”.

Esta “atividade” foi proposta no livro do 7º ano do Ensino Fundamental. Faz parte da introdução do campo algébrico. Diferentemente de Davydov e seus colaboradores que propõem o ensino das significações algébricas, na inter-relação das significações geométricas e aritméticas, desde o primeiro ano do Ensino Fundamental (ROSA, 2012).

Na “atividade”, a sequência é organizada com base na grandeza discreta (maçãs). Faz-se necessário analisar a relação entre os termos da sequência para determinar o novo agrupamento desconhecido. Assim, o primeiro termo da sequência é composto por uma maçã; o segundo, por três maçãs; o terceiro, por cinco maçãs; e, o quarto por sete maçãs. Cada novo agrupamento é duas maçãs a mais que seu antecessor. Ou seja, se o quarto agrupamento tem sete maçãs o quinto terá nove maçãs, pois (7 + 2 = 9).

Para preencher até a quinta célula da tabela, basta observar a quantidade de maçãs na sequência dada. Mas, para preencher a sexta e a sétima célula da tabela referente, respectivamente, a décima e a vigésima posição, surgem alguns questionamentos: com base em que pensamento a criança vai resolver? O empírico ou o teórico? Vai desenhar as maçãs até a décima e vigésimas posição? Vai contar, no plano mental, de termo em termo da sequência até chegar a décima e vigésima posições? Seguirá o modelo semelhante, apresentado anteriormente, na contextualização do conceito, para desenvolver a atividade? Ou será que a criança já vai proceder a generalização durante o preenchimento da última célula do quadro e assim, em vez se orientar pelo pensamento empírico mover-se-á com base no pensamento teórico? Ou seja, extrairá da análise da sequência a expressão geral que a rege e com base nesta calculará a quantidade de maçãs do décimo e vigésimo agrupamentos?

Vale ressaltar que os conceitos algébricos estão em processo de introdução. Havia um modelo inicial que envolvia quadrados e agora a nova situação, semelhante a anterior envolve maçãs. Embora, no quadro permaneça a palavra quadrado em vez de maçãs.

Ou seja, a criança estará no estágio inicial do estudo do campo algébrico de modo sistematizado (sétimo ano). Será que a criança já apresenta condições, para compreender, abstrair e generalizar a lei interna de formação da sequência em tão pouco tempo de estudo sobre Álgebra, com base em apenas exemplos semelhantes?

A expressão esperada na “atividade” é elaborada com base no seguinte raciocínio: se a cada novo termo da sequência, não importa qual, são acrescentadas duas maçãs em relação ao seu antecessor. Esta é a evidência empírica da lógica subjacente a sequência. Porém, faz-se necessário analisa-la com base no que não está dado diretamente. Cada agrupamento é formado pelo seu dobro menos uma unidade. Por exemplo, o terceiro agrupamento é composto por duas vezes *três*, menos *um*. Ou seja, no terceiro agrupamento tem-se $(2 \cdot 3) - 1$. A partir da análise com base nas relações aritméticas é possível generalizar um modelo algébrico: o dobro do número do agrupamento (***n***) menos uma unidade $(2n - 1)$.

A criança que não tem o pensamento teórico desenvolvido chegará em tal modelo algébrico? Vale ressaltar que Álgebra é quase uma novidade, visto que os anos anteriores, esta praticamente não foi abordada. Não se tem, nos limites da presente investigação, respostas para tais questionamentos, mas, os resultados pouco alentadores, obtidos a partir das avaliações oficiais da educação brasileira indicam para a necessidade de se repensar o ensino desde os anos iniciais.

Um dos livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental apresentam uma “atividade” com balanças para introduzir a noção de equivalência (Ilustração 82).

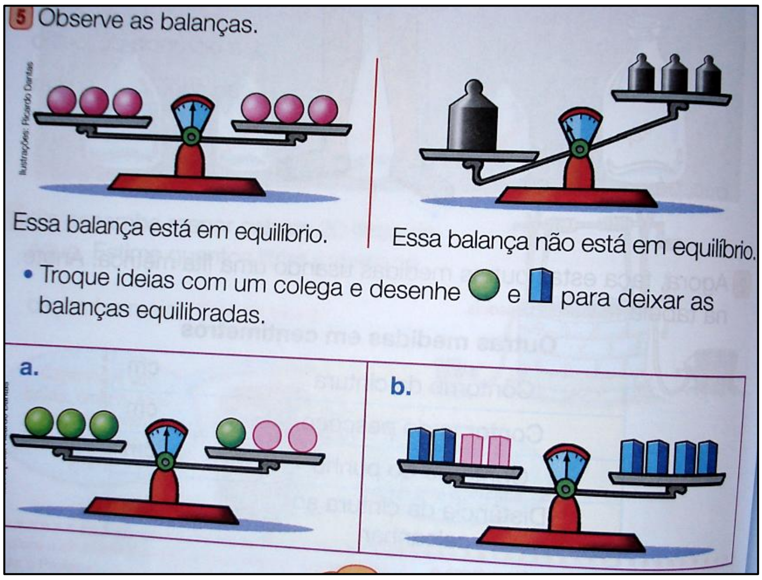


Ilustração 81: "Atividade" do livro didático
Fonte: Centurión, Teixeira e Rodrigues (2011, p. 166)

Os autores Centurión, Teixeira e Rodrigues (2011) apresentam, na primeira balança, a informação que ela está em equilíbrio, já na segunda balança, não está em equilíbrio. Há uma imagem visual diretamente relacionada com a informação dada.

A partir destas informações, propõe-se aos alunos que troquem ideias e verifiquem a melhor forma de deixar as próximas balanças em equilíbrio. Para tanto, basta desenhar mais objetos até atingir a quantidade equivalente ao outro prato da balança.

Destaca-se, mais uma vez, a apresentação de dois exemplos a serem seguidos, por associação, durante a realização da "atividade". As formas geométricas apresentadas na "atividade", serão denominadas, durante a análise, por esferas e paralelepípedos.

Na balança da questão "a", no prato da esquerda há três esferas e no prato da direita há somente uma. Para atingir o equilíbrio entre os dois pratos, basta que a criança desenhe mais duas esferas no prato da direita. Assim, na "atividade", a balança fica em equilíbrio, ao se igualar a quantidade de esferas em ambos os pratos.

Na balança da questão "b", no prato da esquerda há dois paralelepípedos, e no prato da direita há quatro. Para que a balança fique em equilíbrio, basta desenhar dois paralelepípedos no prato da esquerda.

Não houve qualquer conceituação teórica de equivalência na "atividade". A correspondência entre os objetos limitou-se a sua aparência (cor e forma). O foco foi para a grandeza discreta em detrimento da grandeza contínua, em específico, nesse caso, a massa. Nos limites das significações aritméticas.

A "atividade" pode ser resolvida empiricamente, sem envolver os conceitos matemáticos em nível teórico, sem relação com as significações algébricas, aritméticas e geométricas.

Na sequência, apresenta-se uma "atividade" referente a introdução do conceito de equação no livro didático brasileiro, a partir da ideia anteriormente apresentada com balanças (Ilustração 83).

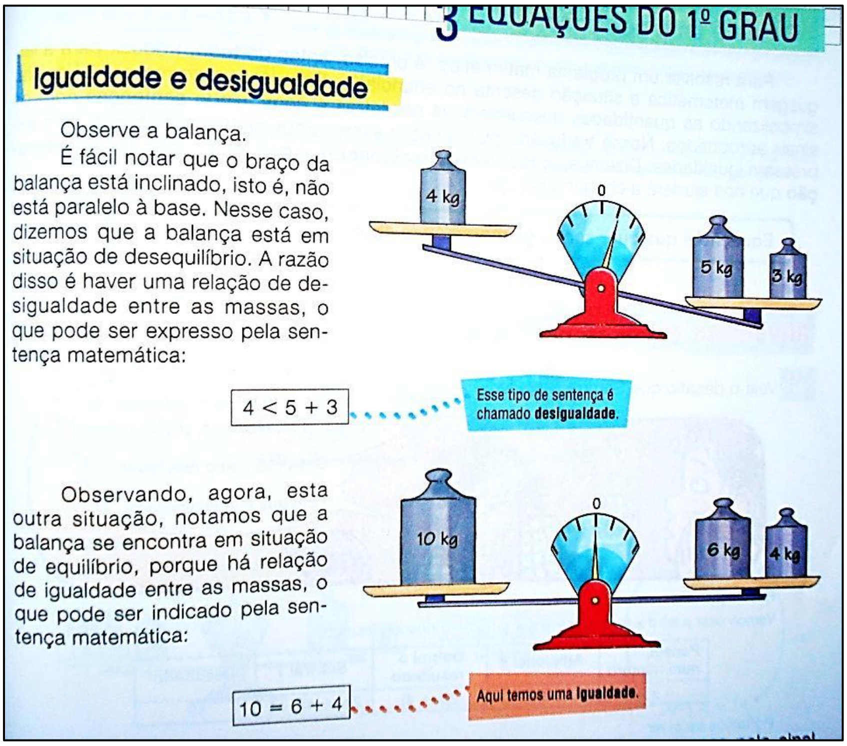


Ilustração 82: Atividade livro didático
Fonte: Bonjorno; Ayrton, (2006, p.149)

As equações são introduzidas a partir da ideia de equivalência, representadas visualmente por meio da balança e aritméticamente. Vale ressaltar que na introdução do capítulo sobre equação as letras não são apresentadas.

O conceito inicia-se, no 7º ano, pela ideia empírica de equivalência, visualmente dada a partir dos desenhos das balanças de pratos, para representar igualdade e desigualdade.

Parte-se da aritmética para o conceito de igualdade e desigualdade, nos limites das significações aritméticas (representação da quantidade) com os sinais de menor (<) e igual (=).

Em seguida, os autores definem o que é equação do primeiro grau, e seguem com exemplos modelos (particulares) que possuem incógnita. Conforme ilustração 84, a balança está em equilíbrio, por meio desta, calcula-se o valor da massa ***x*** (kg).

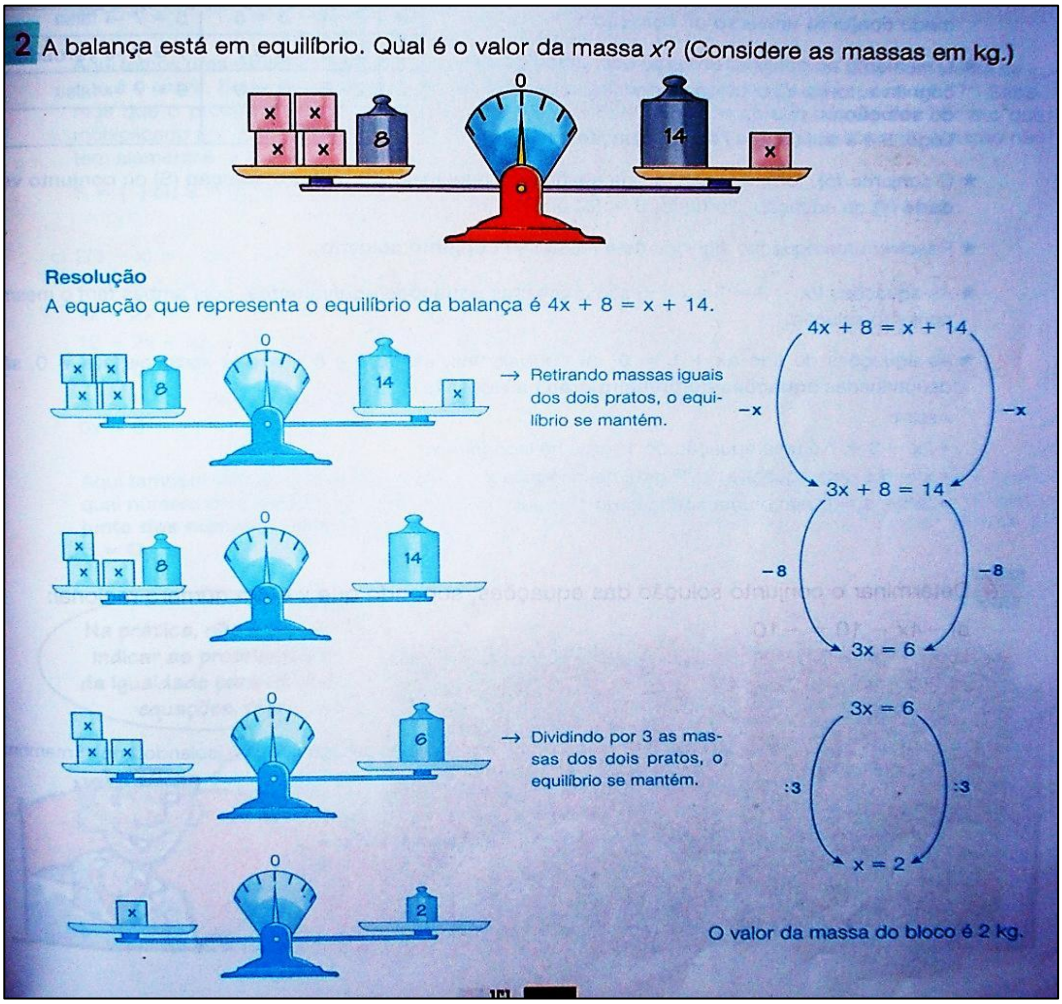


Ilustração 83: Atividade livro didático
Fonte: Bonjorno; Ayrton, (2006, p.151)

A balança que está em equilíbrio, no prato à esquerda possui quatro cubos de valor desconhecido, cada um representado por ***x***, e um peso de valor aritmético oito. No prato à direita tem-se um peso de valor aritmético quatorze e um cubo de igual aos cubos do prato da esquerda, com peso de valor aritmético desconhecido, representado pela incógnita ***x***.

Em seguida, a representação visual da balança, é transformada na forma algébrica da equação: **4x + 8 = x + 14**.

O procedimento de cálculo é realizado a partir da ideia de equivalência. A sequência do desenvolvimento da resolução da equação é ilustrada, empiricamente, na balança. Assim, o procedimento de cálculo incide em: tudo que se opera e desenvolve-se de um lado, faz-se do outro também.

Na equação **4x + 8 = x + 14**, manter o equilíbrio, significa retirar o ***x*** do prato da direita e da esquerda. Assim, no prato da esquerda, que possui (4x), subtrai-se (1x) e resta (3x). E no prato da direita, subtrai-se (1x), resta zero unidade. O resultado dessa etapa é a equação **3x + 8 = 14**.

Na continuidade, subtrai-se oito unidades de cada membro da equação. Oito do lado esquerdo, que resulta em zero unidade. Do lado direito da igualdade, também subtrai-se oito unidades (**14 – 8 = 6**). E resulta na equação **3x = 6**.

Falta realizar o cálculo de três vezes um valor desconhecido, que resulta em seis, ou seja, o triplo de um valor desconhecido é igual a seis. Nas equações, objetiva-se, o cálculo do valor numérico da incógnita (***x***). Para obter o valor aritmético, divide-se por três, os dois membros da equação (**3x = 6**), logo **x = 2**. Ou seja, o valor da massa do bloco é de 2kg.

Simultaneamente, todo processo para resolução da equação e cálculo da incógnita, é representado empiricamente por meio de ilustrações das balanças. O apoio visual das balanças e o processo de equivalência são repetidos nas “atividades” seguintes até um determinado momento, quando se constata que não necessita mais das balanças. Neste estágio são apresentados outros meios para a resolução de equações. Com regras e macetes para memorizar e associar, como por exemplo: se o valor aritmético está somando passará para ao outro lado da igualde subtraindo, e vice e versa. Ou seja, utiliza-se a operação inversa, para a resolução das equações.

Tais “atividades” propostas nos livros, vulgarizam as significações científicas do conceito de equação. O conceito considerado por Davydov e seus colaboradores em suas proposições de ensino, está distante do conceito abordado nos livros didáticos brasileiros, analisados nesta investigação. Vale reafirmar, que o movimento, apresentado no livro didático brasileiro, para introdução do conceito de equação ilustrado anteriormente (79, 80, 81 e 82), está vinculado ao conceito empírico, dado por uma coleção de regras nos molde de macetes.

> Quanto mais os alunos entenderem, mais perceberão a matemática como uma teia intrincada, e sempre em expansão, de ideias apreendidas anteriormente e inter-relacionadas, e não como uma coleção de regras arbitrárias. Aparentemente sem qualquer relação ou fundamento lógico (POST; BEHR; LESH, 1995, p.101).

O livro didático brasileiro apresenta o conceito de equação a partir de uma sequência linear que parte das atividades relacionadas as sequências, generalização, equivalência até atingir o conceito de equação propriamente dito. Segue das significações aritméticas para as algébricas com base na ideia de equivalência já apresentada nos livros dos anos iniciais. A noção de igualdade e desigualdade é representada, aritmeticamente, por meio de ilustrações empíricas. Em síntese, o conceito de equação é apresentado a partir da ideia de equivalência até atingir a síntese algébrica por meio de macetes e exemplos particulares.

Mas, por que as significações algébricas, inter-relacionadas com aritméticas e geométricas, não são contempladas desde os anos iniciais? As significações algébricas são sistematizas somente por volta do sétimo ano do ensino fundamental II. Por que, não se contempla desde os primeiros anos escolares? Tal seleção seria com base na crença de que a criança não é capaz de se apropriar do conceito, devido a sua pouca idade? Vale ressaltar, que, de acordo com Vigotski (2000), a Álgebra liberta o pensamento da criança das dependências aritméticas. E Davydov vai além, quando diz que as significações conceituais empíricas (nos limites apenas das significações aritméticas) obstaculizam o processo de apropriação da matemática teórica (na inter-relação das significações aritméticas, algébricas e geométricas).

Em síntese, a sequência de ensino, analisada nos livros didáticos, não contemplou a relação entre o todo as partes. Ou seja, não considera o movimento do geral para o universal e singular, mediado pelas particularidades.

Para finalizar, vale esclarecer que uma nova investigação poderá revelar muitas outras faces do objeto de estudo, que não foram aqui mencionadas, dadas as limitações de tempo no qual se insere um trabalho monográfico e a complexidade inerente ao objeto. Este requer continuidade da pesquisa tanto para buscar as respostas para as perguntas aqui arroladas como para levantar novas perguntas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na presente investigação o objeto consiste nas proposições de Davydov para a introdução ao ensino do conceito de equação do primeiro grau com as operações de adição e subtração, nos primeiros anos do ensino fundamental. Fundamentou-se na Teoria Histórico-Cultural e estabeleceu-se um diálogo comparativo entre as proposições davydovianas e algumas proposições brasileiras. Distacou-se os distanciamentos entre ambas.

No que se refere as proposições brasileiras, consideramos algumas “atividades,” retiradas de alguns dos livros didáticos de matemática utilizados pelos professores da rede municipal de Criciúma, nos anos letivos de 2012 e 2013.

Os livros analisados, embora adotados pelos professores de uma rede de ensino (Municipal de Criciúma) na qual a proposta curricular é fundamentada na Teoria Histórico –Cultural, não atendem aos pressupostos da referida teoria. Desse modo, finaliza-se essa monografia com um alerta sobre a necessidade de livros didáticos brasileiros que se fundamentem na Teoria Histórico-Cultural. Uma vez que, a referida teoria é adotada em propostas curriculares de várias redes municipais e estaduais de ensino. Se não há um aporte teórico, dos livros didáticos adotados por escolas brasileiras, cabe assim, o seguinte questionamento: de modo geral, o ensino de Matemática no Brasil, fundamenta-se nos principios da escola tradicional?

Os livros didáticos analisados na presente investigação expressam tais princípios, no que se refere ao conceito de equação. Não condizem com as proposições da Teoria Histórico-Cultural, apresentam mais distanciamentos que aproximações. Tais livros se fundamentam em uma base empírica dos conceitos.

Os livros didáticos brasileiros analisados conduzem o ensino dos conceitos por meio de associações a exemplos, memorizações de regras e macetes, e, comparação com situações particulares que não desenvolvem, desde o início, a gênese do conceito. Seguem o movimento do particular, com exemplos semelhantes a serem seguidos, para o singular, com “atividades” cujos valores aritméticos variam, porém, são semelhantes ao exemplo introdutório.

As “atividades” em geral dos livros didáticos brasileiros, dão ênfase para os conceitos com representações empíricas das grandezas discretas. Apresentam relações com a vida cotidiana das crianças, exemplos prático-utilitários, arbitrários, pré-determinados e desconexos. Geralmente seguem a visualização associada aos valores aritméticos e algébricos e adotam o método empírico de resolução. Não contemplam a simbologia matemática adequada aos conceitos teóricos. Ou seja, fundamenta-se nos princípios da escola tradicional (DAVÍDOV, 1988).

Em nenhuma das “atividades” analisadas as significações algébricas, aritméticas e geométricas foram inter-relacionadas. As significações algébricas não são contempladas nos anos iniciais do ensino fundamental.

A significação algébrica foi contemplada somente no ensino fundamental II (7º ano) como aritmética generalizada. No movimento da aritmética para Álgebra. Neste livro, logo na introdução, já se define diretamente o conceito de equação, sem uma introdução teórica apropriada.

De outro modo, as proposições davydovianas, desde o início, apresentam tarefas das significações algébricas inter-relacionadas com as significações aritméticas e geométricas. Em Davydov o conceito foi desenvolvido com base no movimento do universal, com as significações algébricas, para o singular (as significações aritméticas), mediado pelas particularidades.

Algumas tarefas não iniciavam com valores aritméticos já representados. A proposição consistia em por a criança em ação investigativa por meio de perguntas orientadoras. Algumas tarefas particulares admitiam várias respostas singulares.

As igualdades foram introduzidas a partir de situações que envolviam sentenças, expressões, representações algébricas que consistiam na revelação do modelo universal. Nas proposições davydovianas as diferentes representações da relação *todo-partes* são alternadas. São exploradas as diversas possibilidades. Tal relação fundamenta a representação algébrica e a determinação do valor desconhecido. Neste mesmo o valor da incógnita é representado pela letra ***x***.

O movimento interno da relação *todo-partes*, quando concretizado, permite a generalização do conceito de equação, no que se refere a operação a ser realizada para resolvê-la. Se as duas partes são conhecidas, para determinar o todo, basta adicioná-las. De outro modo, se o todo e uma das partes são conhecidos, para determinar a outra parte, faz-se necessário subtrair a parte conhecida do todo. Em síntese, o valor numérico de cada de termo da equação pode ser determinado a partir do valor numérico dos outros termos. Além disso, é possível construir tantas equações, quantos componentes existirem na igualdade.

O conhecimento desenvolvido nesta pesquisa, com base na análise das proposições davydovianas, revelou a possiblidade de inserção dos processos de pensamento teórico e científico em proposições de ensino. A finalidade de tais proposições, por meio das tarefas, é desenvover a apropriação dos conceitos durante as ações de estudo. E, consequentemente, promover o desenvolvimento intelectual da criança. Tal desenvolvimento, de acordo com Davydov (1982) reflete às qualidades internas dos conceitos e dão condições para determinar e encaminhar a criança na solução de tarefas práticas.

Alerta-se que deve-se adotar o mais profundo cuidado, e ser o mais fiel possível, ao tomar como objeto de estudo as proposições davydovianas. Isso para não transformar as tarefas davydovianas na forma como se está acostumado a vivenciar tais conceitos nos moldes do ensino tradicional. Ou seja, corre-se o risco de, sem se dar contar, o pesquisador moldar as proposições davydovianas, seu movimento que segue do univesal ao singular, num movimento tradicional e empírico.

O objetivo, na presente investigação, não foi apresentar um “modelo” de ensino pronto, para quem quiser usufruir, repetir e desenvolver em sala de aula. Destaca-se ainda, que ao se desenvolver a proposta de Davydov e seus colaboradores no contexto educacional brasileiro, há a possibilidade de haver problemas diversos. É possivel que não ocorra o aprendizado da criança, por uma série de fatores, desde o ambiente escolar, o professor em atividade de ensino, a criança em ação de estudo, etc.

Mas ressalta-se que na análise comparada com o ensino tradicional, demonstrou-se a diferença destas proposições com as davydovianas, no que se refere ao conteúdo e os métodos de ensino. Assim, o objetivo das tarefas davydovianas consiste em promover o ensino e a aprendizagem, com base nos princípios da Teoria Histórico-Cultural, com vistas ao desenvolvimento do pensamento teórico.

Para a autora desta investigação, pesquisadora iniciante e professora da rede municipal de educação de Criciúma, uma das aprendizagens relevantes decorrente da investigação foi a compreensão de como Davydov e seus colaboradores propõem o ensino de Álgebra desde os anos iniciais. Pois, inicialmente, a pesquisadora tinha algumas dúvidas no que refere a introdução da simbologia algébrica em proposições de ensino tão precoces. Pois, seu pensamento ainda estava fundamentado nos princípios do ensino tradicional. Visto que, não foi abordada outra base teórica durante sua formação básica e superior.

O estudo que deu oriegem a esta monografia, proporcionou reflexões que acenderam o desejo de aprofundar as proposições davydovianas para o ensino de Matemática. Pois trata-se de uma proposta relevante para a área. Algumas questões ficam em aberto: como Davydov e seus colaboradores propõem o ensino do conceito de equação com as operações de multiplicação e divisão? As equações no contexto de resolução de problemas? E, sua sistematização nos números Reais? Essas e outras questões instigam a autora desta investigação (uma profissinal do ensino de Matemática, principiante na busca de ações que visam o desenvolvimento do pensamento teórico, com base em conceitos científicos) a aprofundar os estudos sobre as proposições davydovianas.

REFERÊNCIAS

ALVES, Ester de Souza Bintencourt. **Proposições Brasileiras e Davydovianas:** limites e possibilidades. 2013. 119 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

AMORIM, Marlene Pires. **Apropriação de significações do conceito de números racionais:** um enfoque histórico-cultural. 2007. 154 f. Dissertação (Mestrado em educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense – Criciúma. 3cap.

ARANHA, Maria Lucia Arruda; MARTINS, Maria Helena Pires. **Filosofando**: Introdução à filosofia. São Paulo: Moderna, 1993.

BADIOU, Alain; ALTHUSSER, Louis. **Materialismo histórico e materialismo dialético.** São Paulo: global ed., 1979. 93 p.

BAPTISTA, Maria das Graças de Almeida. Práxis e educação em Vigotski. **Revista eletrônica Arma da crítica**, Fortaleza, ano 2, p. 120 – 142, dezembro 2010.

BONJORNO, José Roberto; BONJORNO, Regina Azenha; OLIVARES, Ayrton. **Matemática:** fazendo a diferença: 7º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2006

BOOTH, Lesley R., Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P (Org.). **As ideias da álgebra**. – São Paulo: Atual, 1994. p. 23 – 36.

BORNHEIM, Gerd A. **Dialética, teoria práxis** ensaios para uma crítica da fundamentação ontológica da dialética. 2 ed. Porto Alegre: Editora Globo, 1983. 340 p.

BRASIL. **Guia de livros didáticos: PNLD 2011: Matemática.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. 96p.

BRUNELLI, J. B. **Projeto ou atividade de ensino e de aprendizagem? Expressões da implantação da Proposta Curricular do Estado de Santa Catarina.** Dissertação de Mestrado. UNESC, Criciúma, 2012.

CARAÇA, Bento de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2002, 295 p.

CHALOUH, Louise; HERSCOVICS, Nicolas. **Ensinando expressões de maneira significativa.** In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P (Org.). **As ideias da álgebra**. – São Paulo: Atual, 1994. p. 37– 48.

COSTA, J. M. Couceiro. **Tratado de Arithimetica**. Lisboa: Imprensa Nacional. 1866. 376 p.

GUEDJ, Denis. **O teorema do papagaio**. São Paulo: Companhia das letras, 1999. 501p.

CENTURIÓN, Marília; SCALA, Junia La; RODRIGUES, Arnaldo. **Porta Aberta:** alfabetização Matemática: 1º ano. 1ª Ed. São Paulo, FTD, 2011.

______. **Porta Aberta:** alfabetização Matemática: 2º ano. 1ª Ed. São Paulo, FTD, 2011.

______. **Porta Aberta:** alfabetização Matemática: 3º ano. 1ª Ed. São Paulo, FTD, 2011.

______. **Porta Aberta:** alfabetização Matemática: 4º ano. 1ª Ed. São Paulo, FTD, 2011.

DANTAS, Marcelo; CAVALCANTE, Vanessa. **Pesquisa qualitativa e pesquisa quantitativa.** 2006. Universidade Federal de Pernambuco. Disponível em: http://pt.scribd.com/doc/14344653/Pesquisa-qualitativa-e-quantitativa Acesso em: jun. 2011.

DAVIDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico:** investigación teórica y experimental. Trad. Marta Shuare Moscú: Editorial Progreso, 1988.

DAVÍDOV, V. V. **Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo**. In: SHUARE, M. La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS. Moscú: Progreso, p. 143-155, 1987.

DAVYDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. Habana: EditorialPueblo y Educación, 1982.

DEMANA, Franklin; LEITZEL, Joan. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P (Org.). **As ideias da álgebra**. – São Paulo: Atual, 1994. p. 70 – 78.

FRITZEN, Karina Rossa. **Estudo do sistema conceitual de trigonometria no ensino fundamental: uma leitura histórico-cultural**. Criciúma – SC: UNESC, 2011. Dissertação (Mestrado).

GALPERIN, P.; ZAPORÓZHETS A.; ELKONIN, D. Los problemas de la formación de conocimientos y capacidades en los escolares y los nuevos métodos de enseñanza en la escuela. In: SUARE, M. **La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS**. Moscú, Progreso, p. 300-316, 1987.

GIARDINETTO, J.R.B. **A relação entre o abstrato e o concreto no ensino da geometria analítica ao nível do 1º e 2º graus**. São Carlos: UFSCar, 1991, Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de São Carlos.

JARDINETTI, José Roberto Boettger. Abstrato e o concreto no Ensino da Matemática: algumas reflexões. **Bolema**, ano 11, nº 12, p. 45 – 57, 1996.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.
KOSIK, Karel; TORÍBIO, Alderico. **Dialética do concreto.** 2 ed. Rio de Janeiro: Ed. Paz e Terra, 1995. 248 p.

MARX, K. **O capital: crítica da economia política**. 2ª ed. São Paulo, Nova Cultural, 1985.

MASSON, Gisele. Materialismo Histórico e dialético: uma discussão sobre as categorias centrais. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, PR, v. 2, n. 2, p. 105 – 114, jul. – dez. 2007

OLIVEIRA, Paulo de Salles. **Metodologia das ciências humanas.** Paulo de Salles Oliveira (Org.). São Paulo: Hucitec/UNESP, 1998. 219 p.

PEREIRA, Marco Aurélio Monteiro (Ed.). Enciclopédia Sysamérika. Curitiba: Editora Argos, Ltda., 1986.

POST, Thomas R.; BEHR, Merlyn J.; LESH, Richard. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P (Org.). **As ideias da álgebra**. – São Paulo: Atual, 1994. p. 89 – 103. Rigon, Algacir Jose; ASBARHR, Flávia da Silva Ferreira; MORETTI, Vanessa Dias. Sobre o processo de humanização. In. MOURA, Manoel Oriosvaldo (Org). **A atividade pedagógica na teoria Histórico-Cultural**. Brasília: Liber livro, 2010. p.13 – 44.

ROSA, J. E. et al. As Significações Algébricas, Geométricas e Aritméticas Éticas no Processo de Elaboração do Sistema Conceitual aritmético à Luz da Teoria Histórico-Cultural. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 11, p. 329-350, 2009.

ROSA, J. E. **O desenvolvimento de conceitos na proposta curricular de matemática do Estado de Santa Catarina e na abordagem Histórico-Cultural.** Dissertação (Mestrado em Educação: linha de pesquisa Educação Matemática). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

ROSA, J. E. **Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar**: inter-relações dos sistemas de significações numéricas. Tese (Doutorado em Educação: linha de pesquisa Educação Matemática). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

PANOSSIAN, Maria Lucia. **Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes:** indicadores para a organização de ensino. 2008. 179 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A. O ensino do conceito de número: uma leitura com base em Davydov. **Revista Unión** (San Cristobal de La Laguna), v. 30, p. 81-100, 2012

ROSA, J. E.; SOARES, M.T.C.; DAMAZIO, A. Conceito de número no sistema de ensino de Davydov, In: **Anais da XIII Conferência interamericana de Educação Matemática**; Recife, 2011.

ROXO, E. **Lições de Arithmetica**. 7. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1928.

SANTA CATARINA, Secretaria de Estado da Educação Ciência e Tecnologia. **Proposta curricular de Santa Catarina**: **estudos temáticos**. Florianópolis: IOESC, 2005.

SANTA CATARINA, Secretaria de Estado da Educação e do Desporto. **Proposta Curricular de Santa Catarina**. Florianópolis: GOGEM, 1998.

SANTA CATARINA, Secretaria de Estado da Educação e do Desporto. **Tempo de Aprender: subsídios para as classes de aceleração nível 3 e para toda a escola**. Florianópolis: DIEF, 2000.

SANTA CATARINA, Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular: uma contribuição para a escola pública do pré-escolar,** 1º grau, 2º grau e educação de adultos. Florianópolis: IOESC, 1991.

TRIVIÑOS, Augusto Nibaldo Silva. **Introdução à pesquisa em ciências sociais** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Ed. Atlas, 1987. 175 p.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

ГОРБОВ С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. **Обучение математике. 1 класс: Пособие для учителей начальной школы** (Система Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида, перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб 2008. 128р. [GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V. **Ensino de Matemática. 1 ano: livro do professor do ensino fundamental** (Sistema do D.B. Elkonin – V.V. Davidov). 2ª edição redigida, Moscou, Vita-Press, 2009.]

ДАВЫДОВ, В. В. О. et al. **Математика, 1-Kjiacc.** Mockba: Mпрос - Аргус, 2012. [Davidov, V.V. **Matemática, 1ª série**. Livro didático e de exercícios para os estudantes da primeira série. Moscou: MIROS, Argus, 2012.