UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU - FURB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS - CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA - PPGECIM

EDUARDO BRANDL

AS CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE DUVAL NA APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

BLUMENAU
2018

EDUARDO BRANDL

AS CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE DUVAL NA APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECIM) do Centro de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Regional de Blumenau, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Viviane Clotilde da Silva

BLUMENAU

2018

Ficha Catalográfica elaborada pela
Biblioteca Universitária da FURB

B818c

Brandl, Eduardo, 1980-
As contribuições da teoria de registros de representação semiótica de Duval na aprendizagem de sistemas lineares no ensino médio / Eduardo Brandl. – Blumenau, 2018.
185 f. : il.

Orientador: Viviane Clotilde da Silva.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau.
Bibliografia: f. 177-179.

1. Matemática. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Ensino médio. 4. Sistemas lineares. 5. Semiótica. I. Silva, Viviane Clotilde da, 1971-. II. Universidade Regional de Blumenau. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. III. Título.

CDD 510.7

AS CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE DUVAL NA APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

Por

EDUARDO BRANDL

Esta dissertação foi julgada e aprovada em sua forma final pela orientadora e demais membros da banca examinadora.

Presidente: Prof.ª Dr.ª Viviane Clotilde da Silva
Universidade Regional de Blumenau (FURB)

Prof.ª Dr.ª Cintia Rosa da Silva de Oliveira
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof.ª Dr.ª Rosinéte Gaertner
Universidade Regional de Blumenau (FURB)

Prof.ª Dr.ª Janaína Poffo Possamai
Universidade Regional de Blumenau (FURB)

Blumenau, 23 de abril de 2018

À meu pai Willmar Brandl (in memoriam) e minha mãe Nerecy Sima, pelos exemplos de perseverança, humildade e trabalho.

AGRADECIMENTOS

Cursar um Mestrado, num primeiro momento, parecia uma ideia distante e inacessível à realidade de um professor de escola pública e num momento delicado da minha vida pessoal com o falecimento do meu pai. A decisão ocorreu após a avaliação da trajetória profissional de quase 20 anos, na busca de novas perspectivas para o exercício da profissão.

No entanto, nestes dois anos de Mestrado alguns obstáculos e mudanças, por vezes me fizeram acreditar que eu não chegaria ao final: uma cirurgia e duas mudanças de local de trabalho, o que fez com que eu precisasse reescrever parte do projeto de pesquisa. Mas finalmente cheguei e por isso preciso agradecer.

Primeiramente agradeço a uma força maior, transcendental por possibilitar-me estar vivo, com disposição, perseverança e inspiração na produção e concretização deste trabalho.

A minha mãe Nerecy, meus irmãos Rafael e Carina, ao cunhado Jaison e a minha sobrinha Gabriela por fazerem parte da minha vida e pela compreensão nos momentos de ausência, pois foram muitas noites, finais de semana e feriados dedicados a este trabalho.

A professora Viviane Clotilde da Silva, que orientou esse trabalho de maneira competente e compreensível. Agradeço pelo conhecimento, paciência e generosidade.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática – PPGECIM, que contribuíram cada um a seu modo, na construção de conhecimentos.

Aos colegas de curso, e em especial a Tatiana, Vanessa, Ana Paula e Wilson, pois cada um contribuiu para meu crescimento pessoal e profissional.

A professora Janaína Poffo Possamai por contribuir com seus conhecimentos na qualificação desta dissertação.

A professora Rosinéte Gaertner pela orientação inicial deste trabalho e pela qualificação. Agradeço por compartilhar seu conhecimento e experiência.

Ao diretor Fernando que gentilmente acolheu a ideia da realização da pesquisa no Instituto Federal Catarinense – Campus Ibirama.

Aos estudantes do 2º ano do Curso Técnico em Vestuário que aceitaram o desafio de participar desta pesquisa.

A Secretaria Estadual de Educação do Estado de Santa Catarina pelo apoio financeiro através do FUMDES.

Enfim a todos com os quais eu convivi e, que de certa forma, me auxiliaram nestes dois anos dessa complexa caminhada.

“A persistência é o caminho do êxito.”

Charles Chaplin

RESUMO

Este trabalho vinculado a linha de pesquisa Didática das Ciências Naturais e Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECIM), da Universidade Regional de Blumenau (FURB) teve como objetivo analisar as contribuições de uma sequência didática elaborada tendo por base a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval na aprendizagem dos sistemas lineares de estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Algumas pesquisas revelam que as práticas pedagógicas priorizam a abordagem exclusivamente algébrica desse objeto matemático e parte dos estudantes, sem compreendê-la por completo, resolvem os sistemas lineares de modo mecânico e apresentam dificuldades em interpretar os resultados obtidos. Neste cenário, a Teoria de Registros de Representação Semiótica surge como uma possibilidade de contribuir com a melhoria desse panorama, pois estabelece a necessidade de que os estudantes tenham acesso a diferentes registros de representação de um objeto matemático por meio de atividades contendo tratamentos, conversões e a articulação entre estes diferentes registros possibilitando a compreensão e a conceituação. Esta pesquisa de caráter qualitativo foi desenvolvida com nove estudantes da classe do 2º ano do Curso Técnico em Vestuário Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal Catarinense – Campus Ibirama. Para a coleta de dados utilizou-se gravações em áudio, digitalização das atividades e o registro escrito das observações feitas pelo professor. Os critérios de análise foram previamente organizados de acordo com a Teoria de Duval e considerando ainda o objeto matemático em estudo. Ao final do trabalho constatou-se que, através das atividades desenvolvidas, os estudantes transitaram entre os diferentes registros de representação dos sistemas lineares, o que possibilitou a compreensão de que cada um destes registros representa-os parcialmente. Pontua-se ainda que a abordagem dos diferentes registros de representação permitiu o acesso a ferramentas que os auxiliaram na validação dos resultados encontrados ao solucionar e classificar um sistema linear não ficando restritos a uma única forma de resolução e de registro. Constatou-se, portanto, um progresso significativo na compreensão do objeto matemático sistemas lineares. A sequência didática desenvolvida compõe o produto educacional e espera-se que este material contribua com a prática do professor, por meio da leitura, reflexão e adaptação, servindo de base a novos encaminhamentos metodológicos.

Palavras-chave**:** Sistemas lineares. Ensino Médio. Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

This study, linked to the Didactics of Natural Sciences and Mathematics research line, from the Postgraduate Program in Natural Sciences and Mathematics Teaching (PPGECIM), from the Regional University of Blumenau (FURB), has as objective to analyze the contributions of an elaborated didactic sequence based on Duval's Semiotic Representation Registers Theory in the learning of linear systems of the students of the 2nd year of High School. Some researches show that the pedagogical practices prioritize the exclusively algebraic approach of this mathematical object and some students, without understanding it completely, solve linear systems mechanically and present difficulties in interpreting the obtained results. In this scenario, the Theory of Semiotic Representation Registers emerges as a possibility to contribute to the improvement of this panorama, since it establishes the need for students to have access to different registers of representation of a mathematical object through activities containing treatments, conversions and the articulation between these different registers making possible the comprehension and the conceptualization. This qualitative research was developed with nine students of the 2nd year class of the Technical Course in Clothing Integrated to Secondary Education of the Instituto Federal Catarinense - Campus Ibirama. For the collection of data, audio recordings, activity digitization and written record of the observations made by the teacher were used. The analysis criteria were previously organized according to the Duval Theory and considering the studied mathematical object. At the end of this study it was observed that, through the activities developed, the students transited between the different registers of representation of the linear systems, which made it possible to understand that each of these registers partially represent them. It is also pointed out that the approach of the different representation registers allowed the access to tools that helped them in the validation of the results found when solving and classifying a linear system, not being restricted to a single form of resolution and registration. Therefore, it was found a significant progress in the understanding of the mathematical object linear systems. The didactic sequence developed composes the educational product and it is expected that this material contributes to the teacher's practice, through reading, reflection and adaptation, serving as a basis for new methodological referrals.

Keywords: Linear systems. High school. Semiotic Representation Registers.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CAAE – Certificado de Apresentação para Apreciação Ética

CNE – Conselho Nacional de Educação

ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

FUMDES – Fundo de Apoio à Manutenção e ao Desenvolvimento da Educação Superior de Santa Catarina

FURB – Universidade Regional de Blumenau

IFC – Instituto Federal Catarinense

IREM – Instituto de Pesquisa em Educação Matemática

MEC – Ministério da Educação

OCEM – Orientações Curriculares para o Ensino Médio

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

PCN+EM – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias

PISA – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Programme for International Student Assessment)

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

PPC – Projeto Pedagógico do Curso

PPGECIM – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática

PUC/SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

RA – Registro algébrico

RG – Registro gráfico

RLM – Registro em língua materna

RRS – Registros de Representação Semiótica

SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

SI – Sistema impossível

SPD – Sistema possível e determinado

SPI – Sistema possível e indeterminado

UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em muitos anos de docência deparei-me[1] com a escassez de cursos de formação na área de Matemática e quando estes eram ofertados, as teorias que os fundamentavam partiam do pressuposto que as dificuldades apresentadas na área de Matemática eram as mesmas das outras áreas do conhecimento, o que causava certa inquietação, pois no cotidiano da sala de aula eu verificava que a realidade era outra.

Em 2011 ao cursar uma Especialização em Ensino de Ciências tive o primeiro contato com a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval e a partir desse momento, tive o interesse em aprofundar os estudos nessa teoria, pois apresentava uma abordagem diferente ao investigar os recorrentes problemas do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática.

Dessa forma, a partir dessa Especialização, gradativamente modifiquei minha prática pedagógica e busquei inserir diferentes registros de representação semiótica ao abordar os objetos matemáticos[2], mas sentia que ainda faltava o aprofundamento teórico. Assim, surgiu a necessidade de cursar um Mestrado que abordasse a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval e possibilitasse usá-la como fundamentação teórica em um projeto de pesquisa, o que aconteceu a partir de 2016, quando iniciei no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática tendo como objetivo investigar as dificuldades dos estudantes do Ensino Fundamental em operar e transitar entre os diferentes registros relacionados aos números racionais, pois nesse período eu lecionava a disciplina de Matemática para os Anos Finais do Ensino Fundamental.

A partir de abril de 2017, houve uma reviravolta em minha vida profissional e após ter sido aprovado em um concurso público passei a lecionar exclusivamente para o Ensino Médio o que me fez reorganizar o projeto de pesquisa. Nesse sentido observei a ementa prevista para o 2° ano do Ensino Médio no Instituto Federal Catarinense (IFC) – Campus Ibirama e pesquisei um objeto matemático em que os estudantes apresentassem dificuldade e que pudesse ser abordado usando várias representações semióticas, permitindo construir uma sequência didática pautada na articulação entre os diferentes registros de representação semiótica como forma de possibilitar a ruptura das aquisições parciais dos conceitos matemáticos, conforme apontado por Duval.

[1] Na parte inicial da introdução usarei a primeira pessoa do singular.
[2] Neste trabalho o termo conteúdos matemáticos será denominado por objetos matemáticos, pois esta é a denominação adotada na Teoria de Duval.

Documentos oficiais apontam que os professores têm destinado grande parte do tempo pedagógico para abordar a álgebra tanto nos Anos Finais do Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, no entanto a aprendizagem continua insatisfatória conforme apontado por avaliações oficiais como o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB e Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM.

Nesse sentido optou-se em abordar o objeto matemático sistemas lineares, pois além de ser comumente apresentado aos estudantes, quase que exclusivamente no registro algébrico, compõe um conteúdo com inúmeras possibilidades de abordagem, inclusive explorando resolução de situações contextualizadas.

Outro problema em relação a aprendizagem de sistemas lineares e que serviu de motivação para o desenvolvimento desta pesquisa é o fato de, segundo Battaglioli (2008) e Freitas (2013), grande parte dos estudantes resolverem os sistemas lineares de modo mecânico, ou seja, apenas repetirem os passos de um determinado método e ao chegarem ao final da resolução não compreenderem o significado da solução. Segundo esses autores, os estudantes tampouco possuem ferramentas que os auxiliem a verificar se as soluções encontradas estão corretas, resultado da não compreensão do significado dos valores encontrados. Freitas (2013), em sua prática docente, ainda percebeu que os estudantes concluintes do terceiro ano do Ensino Médio possuem dificuldades em resolver problemas envolvendo sistemas lineares.

Partindo ainda do pressuposto que o livro didático está presente em todas as escolas públicas e constitui-se um importante subsídio ao professor, norteando fortemente a prática de sala de aula e que em relação a abordagem dos sistemas lineares muitos destes livros apresentam uma metodologia pautada basicamente na resolução algébrica, conforme apontado por Battaglioli (2008) e Boemo (2015), buscou-se propor modificações na proposta de ensino desse objeto matemático, surgindo este trabalho que se insere na linha de pesquisa Didática das Ciências Naturais e Matemática, do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECIM) da Universidade Regional de Blumenau (FURB). Esta linha de pesquisa tem como objetivo a investigação de processos e métodos direcionados para o Ensino de Ciências Naturais e Matemática e instrumentação dos professores com vistas ao aprimoramento da ação docente para o ensino do conhecimento científico na Educação Básica.

Nesse campo de pesquisa uma das teorias que gradativamente vem ganhando destaque no Brasil é a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval segundo apontam as pesquisas de Colombo, Flores e Moretti (2008), Brandt e Moretti (2014) e Maggio e Nehring

(2016). Ressalta-se que certas teorias pedagógicas ainda são desconhecidas por grande parte dos professores que atuam na Educação Básica, sendo que essa teoria, por exemplo, dificilmente é abordada nos cursos de Licenciatura em Matemática. Desta forma, pressupõe-se que esta é uma oportunidade de desenvolver, socializar e disseminar uma proposta de sequência didática que poderá contribuir com o aprimoramento da prática pedagógica de professores do Ensino Fundamental e Médio ao abordarem os sistemas lineares.

Esta teoria traz importantes contribuições ao considerar as especificidades da área de Matemática em relação às outras áreas do conhecimento: o acesso aos objetos matemáticos ocorre por meio das suas diferentes representações, uma vez que cada uma destas representações é parcial em relação ao objeto, necessitando o trânsito e a articulação entre os diferentes registros para que aconteça a apreensão conceitual: esta é a hipótese fundamental da Teoria de Registros de Representação Semiótica.

Segundo Duval uma das limitações nas análises de produções dos estudantes está em não distinguir os dois tipos de transformação que ocorrem na atividade matemática: os tratamentos e conversões.

> Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro. [...] Mas do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão, que ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão (DUVAL, 2003, p. 16).

Neste cenário surge a questão que desencadeou esta pesquisa: **quais as contribuições de uma sequência didática elaborada sob a perspectiva da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval na aprendizagem do objeto matemático sistemas lineares no Ensino Médio?**

Para responder a esta questão foi definido o seguinte **objetivo geral**: analisar as contribuições de uma sequência didática elaborada tendo por base a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval na aprendizagem do objeto matemático sistemas lineares de estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

Para o alcance do objetivo geral foram propostos os seguintes objetivos específicos: 1) verificar se no capítulo referente aos sistemas lineares do livro didático de Matemática do 2º ano do Ensino Médio utilizado no IFC – Campus Ibirama há a presença ou não de atividades que contemplem o tratamento, a conversão e a articulação dos diferentes registros de representação semiótica; 2) contribuir para o aprimoramento da prática docente por meio da elaboração de uma sequência didática referente aos sistemas lineares de acordo com a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval; 3) analisar a aplicação da sequência didática por meio das resoluções das atividades e possíveis dificuldades apresentadas pelos estudantes; 4) apontar as contribuições da Teoria de Registros de Representação Semiótica na aprendizagem do objeto matemático sistemas lineares.

A pesquisa, de caráter qualitativo, ocorreu no Instituto Federal Catarinense - Campus Ibirama, abrangendo uma classe do 2º ano do Curso Técnico em Vestuário Integrado ao Ensino Médio.

Os dados da pesquisa foram coletados através da observação sistemática do desenvolvimento das atividades propostas, da análise das produções dos estudantes e das gravações em áudio. Os critérios de análise foram previamente definidos considerando os tratamentos, as conversões e a articulação entre os diferentes registros de representação semiótica propostos pela Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval e serão devidamente especificados no capítulo de metodologia.

Com o propósito de aprofundar os conhecimentos sobre os trabalhos científicos disponíveis que abordam o ensino de sistemas lineares e a Teoria de Registros de Representação Semiótica fez-se um levantamento das teses, dissertações e artigos produzidos nos últimos anos através de consulta a diferentes bases de dados disponíveis on line: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), Portal da Capes, Scielo, Google Acadêmico e os Anais dos XI e XII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), utilizando as palavras-chaves: representação semiótica e sistemas lineares. Buscou-se verificar, a partir desta consulta, quais trabalhos científicos disponíveis mais se assemelhavam ao tema investigado e assim, analisar a abrangência, as contribuições e limitações de cada trabalho.

Embora as pesquisas em Educação Matemática fundamentadas na Teoria de Registros de Representação Semiótica tenham se ampliado consideravelmente, a consulta a diferentes bases de dados mostrou que no Brasil são poucos os trabalhos que abordam especificamente os sistemas lineares sob a perspectiva da Teoria de Registros de Representação Semiótica. Isso é corroborado por Boemo (2015) que ao realizar um mapeamento das teses e dissertações de 21 programas de pós-graduação referentes a representação semiótica constatou que apenas oito trabalhos abordaram o ensino de sistemas lineares e destes apenas quatro investigaram esse objeto matemático no Ensino Médio. Ao final a autora constatou ainda que destes quatro trabalhos, apenas dois consideraram os sistemas lineares 3 x 3[3].

---

[3] Sistemas lineares 3 x 3 é a forma abreviada de denominar sistemas de equações lineares compostos por três equações e três incógnitas, adotada neste trabalho.

Diante destas constatações, os trabalhos mais significativos e que contribuíram com esta pesquisa estão resumidamente descritos a seguir.

A dissertação “Sistemas lineares na segunda série do Ensino Médio: um olhar sobre os livros didáticos”, de Battaglioli (2008), teve como objetivo verificar nos livros didáticos em quais registros de representações semióticas os sistemas lineares são apresentados e quais as conversões de registros propostas em seus exercícios. Os resultados obtidos demonstraram que prevalece o registro algébrico e as resoluções dos sistemas lineares continuam sendo privilegiadas, deixando a classificação destes sistemas em segundo plano. A autora argumenta a importância do registro gráfico, pois acredita que possa auxiliar em parte na superação das dificuldades apresentadas pelos estudantes. O uso do registro gráfico deve ser visto como um recurso a disposição para validar os resultados obtidos na resolução algébrica, por exemplo.

“Um estudo sobre resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3 x 3 no 2º ano do Ensino Médio”, dissertação de Jordão (2011), objetivou elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que aborda a resolução algébrica e gráfica dos sistemas lineares quadrados[4] com o auxílio do *software* educacional Winplot. Os resultados da pesquisa evidenciaram a relevância do uso deste *software* como contribuição para a visualização e compreensão da resolução dos sistemas lineares 3 x 3. A autora também aponta que os estudantes apresentaram dificuldades na compreensão, interpretação e resolução de sistemas lineares e verificou ainda a ausência da abordagem do registro gráfico nos sistemas 3 x 3 nos livros didáticos pesquisados.

Na dissertação “Sistemas de equações lineares: uma proposta de atividades com abordagem de diferentes Registros de Representação Semiótica”, Freitas (2013) desenvolveu, aplicou e analisou uma sequência didática para investigar como os estudantes do 3º ano do Ensino Médio resolvem sistemas de equações lineares 2 x 2 mobilizando os diferentes registros de representação semiótica apontados por Duval. Fez uso do *software* GeoGebra e da metodologia da Engenharia Didática de Artigue. Os resultados evidenciaram a evolução dos estudantes propiciada pelas atividades de tratamento e de conversão dos registros de representação semiótica.

Boemo (2015) em seu trabalho “Registros de representação semiótica mobilizados no estudo dos sistemas lineares do Ensino Médio” investigou a abordagem dos sistemas lineares por meio da coordenação das representações semióticas no 2º ano do Ensino Médio através da análise do livro didático, dos registros dos cadernos de Matemática dos alunos e dos

---

[4] Sistemas lineares quadrados são os sistemas que apresentam o número de equações igual ao número de incógnitas, como por exemplo, sistemas 2 x 2 e 3 x 3.

protocolos de três sequências de atividades. A investigação contribuiu para verificar como ocorre o estudo dos sistemas lineares e mostrar como a mobilização de diferentes sistemas representacionais promove a identificação de aspectos inerentes a esse objeto matemático. Dentre os resultados obtidos destaca-se que os estudantes não realizaram a conversão do registro algébrico para o gráfico de forma adequada, embora se constatou que os estudantes ampliaram o entendimento no que se refere as variáveis visuais pertinentes. Verificou ainda que os menores índices de respostas satisfatórias ocorreram nas questões que requeriam argumentação no registro em língua materna.

De acordo com os resultados apresentados por estes quatro trabalhos foi possível compreender alguns aspectos investigados em relação aos sistemas lineares e a Teoria de Registros de Representação Semiótica, no entanto apontam-se algumas limitações descritas pelos próprios pesquisadores.

Assim, considera-se que esta pesquisa possa trazer importantes contribuições e avançar em pontos que ainda não foram plenamente investigados nos trabalhos citados anteriormente como: (1) a compreensão de que o objeto matemático sistemas lineares 2 x 2, estudado no Ensino Fundamental, pode e deve ser ampliado e visto sob novas abordagens no Ensino Médio, não tratando-se de um novo objeto matemático; (2) o estudante deve ter contato com diferentes "métodos" de resolução para usar o que julgar mais adequado em cada situação apresentada; (3) as conversões precisam ocorrer nos dois sentidos e devem contemplar ainda conversões congruentes e não congruentes; e (4) o uso de situações em que o estudante faça uso do registro em língua materna mas de modo especializado através do contato com as definições, simbologias e nomenclaturas da Matemática.

Essa dissertação foi organizada em cinco capítulos. O primeiro refere-se a introdução contendo os objetivos da pesquisa, a justificativa e um breve estudo dos trabalhos correlatos. O segundo capítulo apresenta a fundamentação teórica da pesquisa embasada na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, cuja abordagem cognitivista possibilita analisar as especificidades da Matemática em relação às outras áreas do conhecimento: o acesso aos objetos matemáticos se dá somente por meio de suas representações e sua apreensão conceitual requer tratamentos, conversões e articulação entre os diferentes registros.

No terceiro capítulo discute-se o ensino e aprendizagem de sistemas lineares apontado por documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM – 2000), as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+EM – 2002), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM –

2006) e as três versões da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[5]. Analisa-se também o capítulo referente aos sistemas lineares do livro didático usado pelo 2º ano do Ensino Médio do Instituto Federal Catarinense (IFC) – Campus Ibirama.

O quarto capítulo apresenta a metodologia da pesquisa, o cenário de investigação, os sujeitos participantes, os instrumentos de coleta de dados e as categorias de análise da pesquisa.

A sequência didática elaborada e a análise dos resultados da aplicação da pesquisa referente aos sistemas lineares tendo por base a Teoria de Registros de Representação Semiótica constitui o quinto capítulo. Esta sequência aborda diferentes registros de representação semiótica relacionados ao objeto matemático sistemas lineares, contempla atividades de tratamentos, conversões e que mobilizem ao menos dois registros de representação semiótica, de forma a auxiliar os estudantes na resolução, na validação das soluções encontradas e na discussão da classificação dos sistemas lineares, visando a apreensão conceitual deste objeto matemático.

Por fim, este trabalho apresenta as considerações finais, descrevendo contribuições e recomendações, relatando avanços e limitações da referida pesquisa. Além disso, ao final apresenta-se o produto educacional[6]: uma sequência didática do objeto matemático sistemas lineares para classes do 2º ano do Ensino Médio, sob a perspectiva da Teoria de Registros de Representação Semiótica que possa contribuir significativamente para uma proposta de ensino pautada em atividades de tratamentos, conversões e articulações entre os diferentes registros, de modo a disponibilizar aos professores um importante subsídio didático no ensino de sistemas lineares.

[5] A versão definitiva da BNCC referente ao Ensino Médio ainda não foi finalizada.

[6] Produto Educacional: o mestrando deve desenvolver um processo ou produto educativo e utilizá-lo em condições reais de sala de aula ou de espaços não-formais ou informais de ensino, em formato artesanal ou em protótipo. Esse produto pode ser, por exemplo, uma sequência didática, um aplicativo computacional, um jogo, um vídeo, um conjunto de vídeo-aulas, um equipamento, uma exposição etc. (BRASIL, 2013, p. 24-25)

2 TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE DUVAL

Este capítulo apresenta inicialmente um breve histórico sobre a Semiótica e, na sequência, aborda a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, discutindo seus principais conceitos e implicações. Por fim, traça um panorama das pesquisas em Educação Matemática realizadas no Brasil tendo como fundamentação esta teoria.

2.1 BREVE HISTÓRICO DA SEMIÓTICA

Semiótica "de origem grega (semeion = signos), denomina-se como a ciência dos signos e os signos aqui mencionados referem-se à linguagem. Assim, Semiótica pode ser compreendida como sendo a ciência de todas as linguagens" (QUEIROZ, RAMOS e SIPLE, 2011, p. 18).

De acordo com Duval (2011a) outros povos e pensadores já haviam estudado os signos, mas foi a partir de três pensadores: Saussure, Peirce e Frege que houve o estudo sistemático que deu origem aos três modelos de análise que fundamentaram a Semiótica. Cabe ressaltar que estes três modelos ocorreram quase ao mesmo tempo, de forma independente e, segundo Duval (2011a), não possuem nada em comum, pois a origem deu-se em campos de estudo diferentes.

Saussure estudou a Semiótica a partir da Linguística. Para ele, "os signos só podem ser reconhecidos como signos por meio das relações de oposição que eles têm com outros signos no interior de um sistema" (DUVAL, 2011a, p. 30). Isso remete ao fato de que algo somente pode funcionar como signo num sistema semiótico. Tomando-se como exemplo os sistemas de numeração de base 2 e 10, percebe-se que o significado de um número depende do sistema de numeração adotado.

No entanto, de acordo com Duval a limitação do modelo construído por Saussure está em não considerar a diversidade de enunciados que a língua permite produzir. "Saussure começou separando o sistema semiótico que constitui uma língua e a utilização que os interlocutores dela fazem para se interessar somente pela língua" (DUVAL, 2011a, p. 32), ou seja, seu estudo não recaiu sobre os sistemas semióticos da língua.

Peirce usou como disciplinas as ciências em geral e a lógica e propôs uma complexa classificação de todos os tipos de representação que preenchem uma função cognitiva, mas segundo Duval a definição de signo de Peirce "se limita à propriedade comum às representações e aos signos ('se colocar no lugar de...'), e ela ignora a propriedade específica dos signos (sua relação com o objeto é uma relação de referência e não de efeito e causa)" (DUVAL, 2011a, p. 34).

Peirce foi o primeiro a reconhecer a variedade dos tipos de signos que podem ser utilizados e categorizou-os em três classes de acordo com a relação que possuem com o objeto: ícones, índices e símbolos[7], podendo ser considerado o fundador da Semiótica. Seu trabalho, no entanto, não investigou as possíveis relações entre os sistemas semióticos. Isso ocorreu mais tarde através dos trabalhos de Chomsky e Benveniste. Este último considerou a variedade de sistemas semióticos e também a possibilidade de colocá-los em correspondência, porém limitou-se a alguns sistemas semióticos.

Frege baseou suas pesquisas tendo como pano de fundo a Matemática, mais especificamente a Aritmética e a Análise, no entanto não se preocupou em definir signo, se interessou diretamente pela produção semiótica, conforme apontado por Duval (2011a, p. 35 grifo do autor).

> [...] ele introduziu a distinção entre *sentido* de uma expressão e a *referência* dessa expressão. [...] Duas expressões podem ter dois sentidos diferentes, mas se referirem ao mesmo objeto: 3 + 9, 3 x 4 [...]. *É sobre a distância entre essas duas faces que se fundamenta o processo de substituição que permite o cálculo: a e b* têm cada um sentido diferente, ou apresentam conteúdos muito diferentes, mas eles representam o mesmo objeto, por exemplo, o mesmo número.

Porém, ele teve como limitação o fato de considerar apenas as escritas simbólicas e não viu importância em considerar outros sistemas semióticos.

Duval conclui que estes três modelos são limitados no que se refere a análise da complexidade da aprendizagem matemática.

> Certamente, cada um desses modelos considerou uma ideia essencial para poder analisar o papel dos signos e das representações no conhecimento em geral. Mas, os modelos propostos são inadequados em relação a tudo o que podemos observar sobre o funcionamento e o desenvolvimento da atividade matemática (DUVAL, 2011a, p. 36).

A partir destas constatações Duval elaborou a Teoria de Registros de Representação Semiótica objetivando compreender como ocorre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, conforme descrito na sequência.

[7] Ícone (que possui traços comuns com o objeto), índices (cuja relação com o objeto é direta, causal) e símbolo (que designa o seu objeto independente de qualquer semelhança ou de relações causais, é o signo arbitrário cuja ligação com o objeto é fruto de uma convenção).

2.2 TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE DUVAL

A Teoria de Registros de Representação Semiótica foi desenvolvida pelo professor Raymond Duval que trabalhou no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, na França, de 1970 a 1995, onde desenvolveu importantes pesquisas em Psicologia Cognitiva. Atualmente é professor emérito da Universidade du Litoral Côte d'Opale, França.

Sua obra *Semiósis et pensée humaine* (1995) é um marco na Teoria dos Registros de Representações Semióticas e seus trabalhos de pesquisa ao longo de todos esses anos têm influenciado fortemente as pesquisas em Educação Matemática no Brasil.

Duval aponta que dentre as pesquisas sobre as dificuldades no ensino e na aprendizagem da Matemática, muitas não consideram a complexidade específica dessa área em relação as demais. Devido a isso, propõe uma abordagem do ponto de vista cognitivo a qual denomina Teoria de Registros de Representação Semiótica.

Porém antes de iniciar a descrição dessa teoria é oportuno e necessário compreender os termos usados em sua nomenclatura. A palavra "registro" refere-se "ao domínio dos sinais que servem para designar qualquer coisa (por exemplo, o mapa que *representa* o Brasil e não *é* o Brasil)" (ALMOLOUD, 2007, p. 80).

Em relação ao termo "representação", ressalta-se que a Matemática é construída através de representações, pois seus objetos não são reais. Um numeral, por exemplo, pode ser representado usando-se a língua materna: quatro (quantidade representada na forma escrita da língua portuguesa), um símbolo: 4 (algarismo indo arábico), IV (algarismo romano) e decorrente das necessidades, a humanidade foi criando ainda novas formas de representação desse mesmo objeto matemático: $x - 3 = 1$ e $\sqrt{16}$, dentre outros.

Portanto para Duval, a representação semiótica pode ser definida como "um conjunto de códigos (signos), organizados segundo regras de formação e convenções próprias que apresentam relações internas que permitem identificar os objetos representados e estabelecer relações com outros objetos e sistemas matemáticos" (Duval 1995 apud Colombo, 2008, p. 28).[8]

Duval (2003) considera ainda que uma das características fundamentais das representações semióticas consiste em não perder as informações quando há transformação de

[8] DUVAL, R. Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berna: Peter Lang, 1995.

um registro para outro, como a mudança da representação algébrica de um sistema linear para a representação gráfica, por exemplo.

Ele aponta que não há como ter acesso direto aos objetos matemáticos, pois os mesmos são abstratos, não sendo diretamente acessíveis ou perceptíveis. Desta forma este acesso somente é possível através das suas representações.

Nisso situa-se o paradoxo cognitivo descrito por Duval: como não confundir o objeto e a sua representação se em Matemática o acesso aos objetos somente é possível através de suas representações? A possível resposta a este questionamento reside no fato de que é necessário o acesso a pelo menos duas diferentes representações do mesmo objeto matemático para que isso não ocorra.

Como exemplo, cita-se o objeto matemático sistemas lineares 2 x 2 representado na forma algébrica e a sua representação gráfica constituída por duas retas que podem ou não se intersectar: ambos constituem representações distintas de um mesmo objeto e por isso o representam parcialmente e são complementares. Assim o objeto matemático sistemas lineares nunca estará completamente representado através de um único registro.

Para Duval (2009) um sistema semiótico deve permitir três atividades cognitivas: 1) a identificação de signos como a representação de algo; 2) transformar as representações pelas regras do sistema e 3) converter as representações de um sistema em outro. Mas afirma que nem todos os sistemas semióticos permitem isso, como é o caso, por exemplo, do Código Morse.

Aos sistemas que possibilitam estas três atividades Duval (2009) denomina de registros de representação semiótica que apresentam três fenômenos estreitamente ligados: 1) diversificação de registros de representação semiótica, 2) diferenciação entre representante (forma) e representado (conteúdo) e 3) coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica.

Os sistemas lineares (representado/conteúdo) podem assumir diferentes formas: algébrica, língua materna e gráfica, por exemplo, constituindo representantes que a princípio não tenham nenhuma relação entre si, mas através de atividades intencionalmente organizadas pelo professor farão com que gradativamente o estudante perceba que trata-se do mesmo objeto matemático.

O acesso aos objetos matemáticos somente através de suas representações conduz ainda a outros desafios ou paradoxos cognitivos: como reconhecer que duas representações semióticas diferentes referem-se ao mesmo objeto ou então, como reconhecer que duas representações semióticas quase equivalentes representam dois objetos diferentes, como por exemplo equações do 1º e do 2º graus no registro algébrico?

Segundo Duval (2003) muitas análises buscam abordar os problemas de ensino e de aprendizagem da Matemática reportando-se as suas complexidades epistemológicas e conceituais. Para ele essa abordagem não é suficiente, pois todas as áreas do conhecimento desenvolvem uma gama de conceitos. É necessário transcender essa abordagem e considerar as especificidades do conhecimento matemático em relação às outras áreas: a condição essencial das representações semióticas para ter acesso aos objetos matemáticos e a diversidade de representações matemáticas que foram sendo construídas no decorrer da história.

> Somente se pode aprender matemática e concluir as atividades propostas se compreendermos não somente as instruções e os enunciados de um problema, mas também aquilo que se pode fazer para buscar resolvê-lo e por que aquilo que se encontra está certo ou errado (DUVAL, 2012a, p. 309).

Ainda de acordo com Duval (2012a) a Matemática possui dificuldades de compreensão que não são encontradas em outras disciplinas e a escolha de uma teoria e de um método dependerá do ponto de vista da análise que se quer fazer. Dentre os pontos de vista Duval cita: o matemático e o cognitivo.

> Do ponto de vista matemático, a compreensão deve responder *à exigência epistemológica de prova* que é comum a todo conhecimento científico [...] a compreensão começa com uma explicação que se baseia na utilização de propriedades matemáticas. [...] Nesta perspectiva o desenvolvimento da compreensão no *aprendizado se reduz a um processo de conceituação.* [...] O acesso aos objetos matemáticos não é nem sensorial nem instrumental, como em física ou em química, mas ele passa pela *produção de representações semióticas.* [...] Do ponto de vista cognitivo, compreender em matemática é, antes de tudo, *reconhecer os objetos matemáticos representados* (DUVAL, 2012a, p. 309-310 grifo do autor).

Duval (2012a) considera ainda dois outros pontos de vista periféricos, mas importantes para determinar critérios de compreensão na aprendizagem da Matemática: o pedagógico e o psicológico. Embora ressalte que estes sejam periféricos em relação aos critérios matemáticos e cognitivos, precisam ser considerados ao avaliar a aprendizagem dos estudantes ao final de uma sequência didática, por exemplo.

Do ponto de vista psicológico dois critérios são importantes. O primeiro refere-se ao tempo de reação ou de resposta. “Assim, não é absolutamente a mesma coisa ter sucesso em tarefas que pedem somente poucas operações ou transformações de representação, em dois minutos, dez minutos ou mais de meia hora” (DUVAL, 2012a, p. 314). Isso porque a compreensão está relacionada a relativa espontaneidade da resposta.

O segundo critério é a possibilidade de transferência, ou seja, a aplicação do que foi aprendido a outros contextos e facilitar futuras aprendizagens. De acordo com Duval (2012a, p. 314) “[...] isto significa que a compreensão desenvolve uma capacidade de iniciativa e de controle em situações que são inteiramente novas.”

Há de se considerar ainda o ponto de vista pedagógico e destaca-se que cada estudante tem uma personalidade e história próprias. Três critérios são importantes: 1) interesse pelas tarefas propostas, 2) interação com os outros estudantes e 3) confiança na própria capacidade de aprender. Duval (2012a) considera que geralmente os dois primeiros critérios são considerados ao organizar o trabalho em sala de aula, mas é o terceiro critério que está relacionado a compreensão, pois é percebida pelo estudante como uma experiência de autonomia intelectual.

Dessa forma, destaca-se a importância dessa teoria por considerar as especificidades da Matemática e por sua abordagem cognitiva, pois a Matemática deve propiciar aos estudantes o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, análise e de visualização. Ainda pontua-se que essa teoria considera a necessidade de abordar os objetos matemáticos a partir da articulação entre os diferentes registros de representação como forma de reorganizar o pensamento cognitivo do estudante.

2.2.1 Diferentes registros de representação semiótica

Duval aponta que na Matemática há uma diversidade de registros de representação e cada um destes registros é parcial em relação ao objeto considerado. Ele classificou estes diferentes registros usando dois critérios: a possibilidade de algoritmização e o discurso, originando quatro possibilidades de categorização.

Como pode ser observado no Quadro 01 os registros monofuncionais possibilitam uma variedade de tratamentos e de acordo com Colombo (2008, p. 111) “[...] foram desenvolvidos para um tipo de tratamento muito específico, para ter desempenhos mais poderosos e menos custosos do que os registros multifuncionais.” Em outras palavras apresentam algoritmos próprios em sua estrutura.

Quadro 1 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis na atividade matemática.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural[9]. Associações verbais (conceituais). Formas de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças ...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0,1,2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • Numéricas (binária, decimal, fracionária, ...); • Algébricas; • Simbólicas (línguas formais). Cálculo.	Gráficos cartesianos. • Mudanças de sistema de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Fonte: DUVAL, 2003, p. 14

Ainda de acordo com Colombo (2008), os livros didáticos e as práticas docentes geralmente privilegiam os registros monofuncionais por possibilitarem o desenvolvimento de algoritmos em detrimento dos registros multifuncionais, resultando nas dificuldades de compreensão dos objetos matemáticos apresentadas pelos estudantes.

Mas é a articulação dos diferentes registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática, embora algumas abordagens didáticas estabeleçam a condição inversa, talvez pela importância dada ao ponto de vista matemático e não ao ponto de vista cognitivo. Para Duval, a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica é necessária dada que cada uma revela de forma parcial o conteúdo envolvido.

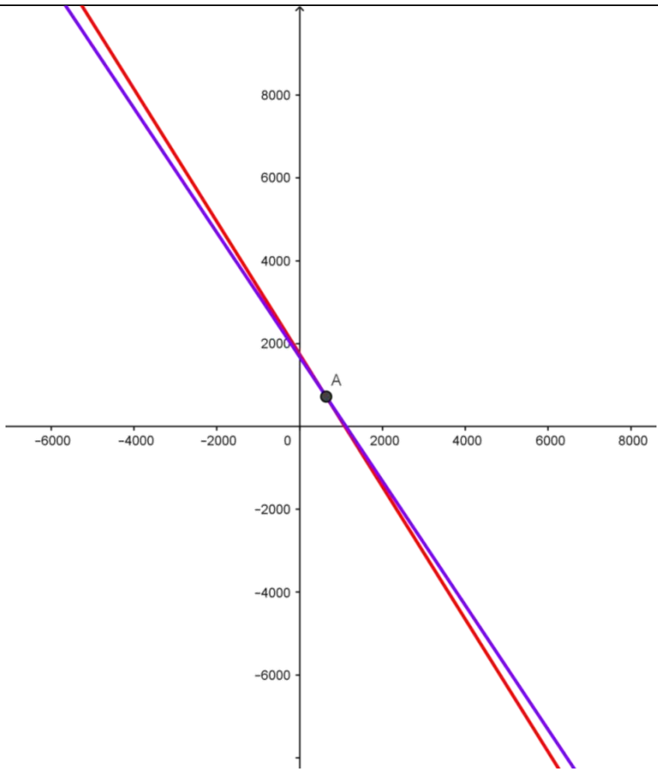
Conforme pode ser verificado no Quadro 01 “duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm de forma alguma o mesmo conteúdo” (DUVAL, 2003, p. 22). Como exemplo desta afirmação pode-se apontar a questão do registro multifuncional em língua materna de uma situação contextualizada envolvendo um sistema linear, que em nada se assemelha ao registro monofuncional dessa mesma situação representada no registro algébrico. Trata-se de um mesmo objeto matemático, mas cada registro de representação apresenta características e propriedades específicas, que só se tornarão perceptíveis aos estudantes através de atividades intencionais e sistemáticas.

Especificamente em relação ao objeto matemático sistemas lineares, o Quadro 02 apresenta os registros de representação semiótica mobilizados nas atividades da sequência didática proposta neste trabalho.

[9] Neste trabalho usou-se o termo língua materna ao referir-se a língua natural, entendendo ser mais comum o seu uso.

Quadro 2 – Tipos de registros de representação semiótica relacionados aos sistemas lineares

<table>
<tr><th colspan="2">Tipo de registro</th><th>Sistemas lineares</th></tr>
<tr><td colspan="2">Língua materna</td><td>Uma alfaiataria fabrica e vende dois tipos de ternos. No mês de maio ela vendeu 15 ternos do modelo A e 10 ternos do modelo B, obtendo uma receita de 16 800 reais. No mês de junho as vendas caíram e só foram vendidos 8 ternos do modelo A e 5 do modelo B, gerando uma receita de 8 720 reais. Qual o preço de venda do terno A e do terno B?</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Algébrico</td><td></td><td>$\begin{cases} 15a + 10b = 16800 \\ 8a + 5b = 8720 \end{cases}$
sendo a o preço de venda de cada terno do modelo A e b o preço de venda de cada terno do modelo B.</td></tr>
<tr><td>Matricial</td><td>$\begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16800 \\ 8720 \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td>Tabular</td><td><table><tr><th>Mês</th><th>Terno A</th><th>Terno B</th><th>Receita</th></tr><tr><td>Maio</td><td>15</td><td>10</td><td>16 800</td></tr><tr><td>Junho</td><td>8</td><td>5</td><td>8 720</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="2">Numérico</td><td>15. 640 + 10. 720 = 16 800

8. 640 + 5. 720 = 8 720</td></tr>
<tr><td colspan="2">Simbólico</td><td>Solução do sistema: S = {(640, 720)}</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gráfico</td><td></td></tr>
</table>

Fonte: dados do autor baseado na classificação de Boemo (2015).

Pontua-se ainda que neste trabalho não abordou-se a articulação entre todos os tipos de registros e nos diferentes sentidos de conversão por compreender que os objetos matemáticos sistemas lineares precisam ser abordados em diferentes momentos da escolaridade e em distintos graus de aprofundamento.

2.2.2 Três atividades cognitivas: formação, tratamento e conversão

A hipótese fundamental da Teoria de Registros de Representação Semiótica é que a conceituação de um objeto matemático, denominada por Duval de *noésis*, somente ocorre quando se tem acesso aos diferentes registros de representação semiótica deste objeto considerada por esse mesmo autor como *semiósis*, ou seja, não há *noésis* sem *semiósis*. Dessa forma, é imprescindível que qualquer proposta de ensino de Matemática contenha atividades que contemplem os diferentes registros de representação do objeto matemático estudado.

Para isso são necessárias três atividades cognitivas que Duval denomina de formação de representação identificável, tratamento e conversão. Para ele a atividade de formação de representação identificável consiste

> [...] na produção do registro (formação) com utilização de um ou mais signos para exprimir uma representação mental e/ou evocar um objeto real em conformidade com as regras do sistema empregado, não apenas para fins de comunicação, mas principalmente para permitir os tratamentos oferecidos por ele. (BRANDT, MORETTI, 2014, p. 24).

A formação de uma representação identificável consiste, portanto, na representação de um objeto matemático num determinado registro. Assim, o reconhecimento do objeto matemático sistema linear, por exemplo, representado no registro gráfico implica o conhecimento de unidades e regras de formação próprias deste registro. “A função destas regras é de assegurar em primeiro lugar, as condições de identificação e de reconhecimento da representação e, em segundo lugar, a possibilidade de sua utilização para tratamentos (DUVAL, 2012b, p. 271).

Uma das ideias centrais da teoria de Duval é que ao analisar o funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática faça-se a distinção entre as transformações semióticas: tratamentos e conversões, pois segundo ele uma das limitações na proposição de atividades e na análise das produções de estudantes está em não distinguir esses dois tipos de transformação que ocorrem na atividade matemática.

> Um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação. A conversão é, ao contrário, uma

> transformação que faz passar de um registro a um outro. Ela requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua (DUVAL, 2009, p. 39).

Ao resolver um sistema linear representado no registro algébrico o estudante trabalhará com um mesmo registro de representação semiótica e escolherá um método: comparação, adição ou substituição, por exemplo, para resolvê-lo. Precisa ter apreendido as propriedades e os procedimentos específicos desse tipo de registro para a realização desta tarefa, ou seja, está diante de uma atividade que exige tratamento, pois durante a resolução continuará no mesmo registro de representação. Caso ainda não domine as operações em relação a este tipo de registro de representação não obterá a solução ou poderá apoiar-se provisoriamente em outros tipos de registros para chegar ao resultado, nesse caso, poderá obter a resposta, por tentativas, por exemplo, através do registro numérico, mas que limitará consideravelmente as suas possibilidades de resolução de sistemas lineares.

Já outra situação, em que o estudante precisa representar por meio do registro gráfico um sistema linear expresso no registro algébrico ou utilizar o registro gráfico para discutir a solução de um determinado sistema linear, requer que o estudante transite entre dois registros de representação desse mesmo objeto matemático. Nesse caso precisa fazer uma conversão do registro algébrico para o gráfico ou vice versa.

Livros didáticos, sequências didáticas e práticas docentes geralmente não distinguem as atividades de tratamento e conversão e de acordo com Duval é justamente a análise dessas transformações separadamente que implicam em trazer à tona as dificuldades apresentadas pelos estudantes, principalmente em relação a conversão.

> Porém, numerosas observações em aula, assim como a análise dos resultados de investigação e de avaliações e experiências de aprendizagem mostram que a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos (DUVAL, 2009, p. 63).

Mas “o problema que a maioria dos estudantes encontra é tão profundo que a conversão pode ser considerada como o limiar para o entendimento. A conversão de uma representação semiótica muitas vezes aparece como um truque que não pode ser bem aprendido e que não é tão ensinado”. (DUVAL, 2006, p. 149 tradução nossa).

De acordo com Catto (2000) Duval orienta ainda que deva ser feita uma distinção entre conversão, código e interpretação, pois estas duas últimas são atividades muito próximas a conversão. Talvez resida nessa proximidade de significados a confusão que alguns autores fazem quando tratam a conversão como um aspecto secundário.

> O código consiste em colocar em correspondência suas unidades com as unidades de uma mensagem. Há uma grande variedade de códigos: o código Morse, [...]. Todos

> eles têm algo em comum que é não poderem designar diretamente o objeto ou o conteúdo. Portanto, o código precisa ser descodificado para ser compreendido. A interpretação não implica sempre em uma conversão de representação, mas requer uma mudança de quadro teórico ou campo conceitual (CATTO, 2000, p. 29).

Nas atividades propostas em alguns livros didáticos fica implícito que a compreensão dos tratamentos, por si só garantirá a compreensão da conversão entre estes diferentes tipos de registros. Porém em suas pesquisas Duval argumenta e comprova que uma conversão é irredutível a um tratamento.

Em relação as conversões, a Teoria de Duval destaca ainda que o custo cognitivo dessa transformação pode ser maior ou menor dependendo do que ele denomina congruência semântica entre duas representações de um mesmo objeto matemático.

Para determinar se duas representações são congruentes ou não, é preciso começar por segmentá-las em suas unidades significantes respectivas, de tal maneira que elas possam ser colocadas em correspondência. Para compreender tomemos o exemplo do Quadro 03.

Quadro 3 – Exemplo de conversão do registro em língua materna para o registro algébrico

Registro em língua materna	**Registro algébrico**
A soma entre dois números inteiros é doze e a diferença entre eles é dois	$\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=2 \end{cases}$

Fonte: dados do autor

Observando, neste caso, as unidades significantes respectivas de cada um dos registros do quadro anterior tem-se a seguinte correspondência (Quadro 04).

Quadro 4 – Correspondência das unidades significantes entre os registros em língua materna e algébrico

Unidade significante no registro em língua materna	**Unidade significante correspondente no registro algébrico**
dois números inteiros	x e y
soma	+
diferença	–

Fonte: dados do autor

Em relação a conversão existem conversões congruentes, próximas a uma simples codificação, conversões intermediárias e ainda as não congruentes. Duval (2003) aponta que nas conversões congruentes a representação de chegada transparece na representação de partida e está próxima a uma situação de simples codificação, neste caso a passagem de uma representação a outra é mais imediata. Nas conversões não congruentes não há nenhuma transparência e a passagem de uma representação a outra não é imediata.

Assim três critérios precisam ser observados para estabelecer a congruência ou não de uma conversão:

> O primeiro é **a possibilidade de uma correspondência "semântica" dos elementos significantes:** a cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar. [...] O segundo critério é a **univocidade "semântica" terminal**: a cada unidade significante elementar no registro de partida corresponde uma só unidade elementar no registro de chegada. [...] O terceiro critério é relativo à organização das unidades significantes. As organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas conduzem a apreender nelas as unidades em correspondência semântica segundo a mesma ordem nas duas representações (DUVAL, 2009, p. 68-69, grifo do autor).

Para tornar mais explícita e compreensível a congruência e a não congruência das conversões apresenta-se dois exemplos em que há a conversão do registro em língua materna para o registro algébrico referente a equações lineares.

1) **Um número inteiro somado a dezessete é igual a quarenta e um** que corresponde a $\mathbf{x + 17 = 41}$, no registro algébrico. Nesse caso, tem-se uma conversão caracterizada como congruente, pois a cada unidade significante do registro de partida associa-se uma unidade significante no registro de chegada (1º critério); cada unidade significante do registro de partida corresponde a uma só unidade no registro de chegada (2º critério) e em ambos os registros mantém-se a mesma ordem de representação (3º critério).

O simples fato de modificar este registro para o seguinte enunciado: a soma de um número inteiro com dezessete resulta em quarenta e um, já modifica a condição de congruência, pois não atende mais ao terceiro critério, podendo ser classificada como uma conversão intermediária.

2) **O volume de um cubo corresponde a cento e vinte e cinco**, ou seja, $\mathbf{x^3 = 125}$, no registro algébrico. Este é um exemplo de conversão não congruente pois nem todos os símbolos utilizados na equação estão expressos na língua materna, não há correspondência termo a termo (1º critério). Além disso, se proceder a conversão no sentido inverso não se encontra o registro inicial e provavelmente será convertido por: um número elevado ao cubo é igual a cento e vinte e cinco, ou então, o cubo de um determinado número é igual a cento e vinte e cinco (2º e 3º critérios).

Duval pressupõe que um ensino baseado apenas em conversões congruentes ou então que considera apenas um dos sentidos de conversão podem produzir efeitos de uma aparente aprendizagem, o estudante pode obter bons resultados nas avaliações propostas pelo professor, mas que não dão conta da complexidade de um conceito matemático. Isso se torna um efeito de impacto negativo, pois o professor não submete o estudante a situações mais complexas e desafiadoras, que são propulsoras efetivas de aprendizagem, limitando

> [...] consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem (DUVAL, 2003, p. 21).

Mais uma vez Duval reafirma que a compreensão em Matemática implica na capacidade de mudar de registro.

> As variações de congruência, assim como a não equivalência dos sentidos de conversão, mostram que a conversão não resulta de uma compreensão conceitual, pois se assim o fosse, as variações consideráveis de sucesso e de fracasso em tarefas elementares de conversão não estariam fortemente correlacionadas com as variações de não congruência ou com aquelas do sentido da conversão (DUVAL, 2003, p. 22).

Salienta-se ainda que o fato de um estudante fazer a conversão em um sentido não implica que ele terá sucesso na conversão de sentido inverso. "Para que haja coordenação sinérgica de vários registros, é preciso ser capaz de converter as representações nos dois sentidos e não em um único" (DUVAL, 2011a, p. 118). Esta importante constatação nem sempre é considerada em sala de aula.

Duval questiona ainda a maneira como as atividades matemáticas são apresentadas aos estudantes. Para ele é preciso criar situações que explicitem o maior número possível de variações de congruência de um mesmo objeto matemático em dois registros diferentes.

> No lugar de apresentar cada problema por ele mesmo, independentemente dos outros, é toda uma gama de representações possíveis, ordenadas segundo as variações de congruência e não congruência sobre as quais os alunos deveriam trabalhar para discutir e tomar consciência (DUVAL, 2011a, p. 122).

Enfim as pesquisas já apontadas neste trabalho evidenciam que há muito a ser reformulado de acordo com a abordagem cognitivista da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval na busca do enfrentamento dos problemas relacionados ao ensino e a aprendizagem de Matemática em todos os níveis de ensino.

2.2.3 Registro gráfico de sistemas lineares

Em relação aos sistemas lineares é necessário ainda pontuar um aspecto importante: a representação gráfica que segundo Duval (2011b) pode ser abordada a partir de três tratamentos: a abordagem ponto a ponto, da extensão do traçado efetuado e da interpretação global de propriedades figurais.

A **abordagem ponto a ponto** constitui o modo como geralmente a representação gráfica é introduzida ao se trabalhar expressões algébricas. Parte-se de uma tabela em que são inseridos valores aleatórios para a variável x e aplicando-se cada um destes valores na expressão há a obtenção do valor referente a *y*. Estes pares ordenados são então representados por pontos no plano cartesiano. Segundo Duval (2011b) esta abordagem não é somente inadequada, mas constitui um obstáculo a aprendizagem, pois desvia a atenção do estudante das variáveis visuais pertinentes.

Ao propor atividades que requeiram ao estudante converter o registro algébrico em gráfico esse obstáculo passa despercebido, no entanto ao solicitar a conversão no sentido inverso, estudantes submetidos a essa abordagem simplesmente não conseguem fazer a conversão. A dificuldade está “na falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro de representação gráfica e o registro da expressão algébrica” (DUVAL, 2011b, p. 97).

A segunda abordagem denominada de **extensão do traçado efetuado** pouco difere da primeira, pois segundo Duval (2011b) a única diferença é que não se apoia mais em um conjunto finito de pontos, mas nos intervalos entre os pontos marcados. Da mesma forma que na primeira abordagem, esta se mantém na determinação de valores particulares.

“De modo geral esta abordagem de extensão se mantém puramente mental: ela não acarreta traços complementares e explicativos como uma mudança local na graduação dos eixos para ampliar uma parte do traçado” (DUVAL, 2011b, p. 98).

A terceira abordagem denominada de **interpretação global de propriedades figurais** parte da ideia de que o gráfico representa um objeto matemático que também possui uma representação algébrica. Nesse sentido, o estudante precisa compreender que toda modificação no registro gráfico acarretará mudança no registro algébrico e vice-versa. No entanto isso não pode ser considerado de forma aleatória, é necessário identificar exatamente a relação entre cada uma destas modificações para ao final identificar o conjunto de todas as modificações possíveis em relação a determinado objeto matemático. A cada modificação na expressão algébrica que determina uma mudança no registro gráfico Duval denominou de variável visual pertinente. Esta constitui, portanto, a unidade significativa da expressão algébrica.

Em uma expressão algébrica cada símbolo geralmente corresponde a uma unidade significativa, no entanto em alguns casos os símbolos são omitidos, como por exemplo, $y = x$, em que se sabe pelas convenções da matemática que se trata de $y = +1x$. Esta consciência o estudante vai adquirindo ao longo de sua escolarização.

Em relação ao registro gráfico Duval destaca que as unidades significativas não são tão evidentes quanto no registro algébrico. Destaca duas variáveis visuais gerais no registro gráfico:

> De implantação da tarefa, quer dizer, o que se destaca como figura sobre o fundo: uma **linha** ou uma **zona** e relativa à forma da tarefa: a linha traçada que delimita ou não uma zona é reta ou curva. Se for curva, ela é aberta ou fechada (DUVAL, 2011b, p. 100, grifo do autor).

Estendendo essa classificação para os sistemas lineares tem-se retas no caso de sistemas lineares 2 x 2 e planos no caso de sistemas lineares 3 x 3. Portanto, essas duas variáveis visuais gerais já estão definidas ao estudar os sistemas lineares, necessitando estabelecer as variáveis visuais particulares que correspondem a posição relativa entre retas ou entre planos de um mesmo sistema linear e à unidade significativa na expressão algébrica da reta ou do plano, o que permite classificar os sistemas lineares e encontrar o conjunto solução.

A interpretação global pressupõe, portanto que não há como partir do registro gráfico para o algébrico tomando como referência valores particulares, mas por meio da identificação das variáveis visuais pertinentes, o que consiste em "**variar uma unidade significativa na expressão mantendo as outras constantes e ver o que se passa no outro registro** (ou mudar uma variável visual mantendo as outras duas constantes e ver as modificações que acontecem na expressão)" (DUVAL, 2011b, p. 103, grifos do autor). Essa perspectiva, no entanto, nem sempre está nas propostas do ensino da Matemática e quando está presente não contempla a abordagem de interpretação global de propriedades figurais.

No caso do estudo dos sistemas lineares 2 x 2 é importante que o estudante perceba que cada equação do sistema linear pode ser reescrita como uma função polinomial do 1º grau[10], cujo gráfico é uma reta (conforme o Quadro 05). No entanto, as variáveis visuais necessárias para abordar os sistemas lineares serão sutilmente distintas das variáveis usadas para analisar o comportamento da função afim, pois agora o objetivo é fazer a comparação entre as equações de um mesmo sistema linear.

[10] Adotou-se essa relação entre função polinomial do 1º grau, pois os estudantes ainda não estudaram Geometria Analítica, que está prevista na ementa do 3º ano do Ensino Médio.

Quadro 5 – Classificação das variáveis visuais em relação ao registro gráfico de sistemas lineares 2 x 2

Relação da posição das retas e a solução	**Registro algébrico**	**Relação da primeira equação com a segunda**	**Representação algébrica como função afim: y = ax + b**	**Relação entre registro algébrico e gráfico**
Retas coincidentes: Sistema possível e indeterminado: infinitos pares ordenados são soluções do sistema.	$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$	Proporcionalidade nos coeficientes das incógnitas e do termo independente.	$y=-x+5$ $y=\frac{-2x+10}{2} \Rightarrow \mathrm{y=-x+5}$	Coeficiente angular *a* e coeficiente linear *b* são os mesmos nas duas equações.
Retas paralelas: Sistema impossível: não existe par ordenado que seja solução do sistema	$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$	Proporcionalidade nos coeficientes das incógnitas, mas que não se aplica no termo independente.	$y=-x+5$ $y=\frac{-2x+8}{2} \Rightarrow \mathrm{y=-x+4}$	Coeficiente angular se mantém e o coeficiente linear sofre alteração.
Retas concorrentes: Sistema possível e determinado: um único par ordenado é a solução do sistema.	$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-2y=10 \end{cases}$	Não há proporcionalidade nos coeficientes das incógnitas e no termo independente pode ocorrer ou não proporcionalidade.	$y=-x+5$ $y=\frac{2x-10}{2} \Rightarrow \mathrm{y=x-5}$	Coeficiente angular sofre alteração e o coeficiente linear não interfere na posição relativa das duas retas.

Fonte: dados do autor

Por fim constata-se que os sistemas lineares geralmente são abordados de forma compartimentalizada e prioritariamente algébrica. Primeiramente trabalha-se a resolução de sistemas lineares, denominados por Duval como tratamentos algébricos. Dentre os principais métodos de resolução adotados tem-se: adição, comparação, substituição, regra de Cramer e escalonamento. Após estas atividades de sistematização, apresenta-se a classificação de um sistema linear, através da discussão dos resultados encontrados no tratamento, sendo possível classificar os sistemas em: possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI).

No entanto, essa abordagem não estabelece conexões entre a representação algébrica e gráfica e, em momentos posteriores espera-se que o estudante transite de uma representação a outra, sem maiores dificuldades, ignorando os processos cognitivos complexos inerentes a uma conversão. Além disso, o sentido de conversão também precisa ser considerado, pois converter um registro algébrico para o gráfico não equivale a conversão no sentido contrário, os custos cognitivos são diferentes e os processos também.

Assim há a necessidade de mudança na abordagem do ensino de sistemas lineares, de forma a considerar os diferentes registros de representação relacionados a este objeto matemático. “Quando um tal tipo de trabalho é proposto, constata-se uma modificação completa nas iniciativas e atitudes dos alunos para efetuar os tratamentos matemáticos, para os controlar, para a rapidez da execução e também para o interesse colocado na tarefa”(DUVAL, 2009, p. 19).

Desta forma a teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval possibilita fazer uma análise cognitiva das resoluções dos estudantes e isso é imprescindível para que o professor possa compreender, de fato, as razões das dificuldades apresentadas pelos estudantes e não considere as respostas apenas como certas ou erradas, mas que estas revelem o nível de apreensão conceitual que os estudantes possuem, naquele momento, de um determinado objeto matemático.

2.3 BREVE PANORAMA DAS PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Muitas pesquisas no campo da Educação Matemática buscam compreender as dificuldades apresentadas nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática nos diferentes níveis de escolaridade.

Teorias são construídas com o propósito de identificar as origens destas dificuldades e propor mecanismos de superação e/ou minimização, contudo, nem sempre consideram as especificidades da área da Matemática. Nesse sentido, compreende-se que a Teoria de Registros de Representação Semiótica possa fornecer importantes elementos de análise das dificuldades relacionadas ao ensino e a aprendizagem da Matemática e a proposição de alternativas para a superação.

Essa teoria chegou ao Brasil na década de 1990 e inicialmente teve pouca divulgação. No entanto, a partir da década seguinte houve um crescimento significativo de pesquisas que usaram este aporte teórico conforme apontam os documentos citados a seguir.

O artigo “Registros de Representação Semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências”, dos autores Colombo, Flores e Moretti (2008) faz uma análise das pesquisas realizadas no Brasil no período de 1990 a 2005, que utilizam os pressupostos teóricos desenvolvidos por esse autor, como principal fundamento em suas investigações. Este pode ser considerado o primeiro trabalho com o intuito de observar o nível de divulgação dos estudos de Duval no Brasil.

Os pesquisadores observaram que na década de 1990 foram desenvolvidos apenas seis estudos: dois na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e quatro na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), denotando um início discreto da utilização dessa teoria. Já no período de 2001 a 2005 encontraram 24 trabalhos. Este estudo foi importante por permitir pontuar a tendência das pesquisas brasileiras nesse foco e traçar o panorama geral dessas investigações, como forma de apontar possibilidades de utilização dessa teoria em um âmbito maior: na organização de propostas curriculares e na formação, tanto inicial quanto continuada de professores que ensinam Matemática.

"O Cenário da Pesquisa no Campo da Educação Matemática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica", artigo de Brandt e Moretti (2014), faz uma reflexão sobre as pesquisas existentes no campo da Educação Matemática que se valem da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Tais pesquisas corresponderam a teses de doutorado, dissertações de mestrado, trabalhos apresentados em eventos na categoria "comunicação científica" e resultados de pesquisas publicadas em periódicos nos anos de 2006 a 2009, dando continuidade ao levantamento de trabalhos realizados pelo artigo anterior até o ano de 2005. Foram analisados 56 trabalhos e os resultados parciais encontrados revelaram um crescimento significativo de pesquisas que buscam essa teoria como fonte de interpretação e análise dos mais diversos problemas relacionados às preocupações no ensino e aprendizagem da Matemática.

Assim é oportuno destacar que "os diversos trabalhos encontrados, nesse período, nos permitem inferir que cresce a crença na contribuição dessa teoria, para ir ao encontro do paradoxo presente na aprendizagem da matemática." (BRANDT, MORETTI, 2014, p. 29). Ainda de acordo com os autores isso demonstra que esta teoria possibilita a superação de obstáculos epistemológicos e didáticos e mostra-se aplicável em todos os níveis de ensino e para a aprendizagem de todos os objetos matemáticos. Destaca-se ainda que pode ser usada com diferentes metodologias de ensino.

O artigo "Mapeamento de pesquisas que utilizam o referencial dos Registros de Representação Semiótica- RRS: a produção em periódicos brasileiros" de Maggio e Nehring (2016) fez um levantamento das pesquisas publicadas nos principais periódicos do Brasil na área de Educação Matemática entre os anos de 2010 a 2015 que utilizaram os pressupostos teóricos desenvolvidos por Duval com o objetivo de compreender como essa teoria vem sendo empregada nas pesquisas. Identificaram 29 artigos e constataram que as operações cognitivas metadiscursivas (tratamentos e conversões) vêm sendo enfatizadas em detrimento das operações discursivas; sendo, que apenas uma pesquisa considera, em parte, as relações entre ambas. Destes, somente um artigo fez referência ao estudo dos sistemas lineares 3 x 3.

Este trabalho afirma a consolidação dessa teoria nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática, mas aponta que a quase totalidade dos trabalhos aborda apenas os tratamentos, as conversões e a articulação entre os diferentes registros de representação. Há a necessidade de pesquisar as possibilidades para o uso dessa teoria através da integração das abordagens cognitiva, matemática e pedagógica, bem como da exploração das operações discursivas.

Percebe-se nestes levantamentos, a existência de poucas publicações relativas ao ensino dos sistemas lineares, constituindo mais um fator que justifique a importância desta pesquisa.

3 O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo apresenta-se inicialmente um estudo dos documentos oficiais referente ao ensino de sistemas lineares, faz-se a discussão dos diferentes métodos de resolução e por fim uma breve análise do livro didático adotado na instituição em que foi aplicada a pesquisa.

3.1 DOCUMENTOS OFICIAIS E O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

Este trabalho foi desenvolvido em um período de construção de uma nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC), resultado de um amplo debate e participação de diferentes segmentos da educação e da sociedade brasileira em geral. A primeira versão foi disponibilizada para consulta entre outubro de 2015 e março de 2016. A segunda versão foi publicada em maio de 2016 e através da discussão entre secretarias de educação e especialistas, culminou com a terceira versão publicada em abril de 2017 e encaminhada ao Conselho Nacional de Educação (CNE) para revisão e aprovação, sendo homologada no mês de dezembro de 2017, sem alterações significativas na área de Matemática em relação a versão publicada em abril.

A construção de uma Base Nacional Comum Curricular responde a necessidade de regulamentação e institucionalização de um regime de colaboração entre os sistemas educacionais, sendo uma referência nacional tendo por finalidade orientar os sistemas estaduais e municipais na elaboração e reelaboração de seus currículos e propostas.

No entanto essa última versão da BNCC não contemplou o Ensino Médio, que estava previsto na primeira e segunda versão. Isso ocorreu devido a reforma do Ensino Médio proposta no início de 2017, trazendo a tona mudanças significativas e, portanto a necessidade de construção de um novo documento para essa etapa da Educação Básica que contemple estas mudanças, mas não há previsão de conclusão e publicação desse referencial.

Como a versão final da BNCC do Ensino Médio ainda não está concluída, neste trabalho fez-se o apontamento do que está previsto nas duas versões provisórias da BNCC e também em outros documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2000), Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (2002) e Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), que ainda constituem importantes documentos norteadores da prática docente e das pesquisas em educação.

O Ensino Médio constitui a etapa final da Educação Básica, contudo, não deve ser considerada uma etapa isolada das anteriores, mas que propicie a continuidade das aprendizagens iniciadas no Ensino Fundamental e o desenvolvimento de novas capacidades.

> De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos (BRASIL, 2006, p. 69).

Em relação a Matemática é oportuno destacar a ampliação progressiva dos processos de abstração e generalização, para que o estudante perceba que determinadas relações surgem e são válidas em diferentes contextos.

Nessa etapa é importante também o aprimoramento no uso da linguagem matemática para que argumentos e justificativas utilizem linguagem clara, precisa, concisa e com a simbologia específica da Matemática.

A terceira versão da BNCC do Ensino Fundamental estabelece cinco unidades temáticas: Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, Números e Álgebra. Enquanto os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) não previam a organização dos conteúdos de forma estanque e hierarquizada em cada ano de escolaridade, a BNCC traça claramente quais conteúdos devem ser desenvolvidos em cada ano e o nível de aprofundamento.

Em relação ao componente curricular Matemática parte-se do entendimento que a terceira versão da BNCC do Ensino Médio contemplará as mesmas unidades temáticas previstas para o Ensino Fundamental, como ocorreu nas versões anteriores. Este documento reflete, portanto, as atuais tendências no ensino de Matemática atreladas as experiências de sala de aula, traduzindo de certa forma, o que é necessário ensinar e aprender em cada etapa da Educação Básica, de forma a alcançar os objetivos previstos para a educação frente as novas exigências que se impõem.

Dessa forma o objeto matemático sistemas lineares faz parte da unidade temática Álgebra, com previsão de que se aborde os sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, denominado neste trabalho como sistemas lineares, no 8º ano do Ensino Fundamental. Em relação aos sistemas lineares no Ensino Fundamental a BNCC aponta ainda os seguintes objetivos a serem alcançados:

> Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano. Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas

> incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso (BRASIL, 2017, p. 311).

Convém ressaltar que em relação ao Ensino Médio, na primeira versão os objetivos de aprendizagem foram organizados por ano de escolaridade, já na segunda versão organizou-se por unidades curriculares.

De acordo com a BNCC há a continuidade do estudo dos sistemas lineares no Ensino Médio, e na primeira versão este objeto matemático estava previsto para ser abordado no 2º ano do Ensino Médio, tendo como objetivo: resolver problemas que envolvam sistemas de três equações de primeiro grau e três incógnitas usando os métodos da substituição e escalonamento. Na segunda versão continua a previsão do mesmo objetivo, porém não delimita o ano de escolaridade em que esse objeto precisa ser trabalhado e suprimiu o método da substituição na resolução de sistemas lineares 3 x 3, orientando o uso apenas do método de escalonamento. No Projeto Pedagógico do Curso Técnico em Vestuário Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal Catarinense – Campus Ibirama, há a previsão de que os sistemas lineares sejam trabalhados no 2º ano do Ensino Médio.

Além da previsão da abordagem do objeto matemático sistemas lineares conforme preceituam os documentos oficiais, destaca-se ainda a importância deste pelas inúmeras aplicações.

> O estudo da resolução de **Sistemas lineares** – problemas com duas ou mais variáveis – sempre esteve entre os desafios mais intrigantes e relacionados a situações do cotidiano e tem sido objeto de estudo dos matemáticos ocidentais desde o século XVII com as importantes contribuições de Leibniz e Cayley relacionando sistemas lineares a determinantes e suas representações matriciais (DANTE, 2013, p. 51, grifo do autor).

Rufato (2014) em seu trabalho de dissertação aponta algumas aplicações em que faz-se necessário o uso dos sistemas lineares: circuitos elétricos, balanceamento de equações químicas e controle do fluxo de veículos. Neman (2013) cita como exemplos de aplicações: alocação de recursos limitados, jogos lineares finitos, redes e interpolação polinomial. Dessa forma são muitos os exemplos das diversas aplicações dos sistemas lineares e pontua-se ainda que estão atrelados ao desenvolvimento tecnológico e controle industrial.

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+EM) preveem a necessidade de abordar situações contextualizadas relacionadas a aplicação dos sistemas lineares.

> [...] estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento. Uma abordagem

> mais qualitativa e profunda deve ser feita dentro da parte flexível do currículo, como opção específica de cada escola (BRASIL, 2002, p. 122).

Nessa discussão destaca-se também a necessidade de contextualizar as atividades a fim de que o estudante aproprie-se de maneira mais efetiva dos objetos matemáticos em estudo. No entanto o termo contextualização nem sempre tem sido usado de forma adequada.

> Outra distorção perceptível refere-se a uma interpretação equivocada da idéia de contexto, ao se trabalhar apenas com o que se supõe fazer parte do dia-a-dia do aluno. Embora as situações do cotidiano sejam fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata (BRASIL, 1998, p. 23).

Este é o entendimento de contextualização adotado neste trabalho. A contextualização consta como uma forma de dar sentido ao conteúdo matemático e não a ideia de ter um caráter meramente ilustrativo, distorcendo a sua concepção.

Além da abordagem de situações contextualizadas envolvendo os sistemas lineares considera-se ainda o que a Teoria de Duval aponta que o estudante precisa apropriar-se dos diferentes registros de representação deste objeto matemático para garantir a apreensão conceitual.

A abordagem dos diferentes registros de representação parte da premissa de que ao resolver um sistema linear o estudante pode deparar-se com alguma dificuldade relacionada ao tipo de registro com o qual está trabalhando. Assim poderá recorrer a outro tipo de registro desse mesmo objeto matemático para conseguir solucioná-lo ou até mesmo confrontar as soluções encontradas nos diferentes registros de representação a fim de validá-las.

Documentos oficiais pontuam a necessidade de abordar diferentes registros. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio, por exemplo, enfatizam a necessidade de colocar a álgebra sob o olhar da geometria, no entanto isso fica restrito a sistemas 2 x 2. Na BNCC também não há previsão de abordar os sistemas lineares 3 x 3 sob a ótica de diferentes registros.

> A resolução de um sistema 2 x 2 de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas (BRASIL, 2006, p. 78).

No entanto algumas pesquisas como as de Battaglioli (2008), Jordão (2011) e Freitas (2013) indicam que os sistemas lineares são abordados prioritariamente no registro algébrico, cuja ênfase dada é em relação aos métodos de resolução, ao que Duval já apontava em seus trabalhos: o ensino centra-se sobre as atividades de tratamento a serem realizados em um determinado registro de representação. Resolver sistemas tem-se restringido a empregar um método para determinar o valor das incógnitas, quando possível e o professor atribui à resolução de muitos exercícios no registro algébrico ao domínio desse objeto matemático e um aparente sucesso escolar.

Embora as pesquisas mencionadas apontem que a Álgebra constitui a unidade temática mais trabalhada pelos professores, ainda assim é notável o baixo desempenho dos estudantes brasileiros.

O PISA (Programme for International Student Assessment) traduzido como Programa Internacional de Avaliação de Estudantes do qual o Brasil faz parte, consiste em avaliar a cada três anos estudantes matriculados a partir do 7º ano do Ensino Fundamental na faixa etária dos 15 anos nas áreas de Leitura, Matemática e Ciências.

De acordo com os resultados publicados em 2015 o desempenho dos estudantes no Brasil está abaixo da média dos estudantes dos países participantes do PISA. Em Matemática, os estudantes obtiveram 377 pontos comparados a média de 490 pontos.

Na avaliação de Matemática aplicada em 2015[11], numa escala que vai do nível 0 ao 6, 43,74% dos estudantes brasileiros ficaram abaixo do nível 01 e 26,51% no nível 1, demonstrando que cerca de 70% dos estudantes submetidos a esta avaliação não dominam competências e conceitos básicos da Matemática.

Dentre as quatro categorias de conteúdos analisados: 1) Mudanças e Relações, 2) Espaço e Forma, 3) Quantidade e 4) Incerteza e Dados, a categoria Mudanças e Relações que constitui a Álgebra foi a categoria com o segundo maior nível de dificuldade para os estudantes brasileiros, perdendo apenas para a categoria Espaço e Forma que tradicionalmente é a menos trabalhada nas escolas.

Em relação a categoria Mudanças e Relações o documento destaca como fundamentais: "Aspectos do conteúdo matemático tradicional de funções e álgebra, inclusive de expressões algébricas, equações e inequações. Representações tabulares e gráficas, são fundamentais na descrição, modelagem e interpretação de fenômenos que se modificam" (BRASIL, 2016, p. 146). Observa-se portanto, o destaque para a mobilização de diferentes registros de representação nesta avaliação.

[11] O relatório completo (Brasil no Pisa 2015 – Relatório Nacional) encontra-se disponível em http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf

Diante destas constatações em relação ao que preconizam os documentos e avaliações oficiais em relação ao ensino de sistemas lineares parte-se para a análise do livro adotado pela instituição onde foi aplicada esta pesquisa com intuito de analisar como esse objeto matemático é abordado e ainda se o livro didático contempla atividades de tratamento e conversão e a articulação entre os diferentes registros de representação semiótica dos sistemas lineares.

3.2 O LIVRO DIDÁTICO E O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

Parte-se do pressuposto, de que em grande parte das escolas públicas, o livro didático ainda é um dos principais referenciais para o trabalho do professor. Em relação a Matemática mesmo que o professor não utilize exclusivamente o livro didático na exposição do conteúdo, verifica-se que os exercícios, em sua maioria, são extraídos dos livros didáticos, conforme apontado pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio e em algumas pesquisas.

> Na ausência de orientações curriculares mais consolidadas, sistematizadas e acessíveis a todos os professores, o livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, gerando, muitas vezes, a concepção de que ‘o mais importante no ensino da matemática na escola é trabalhar o livro de capa a capa’. Nesse processo o professor termina perdendo sua autonomia como responsável pelo processo de transposição didática interna (BRASIL, 2006, p. 86).

A análise do livro didático possibilita, de certa forma, compreender as concepções dos autores em relação ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática e as concepções implícitas nos critérios de avaliação dos livros didáticos adotados pelo Ministério da Educação (MEC) através do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

O livro didático deve ser compreendido como uma ferramenta auxiliar, dentre as que o professor deve dispor para organizar o trabalho em sala de aula. O professor deve refletir sobre as concepções presentes nos livros didáticos e a partir disso verificar o que é ou não pertinente ao seu trabalho em sala de aula.

Analisou-se o capítulo referente aos sistemas lineares do livro didático “Matemática Contextos e Aplicações do 2º ano do Ensino Médio” do autor Luiz Roberto Dante, edição 2013, por ser o livro usado no IFC Campus Ibirama. O objeto matemático sistemas lineares é abordado no capítulo 6, após o estudo de matrizes e determinantes, possibilitando o uso da Regra de Cramer como um dos métodos de resolução de sistemas lineares.

A abertura do capítulo acentua a importância dos sistemas lineares devido a sua aplicabilidade na resolução de diferentes situações, no entanto, o autor praticamente não as contemplou na apresentação desse objeto matemático, ficando restrito a apenas uma situação contextualizada na explicação de um exercício resolvido de sistemas lineares 3 x 3 com o uso do método de escalonamento. Contudo, ao final do capítulo é proposta a resolução de sete situações contextualizadas referentes aos sistemas lineares, representados, em sua maioria, no registro em língua materna.

Os sistemas lineares são abordados prioritariamente no registro algébrico, portanto é necessário discutir os métodos empregados para a resolução dos sistemas lineares de ordem até 3. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio e a segunda versão da BNCC destacam a preferência pelos métodos de substituição e de escalonamento e o abandono do uso da Regra de Cramer.

> A resolução de sistemas 2 x 3 ou 3 x 3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equação 3 x 3, a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. Dessa forma, fica também dispensado o estudo de determinantes (BRASIL, 2006, p. 78).

Jordão (2011) discorda parcialmente desta visão e aponta que em sua prática docente verifica que os estudantes preferem usar o método da adição na resolução de sistemas lineares.

> Em nossa prática em sala de aula, ao abordarmos a resolução do sistema linear 3 x 3 percebemos que os alunos apresentam dificuldade ao aplicar o método do escalonamento: ao multiplicarem a primeira equação por um número pertencente ao conjunto R*, ao adicionarem o resultado com a segunda ou terceira equação, os alunos erram nos cálculos (JORDÃO, 2011, p. 64).

Uma análise mais detalhada sobre a resolução de sistemas lineares pelos métodos da adição e escalonamento mostra que são bastante semelhantes, pois tem o mesmo objetivo: transformar as equações possibilitando a sua resolução. No entanto os dois métodos buscam atingir este objetivo por meio de procedimentos diferentes.

Outro método de resolução dos sistemas lineares de ordem 3, a Regra de Cramer, foi largamente usado e atualmente não consta em parte dos livros didáticos, devido as orientações contrárias por parte de documentos oficiais, como já apresentado.

O livro didático de Dante (2013) faz uma pequena referência ao fato de que qualquer sistema linear $n \times n$ pode ser escrito como um produto de matrizes, mas ressalta que usar o determinante para classificar o sistema não é um modo eficaz e segue a tendência que tem sido observada: o abandono da regra de Cramer na resolução dos sistemas lineares.

Parte-se do pressuposto de que o abandono decorra de que essa regra possibilita determinar facilmente a solução quando um sistema é possível e determinado, mas não evidencia objetivamente quando o sistema é possível e indeterminado ou impossível, incorrendo em erros apontados pelos guias de livros didáticos.

Na manipulação algébrica estes erros podem até não ser percebidos, mas o uso do registro gráfico ou a observação da proporcionalidade entre as equações que compõem o sistema linear traz à tona a fragilidade dessa regra, o que reforça a importância da coordenação de ao menos dois registros de representação ao abordar um objeto matemático para obter resultados mais confiáveis.

Além disso, a Regra de Cramer necessita do uso de determinantes, então aplica-se apenas a matrizes quadradas[12], o que limita a sua aplicação em determinados casos. No entanto nos casos que o sistema é possível e determinado o seu uso pode ser até mais fácil do que de outros métodos de resolução, desde que sejam sistemas lineares 2 x 2 ou 3 x 3.

Neste trabalho foram apresentados aos estudantes diferentes métodos de resolução dos sistemas lineares de forma a fornecer ferramentas que possam se adaptar a cada uma das situações, provocando nos estudantes a reflexão sobre a escolha do método mais conveniente em cada uma das situações apresentadas. Partindo da compreensão de que o estudante deva refletir sobre o que está aprendendo, considera-se um tanto arbitrário a exigência de um único método de resolução, mesmo tendo esta disposição nas orientações curriculares oficiais.

Em relação ao uso do método da substituição, nos sistemas 3 x 3, constata-se que exige mais manipulação algébrica e, assim como no método de escalonamento, a dificuldade dos estudantes ocorre nas operações elementares que precisam ser usadas para a eliminação das incógnitas.

Conforme apontado por Pantoja (2008) os tratamentos ensinados nas escolas para resolver sistemas são apresentados isoladamente um do outro, no entanto, o resultado apresentado na sua pesquisa mostrou que a articulação entre os métodos para se resolver sistemas lineares é possível e contribui para a aprendizagem deste conteúdo.

Ainda reafirmando a Teoria de Duval sobre a articulação e o trânsito entre os diferentes registros de representação as Orientações Curriculares para o Ensino Médio de 2006 enfatizam a necessidade de colocar a álgebra sob o olhar da geometria.

Constatou-se no livro didático analisado a presença do registro gráfico somente nos sistemas 2 x 2 de forma incipiente. Em relação aos sistemas lineares 3 x 3 apresenta-se uma

[12] Matrizes quadradas são as matrizes que possuem o número linhas igual ao número de colunas.

seção ao final do capítulo, como caráter ilustrativo as oito possibilidades para as posições relativas de três planos no espaço, mas sem relacionar essas posições ao registro algébrico dos sistemas lineares 3 x 3.

Verificou-se ainda, que há somente uma atividade que solicita a conversão do registro gráfico para o algébrico nos sistemas lineares 2 x 2 e nenhuma atividade que solicita a conversão no sentido inverso.

Portanto a abordagem gráfica geralmente não é estendida para os sistemas lineares 3 x 3, evidenciando o que observou-se na análise do livro didático: enquanto as abordagens dos sistemas 2 x 2 gradativamente sugerem a inserção da representação gráfica o mesmo não ocorre com os sistemas 3 x 3, ficando estes praticamente restritos a resolução algébrica, conforme apontado também pelas pesquisas citadas neste trabalho e pelo Guia do Livro Didático 2015.

> Uma dificuldade vem de que, comumente, o estudo da equação cartesiana de um plano no espaço tridimensional não é feito no ensino médio. Em face disso, tem prevalecido uma abordagem meramente informativa para relacionar as possibilidades de solução de um sistema linear 3 x 3 com as posições relativas de três planos no espaço, o que é insatisfatório do ponto de vista da aprendizagem (BRASIL, 2014, p. 97-98).

Considera-se importante fazer o uso do registro gráfico, independente de que a geometria analítica seja trabalhada apenas no 3º ano do Ensino Médio, pois os objetos matemáticos não precisam ser trabalhados de forma hierarquizada, podem e devem ser retomados em outros momentos da escolaridade sob novos enfoques e objetivos.

O ensino de determinado objeto matemático não deve ser apresentado uma única vez e nem esgotado em um único ano, pois “[...] para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos.” (BRASIL, 1998, p. 23), o que alguns autores denominam de currículo em espiral.

A proposição de atividades considerando os diferentes registros de representação visa ainda que os estudantes interpretem as soluções encontradas e retornem a atividade para identificar possíveis erros, possibilitando um maior controle sobre a resolução dos sistemas lineares.

Campos (2013) também afirma que os estudantes apresentam dificuldades na compreensão dos sistemas lineares e de seus métodos de resolução e como possibilidade de alteração dessa situação sugere a interpretação geométrica.

Conforme já apontado por Duval a coordenação de diferentes registros de representação não é espontânea e é tarefa do professor organizar atividades que atinjam este objetivo.

> Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade (BRASIL, 2000, p. 43).

Por fim, a análise do capítulo referente aos sistemas lineares mostrou ainda que as atividades previstas no livro didático, por si só, não permitem a articulação entre os diferentes registros, cabendo ao professor intencionalmente organizar situações que mobilizem os diferentes registros, de forma a promover a apreensão conceitual.

3.3 O USO DAS TECNOLOGIAS NO ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

Ao evidenciar a importância da articulação e do trânsito entre os diferentes registros de representação relacionados aos sistemas lineares destaca-se a preocupação com a inserção e mobilização do registro gráfico. Nesse contexto surge a necessidade de buscar alternativas que dinamizem o processo de ensino, uma vez que torna-se bastante árdua e inoperante a tarefa de construir representações gráficas apenas no quadro, dado o seu caráter estático. A apresentação destes registros através de projetores multimídia, por exemplo, também não pode ser considerada totalmente adequada se o princípio é que o estudante construa o seu conhecimento.

Assim, é necessário inserir as tecnologias em sala de aula, mas de modo planejado e intencional.

> Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática (BRASIL, 2006, p. 87).

Conforme já apontado anteriormente não se trata do uso aleatório da tecnologia, mas com o propósito de otimizar o tempo escolar e o alcance de novos objetivos que não seriam possíveis sem o uso destas tecnologias, como a movimentação de uma representação gráfica, por exemplo, que só é possível com o uso de um *software*.

Nesse contexto destaca-se o papel dos *softwares* educativos como auxiliares ao trabalho do professor na articulação entre os diferentes registros de representação dos sistemas lineares, especificamente os sistemas denominados 3 x 3, desde que o professor elabore atividades intencionais que permitam ao estudante transitar entre os diferentes registros e analisar a relação entre eles. De acordo com a segunda versão revista da BNCC, "o trabalho e a conversão entre representações algébricas e gráficas são de vital importância para análise e interpretação das relações existentes entre as variáveis envolvidas. (BRASIL, 2016, p. 576).

Neste trabalho fez-se a opção pelo *software* GeoGebra, pois é um *software* livre e possui uma particularidade importante no estudo de sistemas lineares: permite a visualização concomitante do registro algébrico e do gráfico, possibilitando acompanhar e analisar as alterações que podem ser feitas em um dos registros e a implicação dessa modificação no outro tipo de registro. Além disso, há a necessidade do uso de um *software* para visualizar a representação gráfica dos sistemas 3 x 3, pois sem o seu uso torna-se muito difícil a visualização geométrica no espaço e principalmente a possibilidade de movimentação. Destaca-se ainda que a familiaridade do pesquisador com esse *software* foi um dos pontos que influenciou a sua escolha e a facilidade de utilização pelos estudantes.

O GeoGebra é um *software* que atende o que é explicitado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e em outros documentos oficiais.

> Já se pensando na *Tecnologia para a Matemática*, há programas de computador (*softwares*) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos [...]. São características desses programas: a) conter um certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento; b) oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica, geométrica; c) possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macroconstruções; d) permitir a manipulação dos objetos que estão na tela (BRASIL, 2006, p. 88).

Este *software* aliado a atividades planejadas pelo professor permite romper com a apresentação estática da representação gráfica que tradicionalmente é proposta em alguns livros didáticos e práticas que usam apenas o quadro em sala de aula.

> No uso de tecnologia para o aprendizado da Matemática, a escolha de um programa torna-se um fator que determina a qualidade do aprendizado. É com a utilização de programas que oferecem recursos para a exploração de conceitos e idéias matemáticas que está se fazendo um interessante uso de tecnologia para o ensino da Matemática (BRASIL, 2006, p. 89-90).

Por isso a escolha de um *software* também precisa considerar os objetivos que se pretende atingir. Freitas (2013) ao fazer uso de um *software* conclui que ao observar que as alterações feitas no registro algébrico provocam mudanças no registro gráfico melhorou o desempenho dos estudantes na resolução e discussão dos sistemas lineares.

Cabe destacar ainda que um *software* permite um número maior de experimentos sem, no entanto anular o esforço da atividade compreensiva por parte do estudante, cabendo ao professor organizar situações intencionais que possibilitem a gradativa coordenação entre diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, considerando que [...]

a coordenação entre representações ressaltando sistemas semióticos diferentes não tem nada de espontâneo. Sua colocação não resulta automaticamente de aprendizagens clássicas muito diretamente centradas sobre conteúdos de ensino (DUVAL, 2009. p. 19).

No entanto, a inserção de *softwares*, em algumas atividades, exige esforços por parte do professor. Primeiramente pelo número excessivo de estudantes por classe em grande parte das escolas públicas brasileiras e em segundo lugar pela falta de laboratórios de Informática e equipamentos. Nas escolas que possuem laboratórios de Informática e equipamentos em condições de funcionamento é necessário ainda se adequar a disponibilidade de horários destes laboratórios com o horário das aulas de Matemática.

Outro desafio é a formação continuada de professores para o uso destes *softwares* atrelados ao planejamento de atividades que busquem explorar ao máximo o seu potencial, ou seja, atividades que requeiram ao estudante a mobilização de diferentes habilidades.

Mesmo com as dificuldades apontadas é necessário engajar-se na busca de melhores condições físicas e pedagógicas das escolas, visando como objetivo a aprendizagem dos estudantes.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo contempla a metodologia utilizada na pesquisa desenvolvida em uma classe do 2º ano do Ensino Médio do Instituto Federal Catarinense – Campus Ibirama. Apresenta o cenário e os sujeitos participantes da pesquisa, bem como os instrumentos de coleta dos dados, as categorias de análise dos dados obtidos e a metodologia de ensino adotada.

4.1 METODOLOGIA DA PESQUISA

Ao proceder uma investigação científica há de se escolher uma abordagem que atenda as características do fenômeno a ser investigado. De acordo com Lüdke e André (1986) durante muito tempo os fenômenos educacionais e relativos aos processos de ensino e aprendizagem foram estudados como fenômenos físicos; no entanto nas últimas décadas este cenário foi gradativamente se alterando devido as limitações deste tipo de abordagem em determinadas investigações. De acordo com estas autoras o fenômeno educacional é complexo, não se adequando a rigidez de um esquema experimental.

Por tratar-se de uma investigação que visa analisar as contribuições de uma sequência didática na aprendizagem de sistemas lineares de estudantes do 2º ano do Ensino Médio esta pesquisa teve uma abordagem qualitativa participante, pois "os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa rico em pormenores, descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas e, de complexo tratamento estatístico" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.16). Denomina-se participante pois o pesquisador é o próprio professor da classe em que ocorreu a investigação.

Ainda de acordo com Bogdan e Biklen (1994) uma investigação qualitativa possui cinco características principais, no entanto, estes mesmos autores pontuam que dependendo do fenômeno pesquisado, nem toda investigação qualitativa apresenta todas as cinco características apontadas.

> 1) Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; 2) a investigação qualitativa é descritiva; 3) os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados dos produtos; 4) os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; 5) o significado é de importância vital na abordagem qualitativa. (BOGDAN; BIKLE, 1994, p. 47-50)

Compreende-se que essa pesquisa atende as características anteriormente elencadas visto que: os dados foram coletados no ambiente natural dos estudantes, a sala de aula, o pesquisador é o próprio professor da classe, sendo possível a compreensão do contexto de aplicação da pesquisa. Todos os dados coletados foram analisados de forma descritiva e reflexiva, sendo investigado todo o processo, obtendo a compreensão detalhada do fenômeno pesquisado. Os dados foram analisados de acordo com os critérios estabelecidos pela Teoria de Duval, mas as análises foram construídas a partir dos dados particulares analisados e houve o constante diálogo entre o investigador e os estudantes possibilitando capturar as perspectivas dos participantes conforme apontado por Lüdke e André (1986).

Pontua-se ainda que o objetivo da pesquisa qualitativa é “[...] compreender o processo mediante o qual as pessoas constroem significados e descrever em que consistem estes mesmos significados” (BODGAN, BIKLE, 1994, p. 70).

Visando atingir os objetivos propostos nesta pesquisa foram realizadas algumas etapas que serão, resumidamente, descritas na sequência.

Inicialmente fez-se a pesquisa bibliográfica em relação aos trabalhos correlatos em diferentes bases de dados disponíveis online: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), Portal da Capes, Scielo, Google Acadêmico e os Anais do XI e do XII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), utilizando as palavras chave representação semiótica e sistemas lineares. Foram selecionados os trabalhos considerados mais significativos e que contribuiriam com este projeto de pesquisa.

Em seguida fez-se a leitura de livros e artigos que abordavam a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval e o ensino e a aprendizagem dos sistemas lineares fornecendo consistente fundamentação teórica para a realização deste trabalho de pesquisa.

Fez-se a análise do livro didático de Matemática do 2º ano do Ensino Médio adotado no Instituto Federal Catarinense – Campus Ibirama com o objetivo de identificar atividades de tratamento, conversão e articulação dos diferentes registros de representação semiótica em relação ao objeto matemático sistemas lineares visando a adaptação de algumas destas atividades na elaboração da sequência didática.

Dando continuidade a pesquisa elaborou-se a sequência didática, fundamentando-se na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, selecionou-se atividades em livros, dissertações, dentre outros, assim como criou-se algumas, que possibilitassem tratamentos, conversões e a transição entre os diferentes tipos de registros dos sistemas lineares.

Por último fez-se a aplicação e análise das produções dos estudantes de acordo com os critérios previamente estabelecidos considerando os pressupostos da Teoria de Duval.

Esta pesquisa, CAAE, número 72267317.9.0000.5370 foi aprovada pelo Comitê de Ética da Universidade Regional de Blumenau sob o Parecer 2. 225. 560.

4.2 O CENÁRIO DA PESQUISA[13] E OS SUJEITOS PARTICIPANTES

Os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia criados por meio da Lei 11892/2008, constituem um modelo de educação profissional e tecnológica cujo objetivo é a difusão de conhecimentos científicos e tecnológicos, respondendo de modo eficaz às crescentes demandas por formação profissional, respeitando os arranjos produtivos locais.

Têm como missão ofertar uma educação de excelência, pública e gratuita, com ações de ensino, pesquisa e extensão, a fim de contribuir para o desenvolvimento socioambiental, econômico e cultural. Trata-se de uma autarquia federal vinculada ao Ministério da Educação gozando das seguintes prerrogativas: autonomia administrativa, patrimonial, financeira, didático-científica e disciplinar.

O “Campus Avançado de Ibirama” foi instalado em 2010 sendo vinculado ao Campus Rio do Sul até 03 de fevereiro de 2011. Inaugurado em 1º de fevereiro de 2010 no antigo Colégio Hamônia, iniciou suas atividades no primeiro semestre de 2010 com o Curso Técnico em Informática. No dia 04 de fevereiro de 2011 o Campus Ibirama deu início ao seu funcionamento regular e uma mudança na vinculação, deixando de pertencer ao campus de Rio do Sul e passando a ter vinculação direta à Reitoria do IFC, instalada em Blumenau.

Atualmente oferta os cursos Técnicos de Administração, Vestuário e Informática integrados ao Ensino Médio, o curso superior de Tecnologia em Design de Moda, classes de Proeja e Especialização em Educação Interdisciplinar e em Moda, sendo referência na região de abrangência. Em relação ao Curso Técnico em Vestuário consta no Projeto Pedagógico do Curso o seguinte objetivo geral.

> O Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio em Vestuário objetiva proporcionar aos discentes o desenvolvimento de sua autonomia enquanto cidadãos críticos e participativos, visando o domínio dos conhecimentos científicos e tecnológicos, para atuarem de maneira consciente e responsável diante das necessidades atuais no mundo do trabalho, com foco na formação e a qualificação de profissionais com visão técnica para atuarem na área de confecção do vestuário, aptos a gerenciar e operacionalizar as diversas etapas do processo de produção do vestuário, em empresas da área industrial e de prestação de serviços (BRASIL, 2015, p. 12-13).

---

[13] Apêndice A – Formulário de solicitação e autorização para o desenvolvimento da pesquisa.

A matriz deste curso possui uma carga horária total de 3680 horas. Destas, 2400 horas correspondem às disciplinas tradicionais do Ensino Médio e 1280 horas correspondem ao Núcleo Profissionalizante.

A pesquisa foi desenvolvida na classe do 2º ano do Curso Técnico em Vestuário Integrado ao Ensino Médio, composta por nove estudantes oriundos do munícipio de Ibirama e municípios vizinhos.

Trata-se de uma classe que possibilita ao professor realizar atendimentos individualizados, devido ao número reduzido de estudantes, no entanto são pouco participativos e apresentam dificuldades na disciplina de Matemática, necessitando de constantes intervenções do professor.

São necessárias explanações pormenorizadas e atividades gradativas para que estes estudantes consigam compreender os conteúdos matemáticos abordados pelo professor.

O corpo docente da instituição é formado em sua maioria, por professores com titulação de Mestre ou cursando Mestrado e os demais possuem titulação de Doutorado.

Em relação ao espaço físico, além das instalações básicas de qualquer escola possui ainda 03 laboratórios de Informática, 01 laboratório de Biologia, Química e Física com monitor, 01 biblioteca e laboratórios específicos para o Curso Técnico em Vestuário que também atendem ao Curso de Tecnologia em Design de Moda.

Todas as salas de aula possuem projetor multimídia instalado e destaca-se ainda que as instalações e os equipamentos citados estão em bom estado de conservação e funcionam normalmente, pois há dois técnicos responsáveis pela manutenção. Além disso, a instituição é relativamente nova e por ter autonomia no uso dos recursos financeiros disponíveis prima pela conservação e manutenção dos bens públicos.

4.3 OS INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS E AS CATEGORIAS DE ANÁLISE DA PESQUISA

Para a coleta de dados todas as aulas foram gravadas em áudio e as produções dos alunos e/ou duplas digitalizadas para análise posterior, fez-se ainda a observação sistemática do desenvolvimento de todas as atividades integrantes da sequência didática, com anotações escritas dos itens que o pesquisador julgou pertinentes e necessários à análise.

Os dados coletados foram analisados considerando todo o processo de aplicação da sequência didática e ocorreu de modo descritivo e reflexivo, de acordo com a fundamentação teórica discutida neste trabalho. Segundo Duval (2012a) para analisar os problemas de compreensão em Matemática é necessário observar os trabalhos dos estudantes através da resolução de situações contextualizadas e a observação de uma sequência de atividades em sala de aula. Mas o pesquisador deve estar atento aos tipos de situações didáticas a que os estudantes serão submetidos para ter eficácia em sua pesquisa.

> Quais situações de produção permitem observar os fenômenos de incompreensão e de compreensão? Como analisar os trabalhos gravados, de maneira a que a interpretação deles traga conhecimentos úteis sobre os fatores de desenvolvimento da compreensão da matemática *para todos os alunos*, sobre um período de uma década, de 6 a 16 anos? (DUVAL, 2012a, p. 315).

Nesse sentido Duval (2012a) menciona que são os trabalhos dos estudantes que possibilitam extrair as condições e as variáveis cognitivas que precisam ser consideradas ao analisar a aprendizagem em Matemática.

Ainda segundo Duval (2012a) as observações podem ser feitas em três níveis de tempos diferentes: a duração de uma aula ou de uma sequência de atividade, o ano escolar ou ainda sobre o currículo. Neste trabalho optou-se em observar as produções referentes a uma sequência didática desenvolvida num período de dois meses, tempo necessário para desenvolver as atividades referentes aos sistemas lineares.

A proposição de uma pesquisa baseada na Teoria de Duval requer ainda que a análise dos trabalhos dos estudantes seja realizada em dois níveis:

> O primeiro nível é aquele da avaliação matemática dos resultados, dos processos, das propriedades ou dos argumentos utilizados. [...] esta avaliação é traduzida em “acertos” e “erros”. Nos trabalhos de pesquisa esta duplicidade constitui a base de toda a codificação de dados. O segundo nível é aquele da análise da compreensão em que os sucessos se manifestam e aquele das fontes de incompreensão. É nesse nível que se encontra a questão da escolha dos critérios de compreensão, quer dizer, do ponto de vista adotado para analisar os sucessos: o sucesso matemático em uma tarefa implica a compreensão da maioria dos alunos? A análise da incompreensão que os erros manifestam é uma análise mais complexa. (DUVAL, 2012a, p. 317 grifo do autor).

As categorias de análise foram definidas previamente considerando os objetivos da pesquisa e os pressupostos teóricos da Teoria de Duval por meio de uma avaliação qualitativa dos dados.

Os critérios de análise de cada atividade serão explicitados no próximo capítulo e todos estão em consonância com a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval e de modo geral consistem em analisar se estudantes foram capazes de: 1) converter situações contextualizadas escritas em língua materna para o registro algébrico e/ou gráfico e vice-versa; 2) encontrar a solução de sistemas lineares 2 x 2 por meio de tratamentos no registro algébrico utilizando os métodos da adição, da substituição ou da comparação; 3) encontrar a solução de sistemas lineares 3 x 3 por meio de tratamentos no registro algébrico utilizando os métodos da adição, do escalonamento ou a Regra de Cramer; 4) converter sistemas lineares representados algebricamente para a representação gráfica e vice-versa; 5) mobilizar diferentes registros de representação ao classificar os sistemas lineares e; 6) articular diferentes registros de representação ao estabelecer o conjunto solução de sistemas lineares, possibilitando maior controle nos resultados obtidos bem como para validá-los.

Por fim verifica-se que essa teoria oferece subsídios metodológicos e critérios que devem ser observados em uma pesquisa em Educação Matemática.

> A validade dos resultados e a confiança na interpretação destes resultados dependem da escolha dos critérios de compreensão assim como do nível de reagrupamento dos elementos que a análise dos trabalhos nos leva a distinguir. O que se trata de avaliar aqui não é somente a aceitação de um resultado, mas sua contribuição e a possibilidade de sua utilização em outros trabalhos. Esta é a condição de um progresso real nas pesquisas sobre o ensino da matemática (DUVAL, 2012a, p. 308).

Desse modo, estes foram os motivos pela escolha dessa metodologia de investigação, sob um ponto de vista cognitivo que permita contribuir para uma melhor compreensão dos aspectos relativos ao ensino e a aprendizagem dos sistemas lineares, constituindo ainda um subsídio para professores e pesquisadores em Educação Matemática.

4.4 METODOLOGIA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A metodologia de ensino adotada foi a aplicação de uma sequência didática, tendo por base situações contextualizadas fundamentadas na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval. As etapas da sequência didática foram organizadas de acordo com o objetivo geral da pesquisa: analisar as contribuições de uma sequência didática elaborada tendo por base a teoria de registros de representação semiótica de Duval na aprendizagem dos sistemas lineares de estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

As atividades foram aplicadas a uma classe do 2º ano do Ensino Médio no período de 11 de setembro a 20 de novembro de 2017. Foram ministradas quatro aulas semanais, cada aula com duração de 45 minutos, sendo: uma aula na segunda-feira, duas aulas na terça-feira e uma aula na quinta-feira e para a aplicação desta pesquisa, foi necessário um total de 38 aulas.

Apresenta-se o cronograma das atividades desenvolvidas na sequência didática referente aos sistemas lineares, ressaltando que em alguns dias da semana não houve aula devido a feriados e a eventos internos do IFC.

Quadro 6 – Cronograma de atividades referente a aplicação da sequência didática

Data	Duração	Atividade e descrição
11/09	45 min	**Sistemas lineares 2 x 2** Atividade 01 (diagnóstica) – conversão RLM → RA.
12/09	90 min	Atividade 02 – Definição de equação linear e sistema linear. Tratamentos algébricos. Atividades 03 e 04 – Conversão RLM → RA e classificação dos sistemas lineares 2 x 2 a partir do tratamento algébrico.
14 e 18/09	90 min	Atividades 05 e 06 – Relação entre a proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas e do termo independente e a classificação dos sistemas lineares.
19/09	90 min	Atividade 07 – Conversão RA→ RG (equações lineares).
21 e 25/09	90 min	Atividade 08 – Conversão RA→ RG (sistemas lineares).
26/09	90 min	Atividade 09 – Conversão RA→ RG (sistemas lineares). Atividade no laboratório de Informática com o uso do *software* GeoGebra.
02/10	45 min	Atividade 10 – Conversão RG → RA.
03/10	90 min	Atividade 10 – Conversão RG → RA.
05/10	45 min	Atividade 11 – Tratamento algébrico.
09/10	45 min	Revisão.
10/10	90 min	Avaliação individual e sem consulta – Sistemas lineares 2 x 2.
16/10	45 min	Término da avaliação.
17/10	90 min	**Sistemas lineares 3 x 3** Atividade 01 – Conversão RLM→RA. Tratamento algébrico (método da adição). Atividade 02 – Conversão RLM →RA. Tratamento algébrico (método da adição).
19/10	45 min	Atividade 03 – Conversão RLM →RA. Tratamento algébrico (Regra de Cramer).
23/10	45 min	Atividade 03 – Tratamento algébrico (Regra de Cramer). Classificação dos sistemas lineares 3 x 3 a partir do tratamento algébrico.
24/10	90 min	Atividades 04 e 05 – Tratamento gráfico e conversão RA → RG. Atividade no laboratório de informática.
26 e 30/10	90 min	Atividade 06 – Tratamento algébrico (escalonamento).
31/10	90 min	Término da atividade 06 – Tratamento algébrico (escalonamento). Atividade 07 – Mobilização dos registros de representação semiótica.
06/11	45 min	Atividade 08. Classificação dos sistemas com base no registro gráfico. Conversão RG →RA.
07/11	90 min	Término da atividade 08. Classificação dos sistemas com base no registro gráfico. Conversão RG →RA. Atividade 09 – Situações contextualizadas envolvendo sistemas lineares.
09/11	45 min	Atividade 09 – Situações contextualizadas envolvendo sistemas lineares.
14/11	90 min	Atividade 09 – Situações contextualizadas envolvendo sistemas lineares.
16/11	45 min	Atividade 10 - Conversão de registro algébrico e gráfico para a língua materna.
20/11	90 min	Avaliação individual e sem consulta – sistemas lineares.

Fonte: dados do pesquisador

Legenda: RLM: Registro em língua materna
RG: Registro gráfico
RA: Registro algébrico

5 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresenta-se a sequência didática referente aos sistemas lineares 2 x 2 e 3 x 3 desenvolvida na classe do 2º ano do Ensino Médio tendo como base a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval. Faz-se a descrição geral do desenvolvimento de cada atividade e a respectiva análise dos resultados obtidos de acordo com os critérios de análise estabelecidos.

A sequência didática foi organizada em duas etapas: a primeira é composta por onze atividades relacionadas aos sistemas lineares 2 x 2 e a segunda composta por dez atividades referentes aos sistemas lineares 3 x 3. Ao final de cada etapa os estudantes foram submetidos a uma avaliação individual e sem consulta, com atividades envolvendo tratamentos, conversões e a articulação entre os diferentes registros de representação, para verificar ainda a compreensão sobre o objeto matemático sistemas lineares após a aplicação da sequência didática. Todas as atividades aplicadas foram aprimoradas e compõem o produto educacional.

Os estudantes foram identificados por letras aleatórias do alfabeto: A, C, J, K, M, N. S, T e V.

5.1 SISTEMAS LINEARES 2 x 2

Atividade 01

Uma alfaiataria fabrica e vende dois tipos de ternos. No mês de maio ela vendeu 15 ternos do modelo A e 10 ternos do modelo B, obtendo uma receita de 16 800 reais. No mês de junho as vendas caíram e só foram vendidos 8 ternos do modelo A e 5 do modelo B, gerando uma receita de 8 720 reais. Qual o preço de venda do terno A e do terno B?

Objetivo: verificar se o estudante identifica que a situação proposta trata de um sistema linear representado no registro em língua materna, se faz a conversão dessa forma de representação para o registro algébrico e se, na sequência, faz o tratamento algébrico usando um dos métodos de resolução de sistemas de equações 2 x 2 supostamente já estudados no Ensino Fundamental ou então no 1º ano do Ensino Médio.

Nesse primeiro momento estavam presentes nove estudantes e não houve intervenção do professor de modo a identificar os conhecimentos prévios dos estudantes acerca dos sistemas lineares 2 x 2, sendo esta uma atividade diagnóstica.

Ressalta-se que o objeto matemático sistemas lineares está previsto na ementa da disciplina e também no Projeto Pedagógico do Curso – PPC para ser trabalhado no segundo ano do Ensino Médio. Geralmente trabalha-se somente os sistemas lineares 3 x 3, mas entende-se que a retomada dos sistemas lineares 2 x 2 é fundamental para verificar o nível de apreensão conceitual dos estudantes, sendo o ponto de partida para o professor planejar as atividades. Pontua-se ainda que a classe é composta de estudantes oriundos de diferentes escolas e torna-se imprescindível identificar se todos tiveram acesso a este objeto matemático no Ensino Fundamental.

Para resolver a situação proposta esperava-se que o estudante convertesse o sistema linear representado em língua materna para o algébrico. No entanto, como em algumas situações envolvendo sistemas lineares 2 x 2 o estudante pode fazer um tratamento no registro numérico, através de tentativas e chegar ao resultado, conforme apontado em pesquisas como a de Freitas (2013); nessa atividade tomou-se o cuidado de não constar nenhum coeficiente das incógnitas x e y que contivessem valores menores para, desse modo, "forçar" o estudante a usar o registro algébrico.

Transcorrido o tempo estipulado para que os estudantes representassem algebricamente a situação proposta, o professor constatou que, dos nove estudantes apenas um conseguiu efetuar a conversão do registro em língua materna para o algébrico. Devido a isto, solicitou que ele escrevesse o sistema no quadro. Destaca-se, no entanto que este estudante não usou a chave para representar o sistema, sendo apontado pelo professor essa necessidade visando demonstrar que as equações pertencem a um mesmo sistema e por isso os valores das incógnitas devem satisfazer ambas as equações.

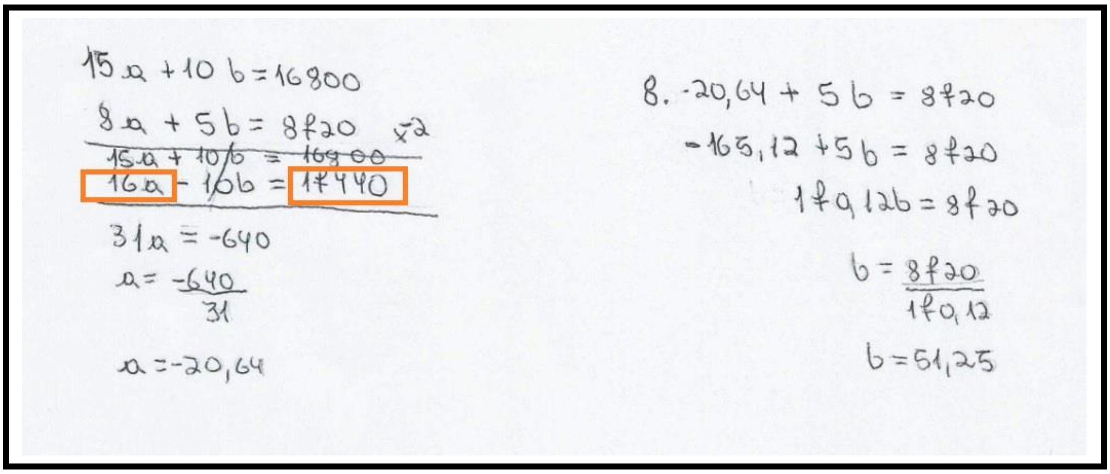
O fato de apenas um estudante fazer a conversão reforça o que Duval (2009, p. 18) sinaliza: "a passagem de um sistema de representação a outro [...] não tem nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e estudantes".

Após os estudantes compreenderem a organização do sistema linear no registro algébrico referente a situação proposta, foi lhes dado mais um tempo para a resolução, novamente sem nenhuma intervenção do professor com o objetivo de verificar se realizariam de forma adequada o tratamento algébrico necessário para a obtenção da solução.

Ao final constatou-se que cinco estudantes resolveram corretamente o sistema, sendo que quatro usaram o método da adição e um usou o método da substituição (aquele que havia conseguido escrever o sistema no registro algébrico). Convém ressaltar que estes estudantes já haviam usado o método da adição para encontrar as matrizes inversas estudadas no ano de 2017. Três estudantes resolveram de modo errado e um não conseguiu resolver.

Em relação aos erros cometidos um estudante não soube usar o método de adição e outros dois cometeram erros na multiplicação de uma equação por uma constante para eliminar uma das incógnitas. Um exemplo (Figura 01) é o fato do estudante apenas considerar como negativa a incógnita a ser eliminada deixando as demais positivas. No entanto mesmo não sinalizando que o termo independente da segunda equação era negativo, o estudante considerou isso ao adicionar os membros de ambas as equações.

Figura 1 – Resolução do sistema linear pelo estudante J



Fonte: Acervo do pesquisador (2017)

Ao final, fez-se a discussão dos diferentes métodos usados pelos estudantes. Quando questionados sobre outras maneiras de resolver um sistema de equações lineares 2 x 2, os estudantes argumentaram que conheciam o método da adição, pois o professor havia abordado em sala em momento anterior. Alguns relataram que usaram o método da substituição no 1º ano do Ensino Médio, mas não recordavam os procedimentos de resolução.

Dessa forma o professor usou o sistema de equações lineares referente a primeira situação apresentada e fez a explicação detalhada de como resolvê-lo através dos métodos da comparação, adição e substituição e solicitou aos estudantes que anotassem estas resoluções no caderno. Salientou que a conveniência em usar cada um destes métodos depende de cada situação.

Convém lembrar que os livros didáticos do Ensino Fundamental geralmente apresentam apenas os métodos de substituição e adição, no entanto considera-se importante apresentar aos estudantes diferentes formas de resolução para que optem por aquelas que considerarem menos complexas e mais adequadas a cada situação proposta. Na resolução de sistemas lineares 2 x 2 os estudantes poderão optar por um destes três métodos de resolução.

Atividade 02

Com base na resolução que você efetuou na atividade anterior responda:
a) Você resolveu um sistema de equações lineares. Pesquise a definição no livro didático ou outro meio e reescreva-a de acordo com a interpretação que você fez da definição apresentada.
*b) Observe os valores encontrados ao resolver o sistema de equações lineares e substitua-os nas duas equações que fazem parte do sistema. Os valores encontrados estão corretos? A incógnita **a**, por exemplo, assume valores iguais ou diferentes nas duas equações? Por quê?*
c) Há a possibilidade de uso de três métodos de resolução de um sistema de equações lineares 2 x 2: adição, substituição e comparação. Tomando por base o exemplo anterior, escolha um dos métodos apresentados e faça uma explicação escrita que serviria a um estudante do 8º ano do Ensino Fundamental que precisa aprender esse método de resolução. Explique ainda porque o método recebe esta denominação.

Atividade 02 –item a

Objetivo: identificar se o estudante define corretamente uma equação e um sistema de equações lineares.

A segunda atividade foi aplicada a oito estudantes. Solicitou-se na aula anterior como tarefa, que os estudantes pesquisassem em diferentes materiais a definição de equações lineares e de sistemas lineares e reescrevessem a definição. Considera-se este tipo de atividade importante, pois nas aulas de Matemática o estudante também precisa exercitar a escrita.

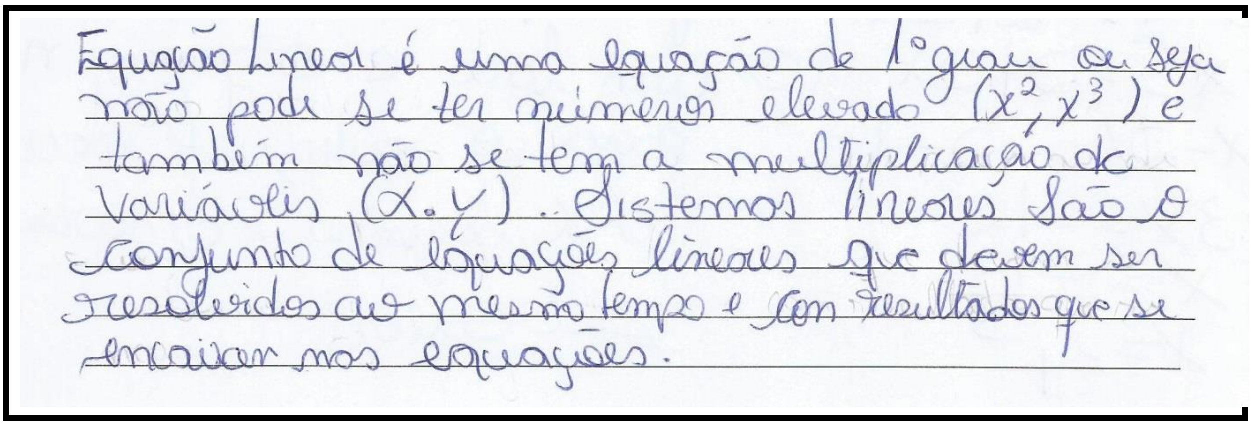
Os estudantes consideraram difícil compreender as definições apresentadas nos materiais pesquisados. De acordo com Duval (2009) essa dificuldade advém do uso especializado da língua materna que se faz na Matemática, ou seja, usar a língua portuguesa no cotidiano é diferente do seu uso nas aulas de Matemática. Além disso, a Matemática é construída por uma simbologia própria, o que pode causar algumas dificuldades iniciais.

De posse dos resultados da pesquisa o professor solicitou que socializassem com a classe. Observou-se que alguns estudantes não fizeram a reescrita da definição de equação linear, apenas omitiram certos trechos do material pesquisado e quando indagados ficou evidente que não haviam compreendido a definição.

Desse modo o professor questionou se era possível compreender a definição de sistemas lineares da forma como estava escrito e sugeriu algumas modificações na escrita a fim de tornar a definição mais adequada e compreensível e salientou que a Matemática tem uma linguagem própria e por isso a escrita precisa ser correta e sem ambiguidades.

Praticamente em todas as definições constou o termo “equação do 1º grau” (Figura 02) e a partir disso o professor indagou a definição da palavra linear, pois este termo não foi alvo de uma pesquisa mais apurada por parte dos estudantes, sendo necessária a intervenção do professor para a compreensão. Nas definições apresentadas percebeu-se ainda que os estudantes não descreveram a possibilidade de uso de um número maior de incógnitas, ficando as respostas muito atreladas a sistemas lineares 2 x 2, não generalizando para outros sistemas.

Figura 2 – Definição de equação linear e sistemas lineares, apresentada pelo estudante K



Equação Linear é uma equação de 1º grau ou seja não pode se ter números elevado (x^2, x^3) e também não se tem a multiplicação de variáveis ($x . y$). Sistemas lineares são o conjunto de equações lineares que devem ser resolvidos ao mesmo tempo e com resultados que se encaixar nas equações.

Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Nesta atividade os estudantes realizaram um tratamento em língua materna denominada paráfrase que consiste em “uma transformação interna ao registro do discurso em língua natural: ela ‘reformula’ um enunciado dado em outro, seja para substitui-lo, seja para explicá-lo” (DUVAL, 2009, p. 57).

Em Matemática há o predomínio de tratamentos algébricos por constituírem registros monofuncionais, que por apresentarem algoritmos em sua própria estrutura, permitem uma variedade de tratamentos, o que não ocorre com os registros monofuncionais, como a língua materna.

No entanto, considera-se que esse tipo de atividade necessita também ser organizada em sala de aula, pois de acordo com Duval (2011a) a língua constitui o primeiro registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento e é notório que os estudantes ficaram surpresos quando precisaram expressar-se por escrito nessa atividade, pois não estavam habituados a fazer isso nas aulas de Matemática.

Atividade 02 – item b

Objetivo: verificar se o estudante compreende que em um sistema de equações lineares 2 x 2 as incógnitas x e y [14] precisam satisfazer ambas as equações do sistema, pois constitui-se em uma importante ferramenta de validação das soluções encontradas, mas pouco usada pelos estudantes.

Inicialmente o professor precisou fazer a leitura e explicação desse item, pois os estudantes não compreenderam o enunciado. Talvez a dificuldade foi a compreensão de que eles deveriam utilizar os valores encontrados na resolução da atividade 01, que ocorreu em outra aula. Acredita-se que ficaria mais claro se os valores estivessem escritos no enunciado da questão.

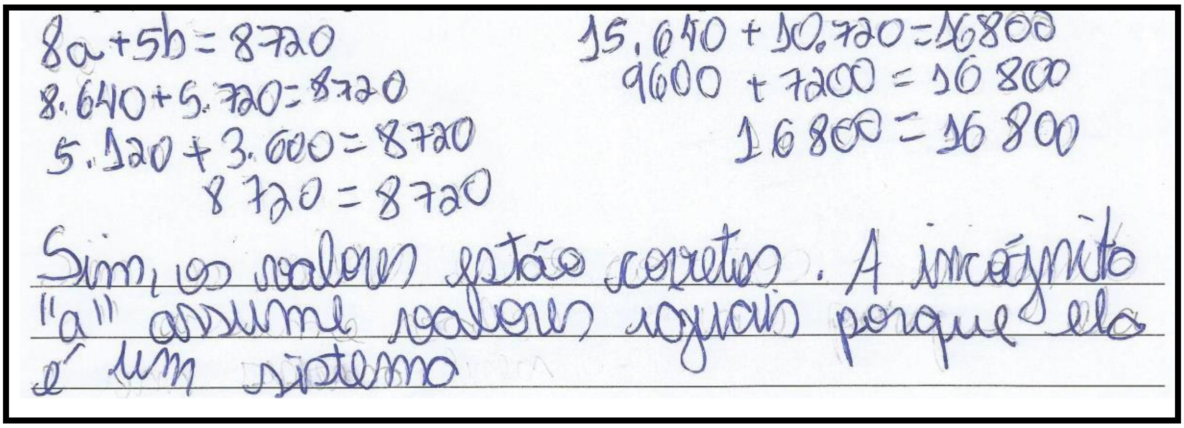
Após a explicação do professor os estudantes realizaram o tratamento numérico e a justificativa. Constatou-se ao final da atividade que apenas um estudante fez a substituição dos valores encontrados em apenas uma equação e todos os demais estudantes fizeram corretamente a substituição nas duas equações a fim de demonstrar que os valores encontrados servem para ambas as equações (Figura 03).

Em relação ao questionamento “A incógnita *a*, por exemplo, assume valores iguais ou diferentes?” apenas um estudante não respondeu, todos os demais estudantes responderam corretamente. Dentre as justificativas os estudantes escreveram que os valores precisam ser iguais por tratar-se de um sistema e apenas um não justificou a afirmação (Figura 03).

---

[14] Usa-se as letras x e y para designar as incógnitas, pois estas são as letras mais comuns usadas na representação algébrica de sistemas lineares 2 x 2.

Figura 3 – Tratamento numérico e justificativa do estudante V



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

A partir dessa atividade espera-se que nas resoluções dos próximos sistemas lineares os estudantes utilizem essa verificação como forma de validar a solução encontrada. Trata-se de um importante mecanismo que poderá ser usado pelo estudante para ter mais segurança do resultado obtido.

Em algumas atividades não houve essa indicação por escrito e o professor apenas indicava oralmente que os estudantes deveriam validar os resultados encontrados. Como sugestão pontua-se que esse lembrete seja inserido nas atividades até que se torne algo natural para os estudantes.

Atividade 02 – item c

Objetivo: verificar se o estudante faz a relação entre o registro algébrico e o registro em língua materna ao organizar uma explicação sobre os três métodos de resolução.

Maggio e Nehring (2016) afirmam que as pesquisas que usam a Teoria de Duval enfocam os registros algébricos e gráficos, sendo que o registro em língua materna aparece em menor proporção. Nesta pesquisa buscou-se considerar esse importante e complexo registro de representação através de atividades intencionalmente planejadas.

> A língua natural constitui um registro à parte. Não somente em razão de sua maior complexidade e do número consideravelmente elevado de variações que ela oferece, mas também em razão de sua prioridade genética sobre os outros registros e de seu papel único em relação à função meta-discursiva de comunicação. (DUVAL, 2009, p. 105-106).

Cada estudante recebeu um dos métodos de resolução de sistemas lineares para fazer a explicação de modo que fosse correta e ao mesmo tempo compreensível a um estudante do 8º ano do Ensino Fundamental, necessitando adequar a linguagem utilizada.

Alguns estudantes apresentaram dificuldades em realizar esta atividade, solicitando ajuda constante do professor alegando que não dominavam o método de resolução que haviam recebido para explicar, sendo que isso ocorreu especialmente com os métodos da substituição e da comparação. Ressalta-se que os estudantes já haviam usado o método da adição na resolução de atividades envolvendo matrizes inversas, o que facilitou a construção da explicação.

A análise será realizada de acordo com cada um dos métodos, lembrando que os estudantes poderiam consultar materiais que auxiliassem na escrita da explicação.

Método da adição: O estudante C escreveu um sistema linear, resolveu-o corretamente e na sequência fez a explicação. No entanto conforme foi organizando o passo a passo referente a aplicação do método (registro em língua materna) trouxe novamente os exemplos da resolução anterior (registro algébrico). Fez uma explicação detalhada e contemplou todos os procedimentos necessários para que um estudante do 8º ano do Ensino Fundamental compreendesse como se faz a resolução. Ao final salientou ser necessário verificar se os valores encontrados correspondem a solução das equações (Figura 04).

Figura 4 – Explicação do método da adição pelo estudante C

Método da adição:

Ex: $\begin{cases} 4\cdot x + 3\cdot y = 1 \\ 1\cdot x + 1\cdot y = 0 \cdot (-4) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \cancel{4x} + 3y &= 1 \\ -\cancel{4x} - 4y &= 0 \\ \hline -1y &= 1 \\ y &= \frac{1}{-1} \quad \boxed{y = -1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\cdot x + 3\cdot y &= 1 \\ 4\cdot x + 3\cdot -1 &= 1 \\ 4\cdot x - 3 &= 1 \\ 4x &= 1+3 \\ 4x &= 4 \\ x &= \frac{4}{4} \quad \boxed{x = 1} \end{aligned}$$

1º Passo: Escolher uma das equações.

2º Passo: multiplicar a linha da equação escolhida ($1x+1y=0$) por um número que facilite a eliminação de uma incógnita (no caso o -4).

3º Passo: Eliminar a incógnita que for relativa a zero de acordo com a equação ($4x$ $-4x$).

4º Somar o restante das equações para encontrar o valor da incógnita que sobrou (incógnita y).

5º Passo: Depois de encontrar o valor da 1ª incógnita (y) escolher uma das equações para achar o valor da 2ª incógnita (x).

6º Passo: Substituir a incógnita y pelo valor anteriormente encontrado (-1).

7º Passo: Achar o valor da 2ª incógnita (x).

8º Ver se as incógnitas encontradas correspondem ao resultado das equações.

Este método recebe essa denominação porque as equações são somadas para a obtenção de uma solução.

Fonte: dados do pesquisador (2017)

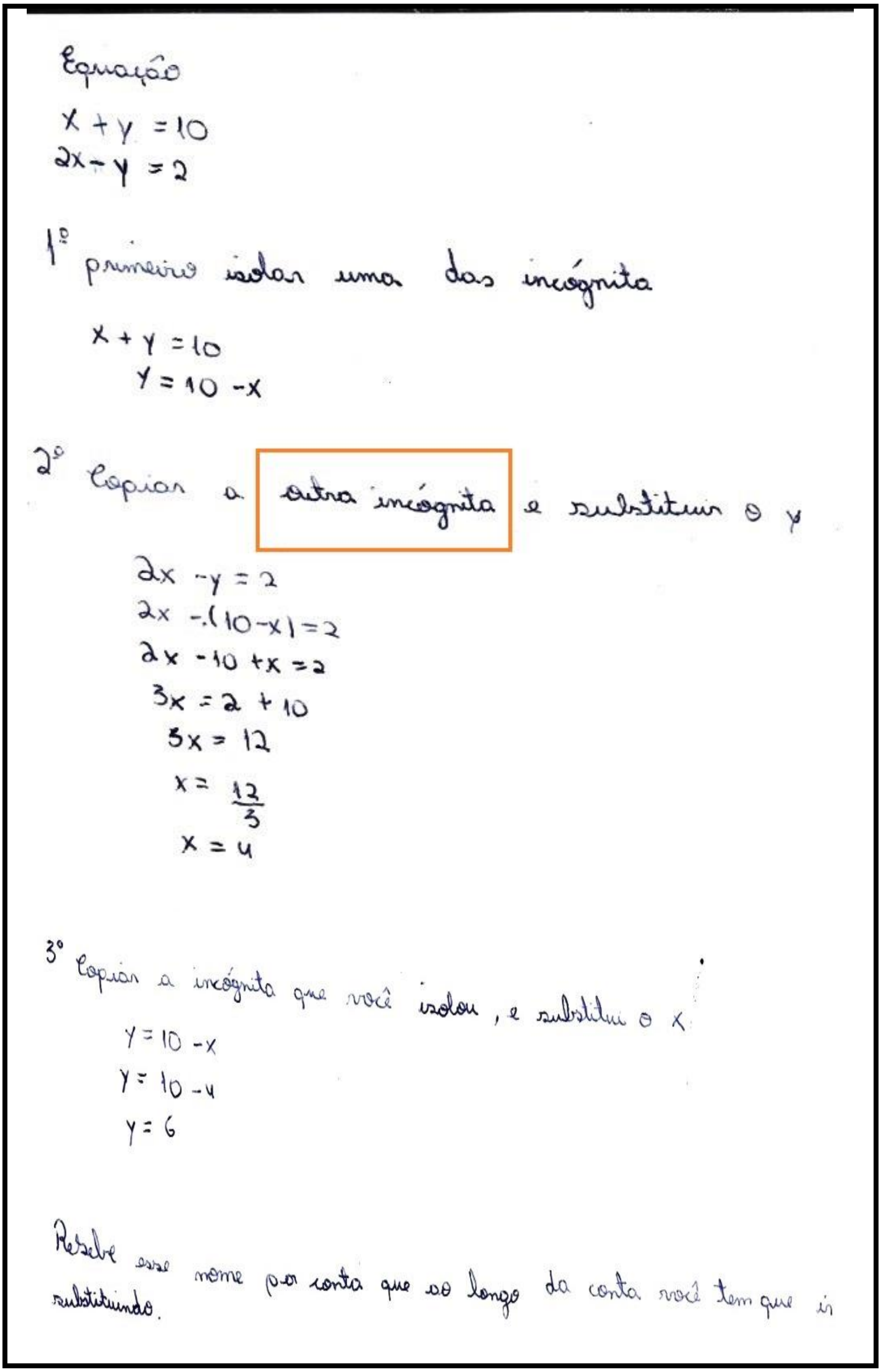
O estudante V fez uma explicação um pouco incompreensível no início. Não ficou claro, por exemplo, que o valor a ser multiplicado deve possibilitar que uma das incógnitas da primeira e da segunda equação fiquem opostas, para que sejam eliminadas e esse é um ponto crucial na aplicação desse método. Resolveu corretamente o sistema exemplificado. O estudante M fez uma explicação correta dos procedimentos para a resolução do sistema e resolveu o corretamente.

Todos os três estudantes utilizaram um sistema linear no registro algébrico como exemplo, o que foi positivo, pois facilita a compreensão. Esta é a maneira como os livros didáticos fazem para introduzir uma técnica de resolução. Considera-se, portanto. imprescindível intercalar a explicação (registro em língua materna) com a resolução do sistema (tratamento algébrico). Verificou-se ainda que apenas um estudante justificou a denominação do método.

Método da substituição: O estudante A fez a explicação corretamente de forma bem sucinta e exemplificou após a explicação. No entanto usou expressões que deveriam ter sido explicadas: “Isolar uma das letras que terá na equação” “Descobrir o valor dessa letra”, pois nem sempre isso é compreensível a um estudante do 8º ano do Ensino Fundamental.

Tudo ficaria mais compreensível se alternasse a explicação do método com o exemplo proposto, o que foi a estratégia adotada pelo estudante J, no entanto este estudante escreveu um passo usando uma definição equivocada, “copiar a outra incógnita e substituir o y”, quando o correto seria “copiar a outra equação e substituir o y”. Justificou o nome do método da substituição (Figura 05).

Figura 5 – Explicação do método da substituição pelo estudante J



Equação

$x + y = 10$

$2x - y = 2$

1º primeiro isolar uma das incógnita

$x + y = 10$

$y = 10 - x$

2º Copiar a outra incógnita e substituir o y

$2x - y = 2$

$2x - .(10 - x) = 2$

$2x - 10 + x = 2$

$3x = 2 + 10$

$3x = 12$

$x = \frac{12}{3}$

$x = 4$

3º Copiar a incógnita que você isolou, e substitui o x

$y = 10 - x$

$y = 10 - 4$

$y = 6$

Recebe esse nome por conta que ao longo da conta você tem que ir substituindo.

Fonte: Acervo do pesquisador (2017)

Ainda em relação ao estudante J percebeu-se também que no sistema usado para a explicação uma das incógnitas apresentou o coeficiente unitário em cada das equações. A ideia seria trazer um sistema que possuísse coeficientes das incógnitas maiores que o valor *um* em ambas as equações e que ao isolar as incógnitas houvesse a escrita na forma fracionária, pois essa tem sido uma das dificuldades que os estudantes apresentam: operar com números racionais representados na forma fracionária em sistemas resolvidos usando o método da substituição.

O estudante S fez a escrita de um sistema de equações e fez a resolução inicial do mesmo, isolando uma das incógnitas, mas não deu continuidade a resolução. Não escreveu nenhuma explicação.

Constatou-se ainda que em relação ao método da substituição todos os estudantes realizaram explicações muito particulares para o exemplo em questão. Deveriam ter generalizado a explicação para os demais casos, fazendo pequenos ajustes, afinal quando se ensina uma técnica de resolução deve-se lembrar de que a mesma poderá ser usada para a resolução de qualquer sistema linear 2 x 2 e não para casos particulares. Estes geralmente são apontados ao final da explicação como uma observação. Novamente apenas um estudante justificou o nome do método.

Método da comparação: Partiu-se do pressuposto de que nesse método os estudantes teriam mais dificuldade de encontrar livros didáticos que explicassem a resolução, dificultando um pouco a explicação.

O estudante T conseguiu explicar de modo simples e correto alternando explicação com a resolução do sistema. O estudante K explicou o que precisa ser feito quando se tem a escrita na forma fracionária, ou seja, mesmo não se tratando de um caso em que isso ocorreu teve a preocupação de orientar o procedimento quando esta situação estiver presente. Ressalta-se que nenhum estudante escreveu porque o método da comparação recebe essa denominação.

Ao final constatou-se que para responder o item *c* da atividade 02 os estudantes não recorreram a materiais para consulta, atendo-se somente ao que foi explicado pelo professor anteriormente. Mesmo não havendo essa indicação no enunciado da questão, o professor oralmente indicou que poderiam consultar a materiais para auxiliar na explicação, o que provavelmente poderia melhorar a explicação dada por cada estudante.

Atividade 03

Uma empresa decide fabricar dois novos produtos de madeira, uma vez que seus funcionários possuem algum tempo sobrando por dia. Cada produto do tipo A necessita de 5 minutos para o corte e 10 minutos para a montagem; cada produto do tipo B precisa de 4 minutos para o corte e 8 minutos para a montagem. Dispõe-se de 5 horas para o corte e 10 horas para a montagem. Quanto de cada produto é possível fabricar por dia utilizando todo tempo disponível?

a) Escreva um sistema de equações referente a situação apresentada e em seguida resolva pelo método que considerar conveniente.
b) O que o resultado obtido ao final da resolução sugere quanto a solução do sistema?
c) Apresente possíveis soluções para esta situação.

Objetivo: verificar se o estudante converte um registro da língua materna para o registro algébrico e através das soluções obtidas na resolução do sistema identifica que nem sempre um sistema é possível e determinado.

Diferente da atividade 01, a terceira e a quarta questões tinham a indicação de que ao ler a situação apresentada os estudantes escrevessem o sistema de equações lineares. A proposta era que os estudantes tivessem contato com situações diferentes das abordadas até o momento, ou seja, compreendessem que há situações em que não há solução e outras em que há infinitas soluções e observassem que a resolução de sistemas deste tipo implica em certas regularidades que poderão ser observadas.

Partiu-se da ideia de que mais estudantes conseguiriam fazer essa conversão do registro em língua materna para o algébrico nas atividades 03 e 04, pois essa conversão já foi requerida na atividade 01.

Pontua-se que dos nove estudantes apenas dois não conseguiram fazer a escrita algébrica do sistema linear, os demais escreveram corretamente, porém nenhum usou chaves para representar o sistema. Após essa verificação, o professor escreveu o sistema linear no quadro e solicitou que resolvessem a fim de verificar se os estudantes fariam o tratamento algébrico de acordo com o método escolhido. Neste sentido o professor precisou fazer algumas intervenções, pois a primeira dificuldade foi converter horas em minutos.

No entanto a maior dificuldade encontrada pelos estudantes foi o fato de encontrarem o seguinte resultado *“$0x + 0y = 0$”* ao final da resolução. Mostravam o resultado ao professor e pela expressão de cada um foi possível verificar que alguns acreditavam ter escrito o sistema linear de forma errada ou então ter cometido algum equívoco durante a resolução.

Então o professor orientou que ao encontrarem o resultado $0x = 0y = 0$ respondessem primeiramente os itens *b* e *c* da questão. Mesmo assim as dificuldades em interpretar o resultado obtido continuaram como pode ser verificado no diálogo a seguir:

*P[15]: Vocês chegaram a um ponto em que não sabem se o sistema é possível ou não. A dica é tentar usar algum valor para **a** ou para **b**. Pensem um valor para o **a**. Um número que pode ajudar bastante.*

E[16]: Dois, cinco.

P: Tem um número que ajuda mais porque anula.

E: Zero.

*P: Vamos fazer testes. Por exemplo: **a = 0** qual será o valor de **b**? Se der algum valor será que é possível resolver ou será que não? Também podem colocar no lugar de **a** qualquer outro número.*

T: Só fazendo dois já está bom?

P: Sim. Já foi uma tentativa. Só aquele valor ou será que tem mais?

*K: Pode inverter? Um valor para **a** e depois esse valor para **b**. (Este estudante deu uma sugestão **a = 0** e depois **b = 0**)*

P: Sim

*A: Quando **a = 0**, **b = 75** e quando **b = 0**, **a = 60**.*

P: Tenho mais de uma possibilidade então?

*P: Que valores posso colocar para o **a** e para o **b** de modo que o resultado seja zero?*

M: Qualquer número.

*P: E no **b**?*

M. Também.

P: Só uma resposta?

E: Várias.

P: Como tem várias possibilidades vamos testar.

P: Façam os testes e chamem para verificar se estão corretos.

---

[15] P corresponde a fala do professor

[16] E corresponde a resposta dada coletivamente pelos estudantes.

Após serem testados vários valores como possíveis soluções do sistema, o professor explicou no quadro como escrever a solução geral de um sistema possível e indeterminado e percebeu que os estudantes tiveram dificuldades na compreensão e, devido a isso já verificou a necessidade de desenvolver outras atividades ao longo da sequência em que deverão escrever a solução geral de um sistema deste tipo a fim de que eles possam sanar as dúvidas que ainda permaneceram. Esta dificuldade em escrever a solução de sistemas possíveis e indeterminados também foi apontada nos trabalhos de Jordão (2011).

Verificou-se que sete estudantes usaram o método da adição, e destes, todos resolveram corretamente, no entanto nenhum soube interpretar os resultados obtidos. Dois estudantes usaram o método da substituição. Um dos estudantes isolou corretamente a incógnita *b*, mas ao substituir na outra equação não deu continuidade a resolução, possivelmente por não saber operar com números representados na forma fracionária. O segundo estudante usou o método da substituição de forma correta, mas não soube interpretar os resultados obtidos e considerou que $a = 0$ *e* $b = 0$.

Em relação ao item *b* da atividade 3, constatou-se que três estudantes deixaram em branco e os demais foram unânimes em afirmar que não seria possível resolver. Um estudante ainda complementa que o resultado sugere que a solução possa ser zero.

Foi necessária a intervenção do professor que solicitou que respondessem o item *c* e depois voltassem a esta questão. Observou-se que, em uma próxima aplicação deve-se fazer a inversão desses itens nessa atividade para facilitar o entendimento dos alunos. O professor então escreveu a solução geral deste sistema possível e indeterminado, pois esta situação foi de difícil compreensão pelos estudantes, no entanto em outros momentos desta sequência precisarão escrever a solução geral novamente, o que gradativamente fará com que se familiarizem com essa notação.

Com a realização desta atividade os estudantes identificaram que ao realizar um tratamento algébrico em um sistema linear 2 x 2 possível e indeterminado é possível cancelar todas as incógnitas e anular os termos independentes, dessa forma obterão o seguinte resultado final $0x + 0y = 0$.

Atividade 04

A diretoria de uma empresa decide produzir dois novos modelos de blusas: A e B. A blusa A requer 2 minutos para a confecção das mangas e 8 minutos para o corpo. A blusa B requer 3 minutos para a confecção das mangas e 12 minutos para o corpo. As máquinas utilizadas para a confecção das mangas estão disponíveis 2 horas por dia. As máquinas necessárias para a confecção dos corpos das blusas estão à disposição 3 horas por dia. Qual a quantidade de blusas de cada tipo é possível produzir utilizando todo tempo disponível das duas máquinas? *a) Escreva um sistema de equações referente a situação apresentada e em seguida resolva pelo método que considerar conveniente.* *b) O que o resultado obtido ao final da resolução sugere quanto a solução do sistema?* *c) Apresente possíveis soluções para esta situação.*

Objetivo: verificar se o estudante converte um registro da língua materna para o registro algébrico e através das soluções obtidas na resolução do sistema identifica que nem sempre um sistema é possível e determinado.

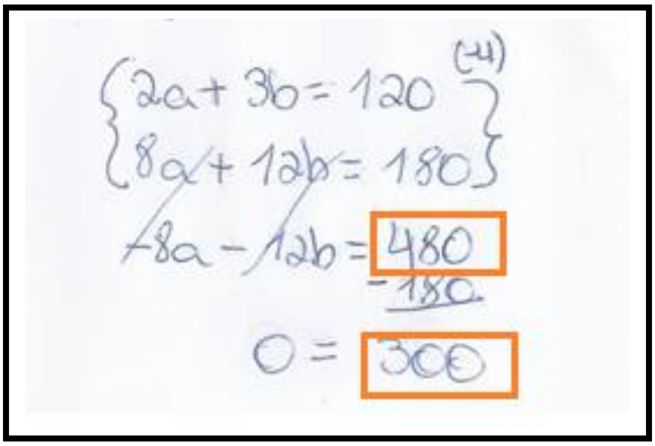
Novamente alguns estudantes necessitaram de auxílio para representar algebricamente a situação problema. Isso confirma a afirmação de Duval (2003) que a conversão se torna ainda mais complexa quando um dos registros é multifuncional, como é o caso da língua materna. Ao organizar o sistema linear um dos estudantes somou o tempo para a confecção das mangas da blusa do modelo A com o tempo para a confecção do corpo desse mesmo modelo de blusa para formar a primeira equação.

Com a intervenção do professor percebeu o equívoco, pois consta no enunciado que precisavam considerar o tempo disponível da máquina para a confecção das mangas e para a confecção do corpo, portanto a primeira equação, por exemplo, deveria considerar o tempo requerido para a confecção das mangas da blusa A e da blusa B.

Ao final do tempo determinado para a escrita da representação algébrica deste sistema constatou-se, portanto, que seis estudantes escreveram corretamente sem intervenção do professor, dois estudantes escreveram corretamente após a intervenção e um estudante escreveu de modo errado. Observou-se, portanto, um aumento considerável na representação algébrica correta de sistemas lineares representados em língua materna, embora seja importante destacar que as três situações propostas foram semelhantes.

No entanto, nesta atividade chamou a atenção que somente três estudantes resolveram corretamente o sistema linear e seis estudantes cometeram algum equívoco no tratamento algébrico. Dentre os erros mais comuns estão os relacionados a multiplicação ou adição envolvendo números negativos (Figura 06).

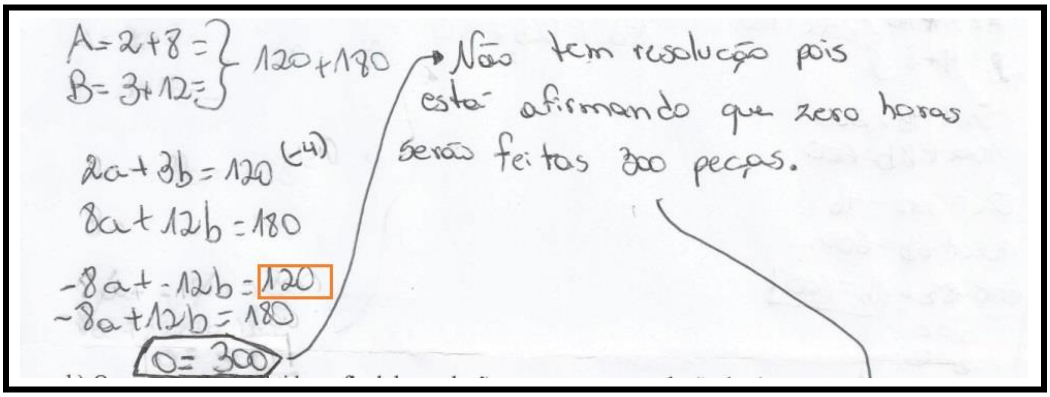
Figura 6 – Resolução da atividade 04 pelo estudante T.



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Outro erro observado nas resoluções foi que ao multiplicar uma das equações por um determinado número real com o intuito de obter uma incógnita com valores opostos e desse modo anular esta incógnita, o estudante não realizou esta operação com o termo independente (Figura 07).

Figura 7 – Resolução da atividade 04 pelo estudante A



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

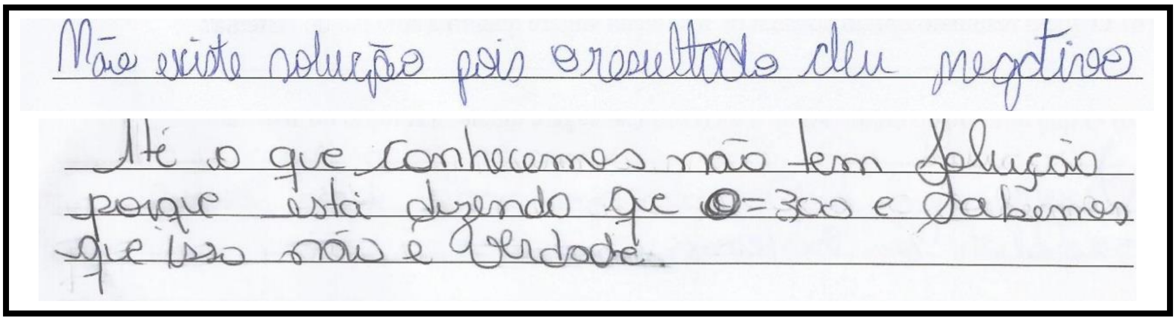
Conforme exemplificado, constatou-se nesta atividade grande dificuldade em realizar os tratamentos algébricos e numéricos, mesmo que tradicionalmente “o ensino privilegia a aprendizagem das regras concernentes à formação das representações semióticas e das regras concernentes ao seu tratamento.” (DUVAL, 2009, p. 62).

Novamente nesta atividade os estudantes tiveram dificuldades em interpretar os resultados obtidos na resolução do sistema como pode ser constatado no diálogo a seguir:

> *P: Para fazer a solução geral tem que chegar a **0 = 0**. Você chegou nesse resultado?*
>
> *T: Não*
>
> *P: O que esse resultado vai demonstrar? Quem já fez o sistema vai chegar num resultado e pensem sobre ele.*
>
> *C: Daí se corta tudo menos o resultado?*
>
> *P: É uma situação diferente do que teve até agora.*
>
> *P: Está certo M. Será que tem solução? O que já vimos: pode ter solução, pode ter infinitas soluções ou pode não ter solução. Eu tenho um valor de um lado da igualdade e outro valor do outro lado. Isso é possível?*
>
> *M: Não.*

Em relação ao item *b*, sobre a interpretação do resultado obtido, dois estudantes não responderam, um afirmou haver solução, um ficou em dúvida em afirmar se teria ou não solução e cinco estudantes afirmaram não ter solução. No entanto, destes apenas um escreveu uma justificativa coerente com o resultado obtido (Figura 08).

Figura 8 – Respostas apresentadas pelos estudantes V e K



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Na solução de sistemas impossíveis notou-se ainda certa inquietação dos estudantes quanto a ausência de solução. Para alguns a resposta deveria ser zero. O professor retomou o sistema linear, atribuiu o valor zero para as incógnitas para que os estudantes identificassem o que ocorria. Usou ainda outros valores para demonstrar que nenhum deles seria a solução do sistema linear em questão. Novamente destaca-se a importância de validar os resultados encontrados. No caso dos estudantes que acreditavam que a solução do sistema seria $x = 0$ e $y = 0$, bastaria ter substituído nas duas equações para verificar que não corresponderiam a solução.

Desta forma, com esta atividade os estudantes perceberam que ao realizar o tratamento algébrico em um sistema linear 2 x 2 impossível podem cancelar as duas incógnitas obtendo uma igualdade entre dois números que não é verdadeira. Isso ocorre porque nas incógnitas os estudantes obtêm o valor zero e no termo independente um valor diferente de zero, implicando que não ser possível resolver.

Atividade 05

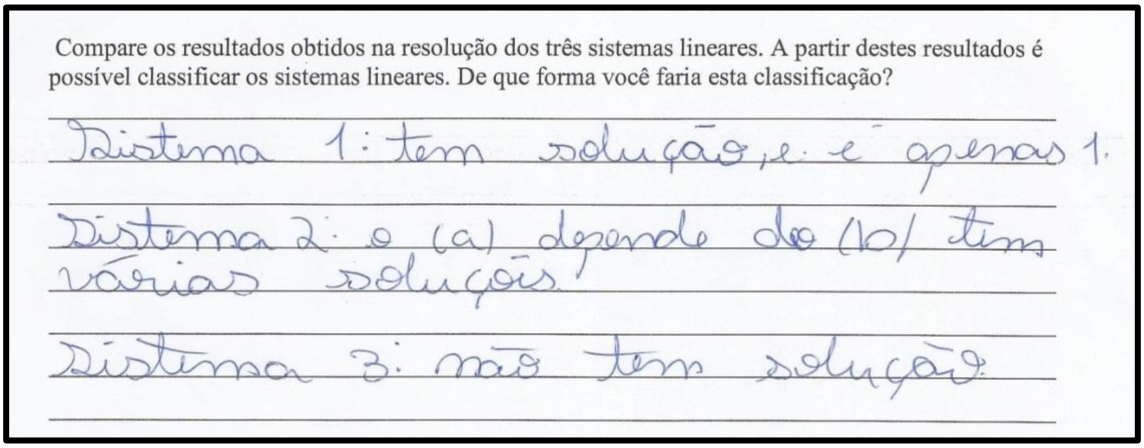
a) *Compare os resultados obtidos na resolução dos três sistemas lineares. A partir destes resultados é possível classificar os sistemas lineares. De que forma você faria esta classificação?*
b) *De acordo com o resultado obtido nos três sistemas de equações resolvidos até o momento, classifique-os conforme apresentado pelo professor.*

Objetivo: avaliar de que forma os estudantes classificariam os três sistemas abordados nas situações propostas e que se referem respectivamente a Sistema Possível e Determinado (SPD), Sistema Possível e Indeterminado (SPI) e Sistema Impossível (SI).

O professor solicitou aos estudantes que observassem os três problemas resolvidos e os resultados obtidos. Fez algumas indagações: "A partir destes dados é possível fazer a classificação de sistemas lineares? Já classificaram um sistema? De que forma? Como poderíamos fazer esta classificação"?

A observação das respostas dos estudantes demonstrou que apenas dois estudantes não relacionaram corretamente o que ocorreu na resolução de cada um dos sistemas com a sua respectiva classificação. Todos os outros relacionaram corretamente que diferentes resultados no tratamento algébrico (as soluções encontradas) implicam em diferentes classificações conforme pode ser verificado na Figura 09.

Figura 9 – Classificação dos sistemas lineares apresentada pelo estudante T



Compare os resultados obtidos na resolução dos três sistemas lineares. A partir destes resultados é possível classificar os sistemas lineares. De que forma você faria esta classificação?

Sistema 1: tem solução, e é apenas 1.

Sistema 2: o (a) depende do (b) tem várias soluções

Sistema 3: não tem solução.

Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Após os estudantes responderam o item *a* da atividade 05 o professor fez a explanação da classificação de um sistema linear 2 x 2: Sistema Possível e Determinado (SPD), Sistema Possível e Indeterminado (SPI) e Sistema Impossível (SI) e confrontou esta classificação com a apresentada pelos estudantes. Solicitou novamente que os estudantes classificassem os três sistemas trabalhados de acordo com a explicação do professor e a nomenclatura específica e ainda assim dois estudantes classificaram de modo errado.

Devido a dificuldades apresentadas por alguns estudantes, após cada atividade foi feita a discussão e a sistematização do que foi trabalhado, garantindo a apreensão gradual e crescente do que estava sendo abordado em sala de aula.

Atividade 06

Atividade adaptada de Boemo (2015)

A seguir temos os três sistemas de equações lineares trabalhados anteriormente:

1) *Em relação ao sistema:*

$$\begin{cases} 15x + 10y = 16800 \\ 8x + 5y = 8720 \end{cases}$$

Preencha a tabela a seguir e responda as questões:

Equações do sistema	*Coeficiente x*	*Coeficiente y*	*Termo independente*

a) Há proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas da primeira equação com os da segunda equação?
b) E em relação ao termo independente isso também ocorre?
c) Escreva a solução que você encontrou ao resolver o sistema. É possível estabelecer uma relação entre as respostas obtidas nos itens a e b e a solução deste sistema? Qual?
d) Para validar essa relação, escreva outro sistema de equações 2 x 2 com as características descritas nesta atividade. Resolva-o e confronte os resultados.

2) Em relação ao sistema:

$$\begin{cases} 5x + 4y = 300 \\ 10x + 8y = 600 \end{cases}$$

Preencha a tabela a seguir e responda as questões:

Equações do sistema	*Coeficiente x*	*Coeficiente y*	*Termo independente*

a) Há proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas da primeira equação com os da segunda equação?
b) E em relação ao termo independente isso também ocorre?
c) Escreva a solução que você encontrou ao resolver o sistema. É possível estabelecer uma relação entre as respostas obtidas nos itens a e b e a solução deste sistema? Qual?
d) Para validar essa relação, escreva outro sistema de equações 2 x 2 com as características descritas nesta atividade. Resolva-o e confronte os resultados.

3) Em relação ao sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 120 \\ 8x + 12y = 180 \end{cases}$$

Preencha a tabela a seguir e responda as questões:

Equações do sistema	*Coeficiente x*	*Coeficiente y*	*Termo independente*

a) *Há proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas da primeira equação com os da segunda equação?*
b) *E em relação ao termo independente isso também ocorre?*
c) *Escreva a solução que você encontrou ao resolver o sistema. É possível estabelecer uma relação entre as respostas obtidas nos itens a e b e a solução deste sistema? Qual?*
d) *Para validar essa relação, escreva outro sistema de equações 2 x 2 com as características descritas nesta atividade. Resolva-o e confronte os resultados.*

Objetivo: observar se o estudante identifica a relação entre a proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas e dos termos independentes das equações de um sistema linear 2 x 2 com a sua respectiva classificação.

Esta atividade foi adaptada de BOEMO (2015) e os estudantes receberam novamente os três sistemas já trabalhados anteriormente e a análise será realizada de acordo com a classificação de cada sistema linear. O professor precisou retomar os conceitos de razão e de proporcionalidade para que os estudantes compreendessem o que estavam sendo solicitado. Além disso, precisou esclarecer que para serem proporcionais duas equações precisam manter a mesma razão nos coeficientes das incógnitas.

No início os estudantes apresentaram dificuldades quanto a comparação das equações para observar a existência ou não de proporcionalidade. Também tiveram dúvidas quanto aos termos empregados na atividade, especificamente *coeficientes*, *incógnitas* e *termo independente*, como pode ser verificado no diálogo:

> *C: No coeficiente devo colocar **15** ou **15x**?*
>
> *P: Só o número, pois pede o coeficiente.*
>
> *C: Termo independente é esse que sobrou?*
>
> *P: Sim.*
>
> *A: O que significa essa proporcionalidade?*
>
> *V: Essa é a mesma dúvida. (O professor usou o quadro e retomou os conceitos de razão e proporção e citou um exemplo de proporcionalidade).*
>
> *P: Quando eu falo em proporcionalidade na comparação de equações de um sistema linear, vocês precisam analisar o quê? Não sei se está claro o que são os coeficientes. São os valores numéricos que acompanham **x** e **y**. Mas para vocês considerarem que os coeficientes são proporcionais vocês precisam pensar assim: aumentou duas vezes*

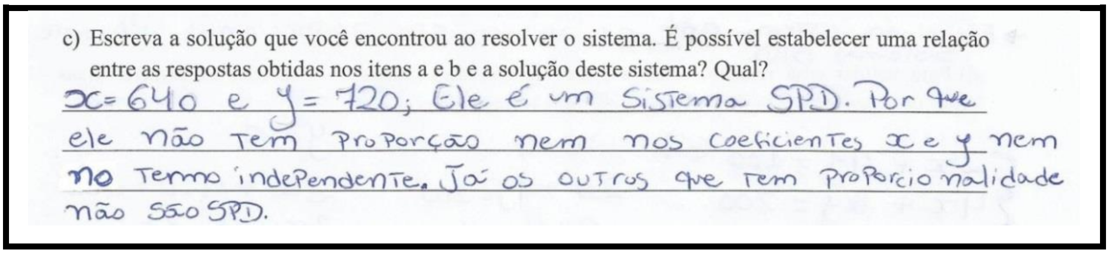
> *para o **x** tem que aumentar duas vezes para o **y** também. Aí é proporcional.*
> *J: E esse ali?*
> *P: É proporcional? Por quê?*
> *J: O valor dá igual e o outro passa.*
> *P: Do **5** foi para o **10**. Aumentou quanto?*
> *J: Cinco*
> *P: Não. Sempre devemos multiplicar, nesse caso por **2**. Do **5** para **10**. E se **8** aqui quanto teria que ser. Qual o dobro?*
> *J: Como assim?*
> *C: **16***
> *P: Isso. Esse é o valor que está ali?*
> *J: Não.*
> *P: Então é proporcional?*
> *J: Não.*

A atividade foi realizada em duplas, mas cada estudante precisava fazer a sua resolução. Além disso, o último item da atividade necessitava ser feito de maneira individual, pois solicitava que escrevessem um sistema linear de acordo com as características abordadas de modo a validar o uso da proporcionalidade como forma de classificar um sistema linear 2 x 2. A atividade possibilitou ainda verificar se os estudantes haviam compreendido a relação entre a proporcionalidade e o tipo de sistema linear.

O primeiro sistema linear abordado foi um sistema possível e determinado. Observou-se que os estudantes inicialmente respondiam que existia ou não proporcionalidade sem fazer referência se essa proporcionalidade era somente entre os coeficientes das incógnitas ou entre os termos independentes também. Nesse momento o professor explicou que ao constatarem a proporcionalidade nos coeficientes das incógnitas teriam duas situações distintas: proporcionalidade nos coeficientes das incógnitas que pode ou não se estender aos termos independentes, tendo como consequência diferentes classificações dos sistemas, por isso deveriam explicitar isso nas respostas.

Todos os estudantes responderam corretamente os itens *a* e *b* afirmando que não há proporcionalidade entre as equações do sistema, nos coeficientes das incógnitas e nos termos independentes. Já em relação ao item *c* dois estudantes relacionaram equivocadamente o sistema possível e determinado à proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas e dos termos independentes das duas equações do sistema linear. Um estudante não justificou a classificação e três justificaram de maneira incompreensível. Apenas três estudantes justificaram de maneira adequada (Figura 10).

Figura 10 – Resolução do item (c) da atividade 06 pelo estudante M


c) Escreva a solução que você encontrou ao resolver o sistema. É possível estabelecer uma relação entre as respostas obtidas nos itens a e b e a solução deste sistema? Qual?

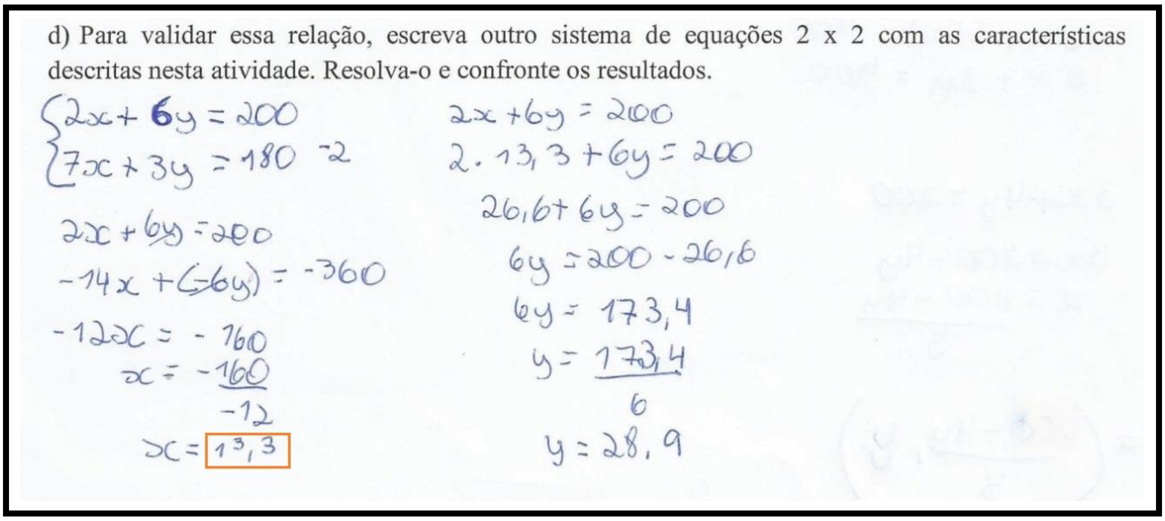
x = 640 e y = 720; Ele é um Sistema SPD. Por que ele não Tem proporção nem nos coeficientes x e y nem no Termo independente. Já os outros que tem proporcionalidade não são SPD.

Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Em relação ao item *d* da atividade 06 que solicitava a escrita de um sistema com as características referentes a proporcionalidade observou-se que todos os estudantes escreveram corretamente um sistema possível e determinado de acordo com o critério de proporcionalidade, no entanto um não fez a resolução e outro errou o tratamento obtendo valores para *x* e *y* que não serviam para a solução do sistema.

Observou-se que ao obterem números racionais na solução, somente um estudante escreveu o resultado na forma fracionária, outros escreveram na forma decimal (Figura 11). O professor orientou que ao tratar-se de um número decimal infinito, o resultado deve ser escrito na forma fracionária. Isso é necessário, pois ao representar o valor na forma decimal teremos sempre uma aproximação do resultado e não o resultado exato.

Figura 11 – Resolução do item (d) da atividade 06 do estudante T (SPD)


d) Para validar essa relação, escreva outro sistema de equações 2 x 2 com as características descritas nesta atividade. Resolva-o e confronte os resultados.

$$\begin{cases} 2x + 6y = 200 \\ 7x + 3y = 180 \quad \cdot(-2) \end{cases}$$

$2x + 6y = 200$

$-14x + (-6y) = -360$

$-12x = -160$

$x = \frac{-160}{-12}$

$x = \boxed{13,3}$

$2x + 6y = 200$

$2 \cdot 13,3 + 6y = 200$

$26,6 + 6y = 200$

$6y = 200 - 26,6$

$6y = 173,4$

$y = \frac{173,4}{6}$

$y = 28,9$

Fonte: acervo do pesquisador (2017)

O segundo sistema analisado foi um sistema possível e indeterminado. Verificou-se que cinco estudantes preencheram de forma errada a tabela referente aos coeficientes *x* e *y* em todos os sistemas da atividade 06. Por exemplo, ao invés de escreverem "*15*", escreveram "*15x*", mas isso não prejudicou a resolução da atividade.

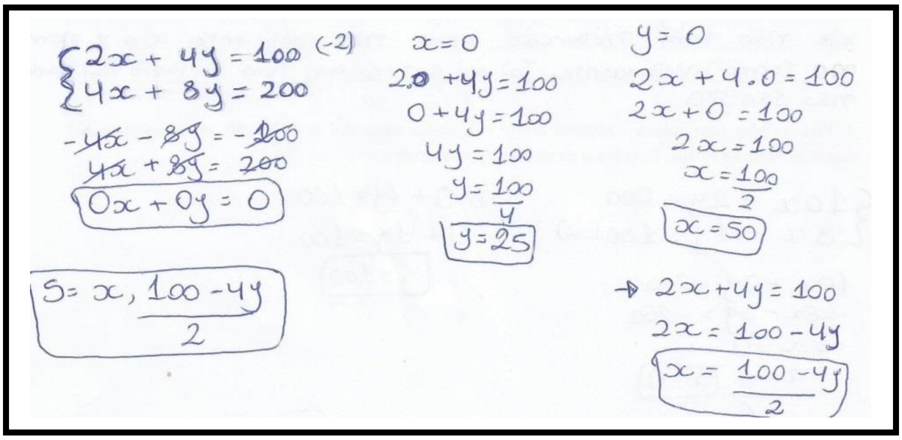
Novamente todos os estudantes responderam de forma correta os itens *a* e *b* em relação à proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas e dos termos independentes, mas apenas cinco estudantes estenderam esse entendimento para o item *c*. Além disso, apenas um estudante relacionou o sistema possível e indeterminado ao tratamento algébrico realizado cujo resultado foi *"0x + 0y = 0"*. Chamou a atenção que para alguns estudantes a obtenção de um valor fracionário ao resolver um sistema linear implica que a resolução está errada, como se apenas números inteiros pudessem ser solução. Em parte isso pode ter ocorrido, pois as atividades selecionadas sempre trouxeram como solução números inteiros e geralmente positivos, pois estavam, quase sempre, atrelados a processos de produção.

Ao escrever e resolver um sistema possível e indeterminado um estudante lembrou que deveria escrever a solução geral e o professor os orientou, pois alguns estudantes ainda demonstraram dificuldades nesse registro. Freitas (2013) já apontou em seu trabalho que os estudantes apresentam dificuldades em apresentar a solução de sistemas possíveis e indeterminados. Uma possível explicação seria o fato de que o sistema possível e determinado requer uma única solução e esta é expressa no registro numérico, enquanto que o sistema possível e indeterminado exige uma solução escrita no registro algébrico.

Ainda persiste nos estudantes a não representação de um sistema linear usando chaves. No item *d* da atividade 06 referente ao sistema possível e indeterminado, apenas cinco estudantes representaram o sistema corretamente. Mesmo que o professor tenha explicado em momento anterior a necessidade de escrever a solução geral para sistemas possíveis e indeterminados, apenas cinco estudantes escreveram e ainda assim dois destes estudantes trocaram as posições das incógnitas *x* e *y* no par ordenado (Figura 12) ao escrever a solução geral. No entanto, destaca-se que todos os cincos estudantes escreveram a solução geral de forma correta.

Percebeu-se ainda que um estudante ao encontrar os valores $0x + 0y = 0$ compreendeu que a solução do sistema seria S = {(0,0)} e após intervenção do professor percebeu que se tratava de um sistema com infinitas soluções conforme já explicado em outra aula.

Figura 12 – Resolução do item (d) da atividade 06 pelo estudante T (SPI)



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

O terceiro e último sistema linear abordado na atividade 06 foi um sistema impossível. Novamente todos os estudantes responderam corretamente os itens *a* e *b* referentes ao sistema impossível. Apenas dois estudantes não justificaram a resposta no item *c*, talvez por terem compreendido de que não havia essa necessidade, no entanto havia essa indicação no enunciado da questão. Três estudantes não usaram chaves para representar o sistema e apenas um estudante realizou o tratamento algébrico de modo errado.

Destaca-se, no entanto, que nenhum estudante usou a simbologia própria para designar os elementos de um conjunto vazio: S = { } ou S = Ø. Apenas escreveram que o sistema linear não tinha solução. O professor explicou então a necessidade de representarem a solução de um sistema impossível dessa forma.

Ao final da atividade 06 percebeu-se que os estudantes não demonstraram dificuldades em realizar tratamentos algébricos nos sistemas lineares 2 x 2. Isso também foi percebido por outro pesquisador, Jordão (2008), que ao analisar os protocolos dos estudantes verificou que eles não apresentaram dificuldades no tratamento algébrico de sistemas 2 x 2, o que aumentou sensivelmente ao trabalhar com sistemas lineares 3 x 3.

Atividade 07

a) Tomando como parâmetro a equação 5x +4y = 300, existe possibilidade de representá-la graficamente? De que forma você faria isso?

b) Qual o gráfico que uma equação linear representa?

c) Faça o esboço dessa representação gráfica.

Objetivo: verificar se o estudante identifica a possibilidade de representar graficamente uma equação linear representada algebricamente e caso identifique, perceber se faz a representação gráfica adequada.

Esse é um momento em que se tem a possibilidade de verificar se os estudantes relacionam essa equação linear as funções polinomiais do 1º grau com que tiveram contato no ano anterior, configurando-se como uma atividade diagnóstica.

Além disso, através da resposta dos estudantes é possível verificar se construiriam um gráfico ponto a ponto geralmente com o apoio de uma tabela ou se usariam apenas as variáveis visuais pertinentes conforme descrito por Duval (2011b). Optou-se em trabalhar inicialmente a representação gráfica de uma equação e apenas na próxima atividade inserir a representação gráfica de sistemas lineares 2 x 2.

Na realização da atividade os estudantes foram organizados em grupos. Os gráficos foram construídos de maneira manual, ou seja, sem o uso de um *software*. O início da atividade pode ser acompanhado na transcrição da conversa entre professor e estudantes.

> *J: Pode pensar como os gráficos do ano passado?*
>
> *P: Sim. Falem a ideia que vocês tiveram N e C?*
>
> *C: Colocar o zero no lugar do* ***x*** *e descobrir o valor de* ***y*** *e depois trocar.*
>
> *P: Isso. Pode fazer desse jeito.*
>
> *P: Como vocês estão pensando K?*
>
> *K: Montar uma tabela, substituir* ***x*** *e* ***y****.*
>
> *P: Isso. Pode fazer. Tentem e vejam se dá certo.*
>
> *V: Não precisa fazer de um em um. Pode fazer de dez em dez.*
>
> *P: Isso. Pode ser.*
>
> *M: Isso?*
>
> *P: Vocês encontraram quantos pontos? Quando* ***y = 75, x*** *é?*
>
> *N: Zero.*
>
> *P: E quando* ***x = 60, y****? Tentem fazer estes pontos no gráfico.*
>
> *Os três estudantes continuaram a discussão de como continuar a questão.*
>
> *M: O* ***x*** *é na vertical?*
>
> *P: Contrário, na horizontal.*
>
> *C: Daí um ponto vai ficar assim?*

> *P: Quais os pontos que você fez? Agora tem que juntar estes dois pontos.*
>
> *P: Pensem agora o tipo de gráfico. Podem achar mais pontos, mas tem necessidade?*
>
> *C: Não.*

Dos quatro grupos organizados para realizar a atividade 07 percebeu-se que dois usaram o procedimento de construção de uma tabela, na qual escolheram valores aleatórios para *x* e substituíram na equação para encontrar o valor de *y* e após localizaram estes pontos no gráfico e juntaram-nos através do traçado de uma reta. Este procedimento é denominado por Duval como abordagem ponto a ponto. Segundo Duval (2009, p.61),

> A regra que associa um ponto do plano ajustado a uma dupla de números permite construir, conforme um procedimento muito simples, as representações gráficas das relações anotadas algebricamente [...] Mas isto é uma regra local que pode apenas induzir um caminho dirigido.

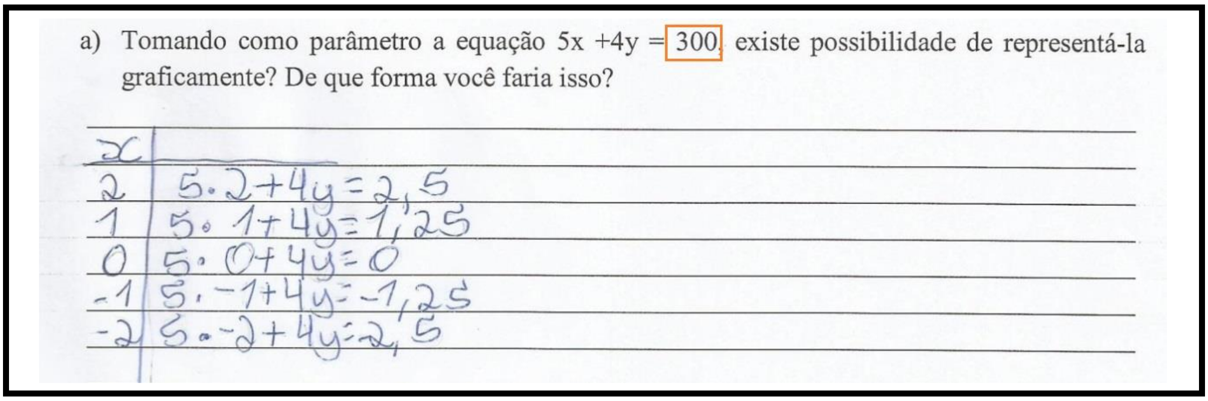
Ainda de acordo com Duval (2003) é necessário a articulação entre as variáveis cognitivas específicas do funcionamento de cada tipo de registro de representação, pois são essas variáveis que determinam quais são as unidades de significados pertinentes, cuja apresentação encontra-se no quadro 05, e será abordada na atividade 09.

Os outros dois grupos optaram por um método diferente: atribuíram $x = 0$ e calcularam o valor de *y* e depois fizeram $y = 0$ para encontrar o valor de x, mas apresentaram dificuldades em localizar os pontos no gráfico. Esse procedimento trata-se de um esboço do gráfico, ou seja, a partir dos valores $x = 0$ e $y = 0$ obtém-se os pontos em que a reta intersecta o gráfico nos eixos *x* e *y* respectivamente e tem-se uma visão global da representação gráfica. No entanto essa abordagem também não satisfaz o que Duval denomina de interpretação global de propriedades figurais.

Os estudantes que atribuíram valor zero às incógnitas *x* e *y* o fizeram possivelmente pelo estudo da função afim no 1º ano do Ensino Médio e compreenderam que dois pontos distintos já são suficientes para traçar uma reta, especificamente nos pontos em que a reta intersecta os eixos *x* e *y*.

Destaca-se ainda que uma das duplas que usou esse procedimento só o fez, pois ouviu o relato da outra dupla ao professor, pois inicialmente não tinham nenhuma ideia de como iniciar a representação gráfica a partir do registro algébrico. A Figura 13 mostra que uma dupla organizou uma tabela com valores de *– 2 a 2* para "*x*", mas errou ao não considerar o termo independente na obtenção do valor da variável *y*.

Figura 13 – Resolução do item (a) da atividade 07 pela dupla de estudantes A e T

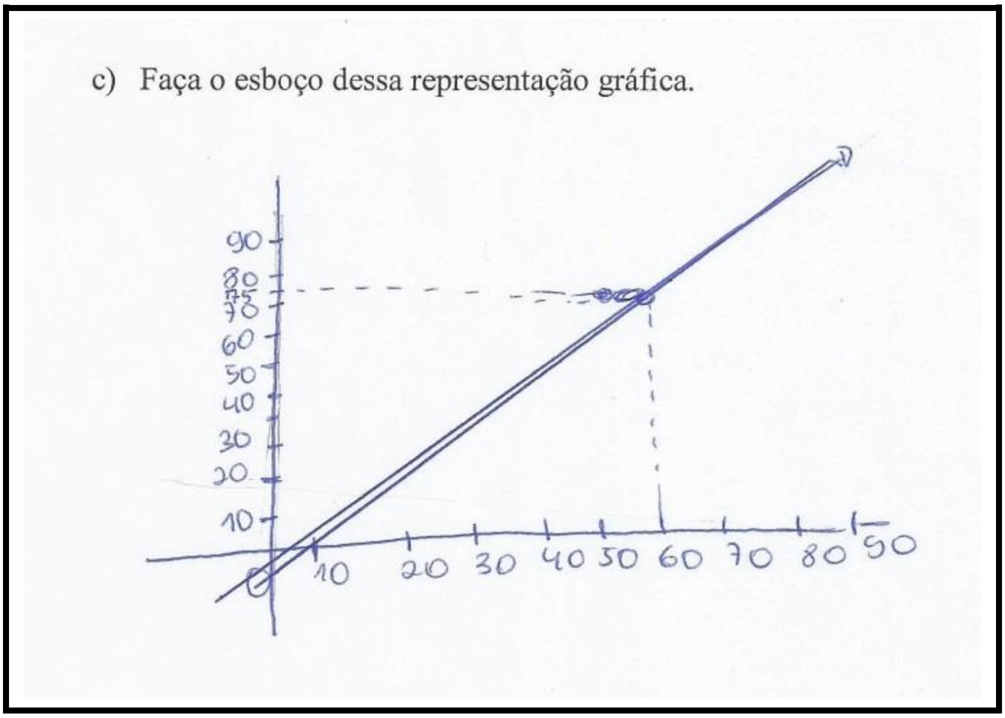

a) Tomando como parâmetro a equação 5x +4y = $\boxed{300}$ existe possibilidade de representá-la graficamente? De que forma você faria isso?

x	
2	5.2+4y=2,5
1	5. 1+4y=1,25
0	5. 0+4y=0
-1	5. −1+4y=−1,25
-2	5.−2+4y=2,5

Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Em relação ao item *b* que consistia em escrever o nome do gráfico que corresponde a uma equação linear um grupo deixou em branco e os outros três consideraram que era uma linha reta. Já em relação a representação gráfica, três grupos desenharam corretamente, no entanto nem todos respeitaram a escala ao construir o gráfico e um grupo usou de forma errada os resultados obtidos. Ao fazer $x = 0$ obtiveram $y = 75$ e ao usarem o valor de $y = 0$ obtiveram $x = 60$. No entanto ao localizar estes dois pontos no gráfico, ignoraram os valores "zero" e localizaram o par ordenado (60,75) conforme pode ser verificado na Figura 14.

Figura 14 – Representação gráfica da equação linear pela dupla de estudantes V e S.



Fonte: acervo do pesquisador (2017

Atividade 08

a) *Represente por meio do registro gráfico os três sistemas trabalhados anteriormente.*

$$\begin{cases} 15x + 10y = 16800 \\ 8x + 5y = 8720 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 4y = 300 \\ 10x + 8y = 600 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 120 \\ 8x + 12y = 180 \end{cases}$$

b) Analise os gráficos obtidos e estabeleça uma relação entre a solução obtida na resolução de cada um dos sistemas e o gráfico apresentado.
c) Que relação você estabelece entre o ponto de intersecção das retas e o conjunto solução do sistema?
d) Enuncie a partir da interpretação gráfica quando um sistema é:
- *Possível e determinado*
- *Impossível*
- *Possível e indeterminado*

e) Confronte os enunciados que você fez com os apresentados no livro didático. Reescreva-os, se necessário, lembrando que há a necessidade de uso de termos corretos e sem ambiguidade.

Objetivo: identificar se o estudante converte sistemas lineares representados algebricamente para o registro gráfico e percebe que existe uma relação entre a posição relativa entre retas em um plano e a classificação dos sistemas lineares.

Num primeiro momento, pensou-se em excluir essa atividade da sequência didática, pois propõe a construção manual da representação gráfica, no entanto acredita ser importante esse tipo de construção, pois há situações em que o estudante terá que fazer a representação sem o uso de um *software*. Além disso, o uso do *software* GeoGebra na atividade 09 não tem como propósito a construção de gráficos, portanto, as atividades possuem objetivos diferentes.

Não foi o objetivo desta atividade a identificação das variáveis visuais do registro gráfico e optou-se em abordá-las na atividade 09 com o uso do *software* GeoGebra, permitindo um número maior de experimentações e a otimização do tempo.

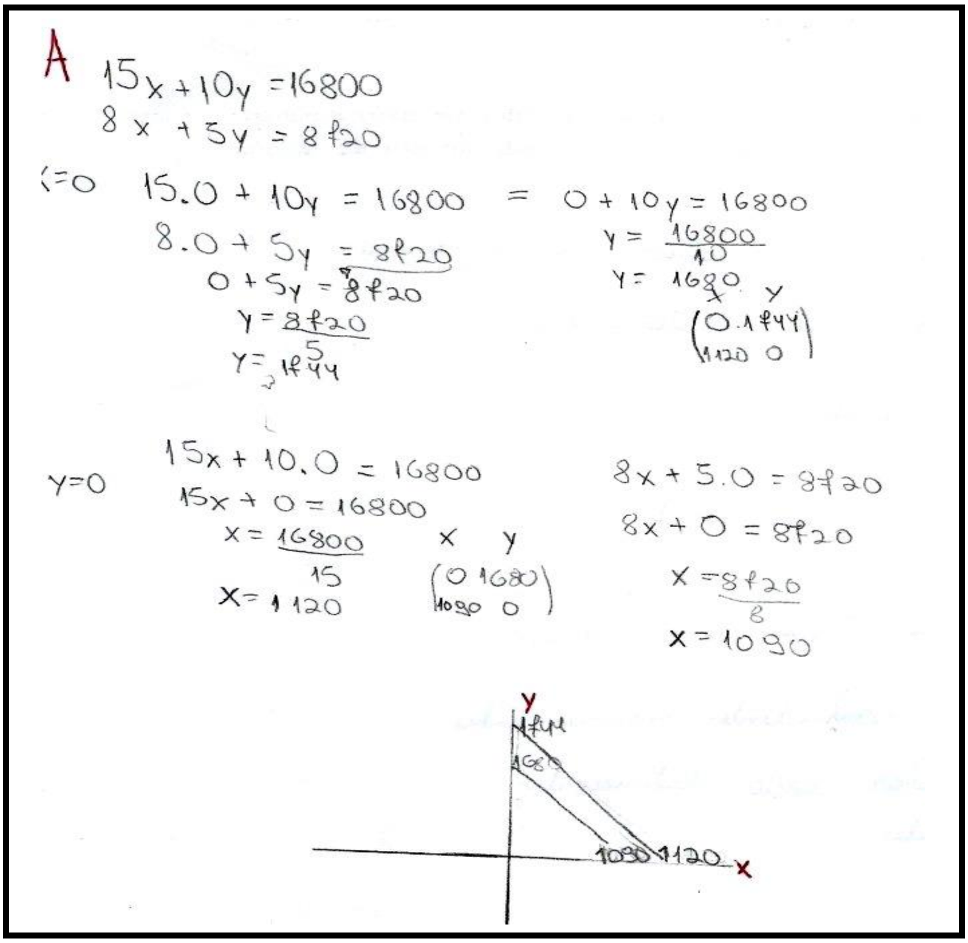
Aproveitando as ideias desenvolvidas na atividade anterior o professor fez a explanação no quadro de como fazer o esboço do gráfico de um sistema linear composto por duas equações lineares. Optou-se em apresentar o esboço do gráfico, pois esse procedimento é mais rápido e dá uma visão global do comportamento das retas. Partiu-se da ideia de função afim já trabalhada no ano anterior e a partir desta ideia estender este conhecimento para os sistemas lineares 2 x 2.

Os estudantes deveriam representar por meio do registro gráfico os três sistemas trabalhados até o momento e considera-se isso importante, pois são diferentes abordagens feitas com os mesmos sistemas lineares que foram abordados nas atividades 01, 03 e 04 com o objetivo de assegurar que os estudantes compreendam que se trata do mesmo objeto matemático apresentado sob diferentes registros de representação.

Ainda segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio "A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções" (BRASIL, 2006, p. 72).

Em relação à representação gráfica do sistema possível e determinado chegou-se as seguintes constatações: dos oito estudantes presentes todos resolveram corretamente a primeira etapa e encontraram os valores, mas três estudantes trocaram os valores obtidos para x e y em uma das equações e obtiveram retas paralelas ao representar graficamente o sistema, quando deveriam obter retas concorrentes (Figura 15).

Figura 15 – Representação gráfica de um SPD pelo estudante J



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Ao final constatou-se ainda que em relação a sistemas possíveis e determinados além de encontrar os valores em que as retas intersectam os eixos x e y também é importante encontrar o ponto de intersecção entre as duas retas, para que a representação, mesmo sendo um esboço do gráfico, esteja correta. Percebeu-se que o estudante precisa recorrer ao tratamento algébrico e encontrar a solução via registro algébrico, caso não tenha representado o gráfico obedecendo uma escala previamente determinada para os eixos x e y.

Em relação à representação gráfica de um sistema possível e indeterminado todos os estudantes procederam corretamente, no entanto, todos encontraram valores de x e y para as duas equações lineares pertencentes ao sistema, o que não era necessário. Nenhum dos estudantes percebeu inicialmente, que por trataram-se de equações proporcionais tanto nos coeficientes das incógnitas quanto nos termos independentes os valores encontrados seriam os mesmos e isso foi comentado pelo professor ao final da atividade.

Na representação gráfica do sistema impossível todos os estudantes realizaram corretamente o tratamento, mas três estudantes localizaram de forma errada os pontos no gráfico, no entanto, isso não prejudicou a classificação, pois mesmo assim obtiveram retas distintas e paralelas.

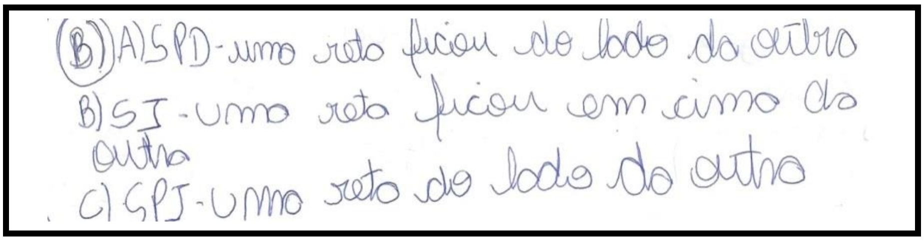
Acreditava-se que os estudantes iriam relacionar o fato de serem três sistemas diferentes com três representações gráficas distintas. No entanto dois estudantes não identificaram isso ao representarem o gráfico e tampouco relacionaram a classificação dos sistemas com a posição relativa entre as retas. Em nenhum momento fizeram alguma pergunta ao professor no sentido de questionar os resultados obtidos.

Após terem feito as representações gráficas os estudantes deveriam relacionar os gráficos com a classificação dos sistemas lineares da seguinte forma: retas distintas e paralelas implicam sistema impossível, retas coincidentes relacionam-se a sistema possível e indeterminado e retas concorrentes implicam sistema possível e determinado.

Convém destacar que nessa sequência didática os estudantes ainda não tiveram contato com essa nomenclatura específica: retas paralelas, coincidentes e concorrentes, pois isso foi realizado ao final da atividade. Alguns estudantes usaram o termo “linhas” para designar retas.

Em relação às respostas do item *b* da atividade 08 observou-se que dos oito estudantes presentes nesta atividade: quatro associaram corretamente, um não respondeu, um escreveu a resposta parcialmente correta, pois não fez a relação de um dos sistemas apresentados e dois estudantes responderam errado (Figura 16). Estes dois estudantes provavelmente responderam errado, pois já haviam representado o gráfico de forma errada, no entanto se tivessem um olhar mais apurado teriam percebido que estes três sistemas já haviam sido trabalhados anteriormente e ao final da resolução apresentaram situações distintas o que implicaria em representações gráficas distintas.

Figura 16 – Resposta do item (b) da atividade 08 pelo estudante V

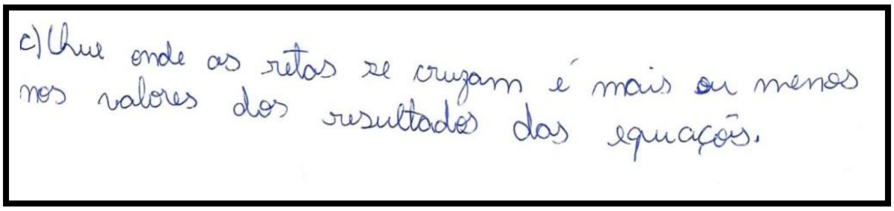

(B) A) SPD - uma reta ficou do lado da outra
B) SI - uma reta ficou em cima da outra
C) SPJ - uma reta do lado da outra

Fonte: acervo do pesquisador (2017)

O item *c* solicitou que os estudantes respondessem ao seguinte questionamento: "Que relação você estabelece entre o ponto de intersecção das retas e o conjunto solução do sistema?". Nesta atividade os estudantes deveriam observar apenas o primeiro gráfico, pois foi somente neste que ocorreu a intersecção das retas. Deveriam ainda relacionar isso ao fato de ser este o sistema que apresentou uma única solução através de um par ordenado.

Novamente os três estudantes que trocaram os valores dos pares ordenados obtiveram um gráfico com retas paralelas no primeiro sistema e não com retas concorrentes. Isso implicou em errarem a resposta do item *c*: dois destes estudantes responderam que não havia relação e um estudante deixou em branco. Dos estudantes que haviam representado graficamente o primeiro sistema de forma correta um deixou a atividade em branco alegando que não conseguiu terminar, três responderam de forma correta e um de forma parcialmente correta (Figura 17).

Figura 17 – Resposta do item (c) da atividade 08 pelo estudante T


c) Que onde as retas se cruzam é mais ou menos nos valores dos resultados das equaçõs.

Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Este estudante escreveu esta resposta, pois ao relacionar o conjunto solução e a representação gráfica do sistema percebeu que as retas não se intersectaram exatamente no par ordenado que constituía o conjunto solução. Isso ocorreu, pois, ao fazer o esboço do gráfico, não houve uma preocupação maior em observar a mesma escala para os eixos *x* e *y*. Os estudantes foram orientados a sempre encontrarem esse ponto de intersecção ao representarem graficamente um sistema para evitar esse tipo de erro. Após a explanação do professor o estudante compreendeu o que havia ocorrido.

Nos itens *d* e *e* os estudantes deveriam enunciar, a partir das constatações realizadas até o momento e de acordo com a representação gráfica que características um sistema deve apresentar para ser classificado como possível e determinado, possível e indeterminado e impossível. No item *d* deveriam escrever com suas palavras e no item *e* pesquisar no livro didático, para que tivessem contato com a definição formal dos termos que estavam sendo usados até o momento: retas paralelas, coincidentes e concorrentes.

Ao final das atividades percebeu-se que sete estudantes associaram corretamente e fizeram uso da nomenclatura correta e um deixou em branco alegando que não conseguiu terminar a atividade proposta.

Atividade 09

Atividade adaptada de Freitas (2013)

Considerando uma equação da forma ax + by = c, em que a é o coeficiente de x, b é o coeficiente de y e c o termo independente, observe o sistema de equações lineares a seguir, faça o que é solicitado e responda:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = c \end{cases}$$

a) Digite este sistema de equações no GeoGebra.
b) Atribua o valor 12 para o termo c e escreva o que ocorre. Atribua mais dois valores aleatórios para c e escreva o que ocorre.
c) Há proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas x e y deste sistema?
d) Essa proporcionalidade também ocorre no termo independente quando c = 12?
e) Que relação você estabelece entre a proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas e a não proporcionalidade do termo independente e a classificação deste sistema?
f) Represente o sistema (quando c = 12) no GeoGebra e insira o gráfico obtido no espaço abaixo.
g) Qual a posição relativa entre as retas obtidas?
h) Que relação você estabelece entre a posição relativa entre as retas obtidas e a classificação do sistema?
i) Que valor deve ser atribuído a c para que a proporcionalidade também ocorra no termo independente?
j) Que relação você estabelece entre a proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas e do termo independente e a classificação deste sistema?
k) Represente este sistema no GeoGebra e insira o gráfico obtido no espaço abaixo.
l) Qual a posição relativa entre as retas obtidas?
m) Que relação você estabelece entre a posição relativa entre as retas obtidas e a classificação do sistema?
n) E para obter um sistema possível e determinado que alteração você deveria efetuar neste sistema de equações em questão?
o) Escreva o sistema no espaço abaixo.
p) Que relação você estabelece entre a não proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas e do termo independente e a classificação deste sistema?
q) Represente o sistema no GeoGebra e insira o gráfico obtido no espaço abaixo.
r) Qual a posição relativa entre as retas obtidas?

s) Que relação você estabelece entre a posição relativa entre as retas obtidas e a classificação do sistema?
t) Através da representação gráfica é possível obter a solução deste sistema? Qual é a solução?
u) Digamos que você tenha um exercício que solicite classificar os sistemas lineares em: SPD, SPI e SI. Existe uma única forma de fazer a classificação?
v) De acordo com o que você aprendeu até agora explique resumidamente diferentes formas de fazer a classificação de sistemas lineares.
w) Classifique os sistemas lineares a seguir e justifique cada classificação.

a) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

x) Observe o sistema que você classificou como possível e determinado? Como você faria para encontrar a solução? Descreva.
y) Salve o arquivo com a seguinte denominação: Ativ9(nome do aluno) e encaminhe para o e-mail informado. eduardo.brandl@ifc.edu.br

Objetivo: verificar se o estudante identifica que alterações no registro algébrico implicam mudanças no registro gráfico e vice versa e ainda se mobiliza diferentes registros na classificação dos sistemas lineares.

Como as construções gráficas são demoradas optou-se em usar nesta atividade, o *software* GeoGebra e segundo Duval (2009, p. 64) “o procedimento de correspondência de duas representações pertencentes a registros diferentes pode ser estabelecido localmente por uma correspondência associativa das unidades significantes elementares constitutivas de cada um dos dois registros” e é esse tipo de atividade que faz o estudante progredir qualitativamente em sua aprendizagem.

De acordo com o relato dos estudantes, eles nunca tinham usado este *software*, por isso inicialmente o professor fez uma breve explanação das funcionalidades que seriam usadas, no entanto, os estudantes não demonstraram maiores dificuldades.

A instituição possui três laboratórios de Informática, porém nenhum deles estava disponível na terça-feira, dia em que a atividade foi realizada, pois os estudantes dos cursos de Informática e Vestuário possuem disciplinas técnicas que sempre são realizadas no laboratório. Assim a alternativa encontrada foi que os estudantes trouxessem notebooks e assim a atividade foi realizada em sala de aula. O professor fez uso do projetor multimídia para realizar a explicação sobre o uso do GeoGebra e cada estudante baixou o *software* em seu notebook. A intenção seria otimizar o tempo por isso a atividade foi realizada em uma terça-feira, único dia da semana que os estudantes têm duas aulas de Matemática.

A atividade proposta foi adaptada de Freitas (2013) e a intenção era de que as discussões fossem realizadas em duplas, mas cada estudante deveria registrar suas respostas de modo a confirmar se estavam compreendendo o que estava sendo solicitado em cada item da atividade. No entanto nem todos os estudantes trouxeram o notebook conforme acordado em aula anterior e dessa forma para não prejudicar a atividade proposta, os estudantes que não trouxeram o equipamento deveriam responder conjuntamente com os que trouxeram. A turma ficou assim constituída: três duplas e três estudantes que responderam de maneira individual.

Inicialmente os estudantes deveriam inserir valores distintos para c, que constitui o termo independente do sistema linear e verificar que quando $c = 10$ as retas eram coincidentes e quando $c \neq 10$ as retas eram paralelas e distintas. Assim, perceberam que o termo independente, nesse caso, corresponde ao coeficiente linear de uma função do 1º grau. Desse modo alterações nesse parâmetro não implicam em mudança na inclinação da reta, apenas mudança no ponto de intersecção das retas com o eixo y.

Deveriam ainda relacionar isso a proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas e dos termos independentes já abordada em uma atividade anterior. O sistema foi digitado no GeoGebra e cada alteração no registro algébrico deveria ser acompanhado pelos estudantes na representação gráfica.

Oito estudantes compreenderam sem maiores dificuldades, que no sistema já descrito anteriormente, mantidos os coeficientes das incógnitas e alterando apenas o termo independente, muda-se a posição em relação ao eixo y, mas mantém-se o mesmo coeficiente angular e tem-se um sistema impossível por meio da representação gráfica de retas paralelas. Apenas um estudante escreveu “O sistema é possível porque as retas não se encontram, são paralelas”. Acredita-se ter sido um erro de escrita pois na sequência o estudante respondeu de forma correta. Possivelmente onde deveria ter escrito impossível escreveu possível.

Duval (2009) destaca que é necessário perceber todas as alterações possíveis de representação gráfica e o efeito na representação algébrica pois isso permite ao estudante ter uma visão global das possibilidades de representação gráfica e possibilita identificar quais são as variáveis visuais a serem consideradas no estudo de um determinado objeto matemático.

Na sequência todos os estudantes identificaram corretamente que para manter a proporcionalidade também no termo independente o valor a ser atribuído ao parâmetro *c* seria 10. Assim manteriam a proporcionalidade tanto entre os coeficientes das incógnitas das duas equações quanto nos termos independentes. Como ocorre essa proporcionalidade as retas possuem o mesmo coeficientes angular e linear, na verdade são retas coincidentes, tratando-se de um sistema possível e indeterminado.

Até o item *m* os estudantes trabalharem apenas com sistemas impossíveis ou sistemas possíveis e indeterminados. No item *n* deveriam responder ao seguinte questionamento: “E para obter um sistema possível e determinado que alteração você deveria efetuar neste sistema de equações em questão?”

Todos os estudantes responderam corretamente e souberam justificar conforme pode ser observado na resposta de dois estudantes. Os estudantes A e N responderam: “*Trocamos os valores da segunda equação para que não sejam proporcionais a primeira”.* Os estudantes M e S responderam: “*Para obter um sistema possível e determinado temos que fazer a seguinte mudança na segunda equação escrevendo-a da forma 4x + 2y = 7. Dessa forma apenas a incógnita x com proporcionalidade”.*

Estes estudantes perceberam ainda que a modificação nos coeficientes das incógnitas *x* e *y* implicam na mudança do coeficiente angular e consequentemente faz com que as retas sejam concorrentes, independente de manter ou não a proporcionalidade no termo independente.

Na sequência, os estudantes deveriam digitar o sistema linear que eles organizaram de acordo com as características de ter ou não proporcionalidade e responder a seguinte questão: “Através da representação gráfica é possível obter a solução deste sistema? Qual é a solução?” Constatou-se que todos os estudantes responderam corretamente identificando que o par ordenado (*x,y*) referente ao ponto de intersecção das duas retas é a solução do sistema.

Uma das últimas questões da atividade 09, o item *v* solicitava-se aos estudantes que respondessem a questão: “De acordo com o que você aprendeu até agora explique resumidamente diferentes formas de fazer a classificação de sistemas lineares”. Um estudante deixou em branco e todos os demais estudantes responderam que existem diferentes formas de realizar a classificação dependendo da situação: observação da proporcionalidade, resolução através de algum método ou uso do GeoGebra para representar graficamente. Na avaliação final iremos verificar se os estudantes mobilizam esses diferentes recursos na resolução de sistemas lineares, se necessário.

A última questão tinha o seguinte enunciado: “Observe o sistema que você classificou como possível e determinado. Como você faria para encontrar a solução? Descreva”.

A estudante K respondeu da seguinte forma: “*Eu iria resolver pelo método da adição, iria tentar anular algum dos termos sendo assim iria descobrir o valor de uma das incógnitas e depois de outra. Quando está sendo usado o computador fica mais fácil pelo gráfico, como por exemplo, usando o aplicativo GeoGebra, pois o ponto de interseção é o valor da solução”.*

A coordenação entre os diferentes registros possibilita ao estudante compreender que cada uma das representações não é o objeto matemático sistemas lineares, mas o representa parcialmente pois as representações se complementam. Isso porque compreendem que “sua transformabilidade em outras representações que conservam seja todo o conteúdo da representação inicial seja uma parte somente desse conteúdo” (DUVAL, 2009, p. 53-54).

Por meio das observações e do acompanhamento das atividades desenvolvidas foi possível observar que gradativamente os estudantes começaram a compreender esta relação entre as várias representações do objeto sistema linear 2 x 2.

Convém destacar ainda que no notebook usado por um dos estudantes ao digitar o sistema impossível, a janela gráfica mostrava duas retas coincidentes o que deveria ocorrer somente com os sistemas possíveis e indeterminados. O estudante explicou isso ao professor e o mesmo tentou descobrir o que teria ocorrido. Descobriu que a resolução da imagem, o *zoom* da visualização estava “muito alto”, foi necessário então clicar e diminuir o *zoom* para que finalmente as retas ficassem paralelas.

Importante essa ressalva pois o estudante somente percebeu isso porque o professor já havia trabalhado com eles a relação entre a proporcionalidade e a classificação dos sistemas lineares. Reforça a ideia de Duval sobre a necessidade de trabalhar com diferentes registros para que o estudante tenha maior consciência acerca do objeto matemático em estudo.

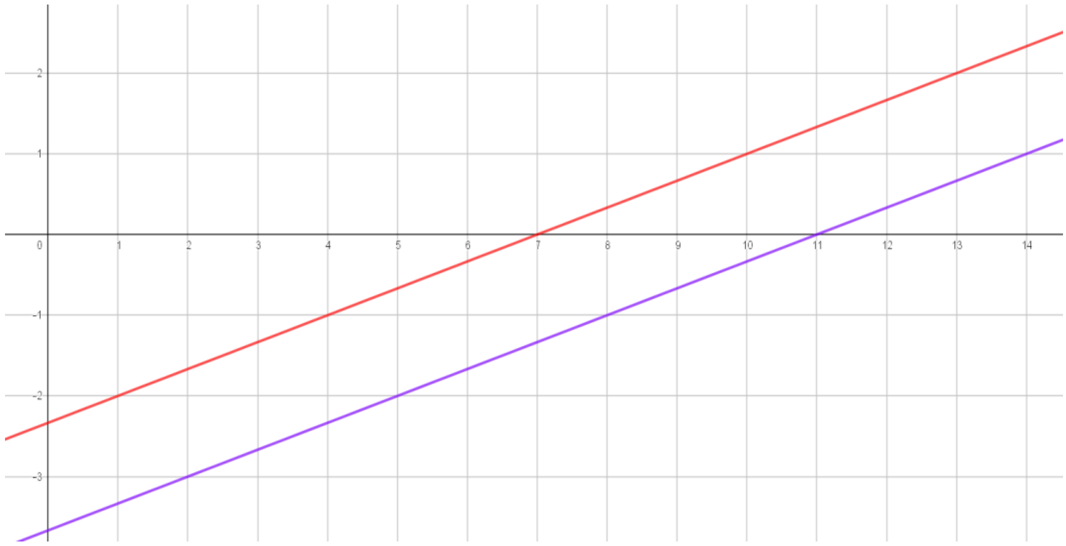
Em relação a equação $4x – 2y =12$, é importante destacar que ao digitar no GeoGebra o mesmo transformou em $2x – y = 6$, ou seja, simplificou os valores dos coeficientes, mantendo a mesma equação original. Alguns estudantes inicialmente acreditavam que o sistema estava com algum problema, mas após a explicação compreenderam se tratar da mesma equação linear e que o *software* sempre trabalha com a forma mais simplificada possível de cada uma das equações.

Ao final da atividade percebeu-se que o uso do *software* GeoGebra permitiu a construção rápida de gráficos e possibilitou a variação dos parâmetros estabelecidos, no entanto isso somente ocorreu porque o professor organizou uma gama de questionamentos em relação as alterações efetuadas no registro gráfico e a implicação no registro algébrico e relacionando ainda isso com a proporcionalidade dos coeficientes e dos termos independentes, permitindo a compreensão dos estudantes.

Atividade 10

Observe a representação gráfica de sistemas de equações lineares 2 x 2.

Gráfico 01

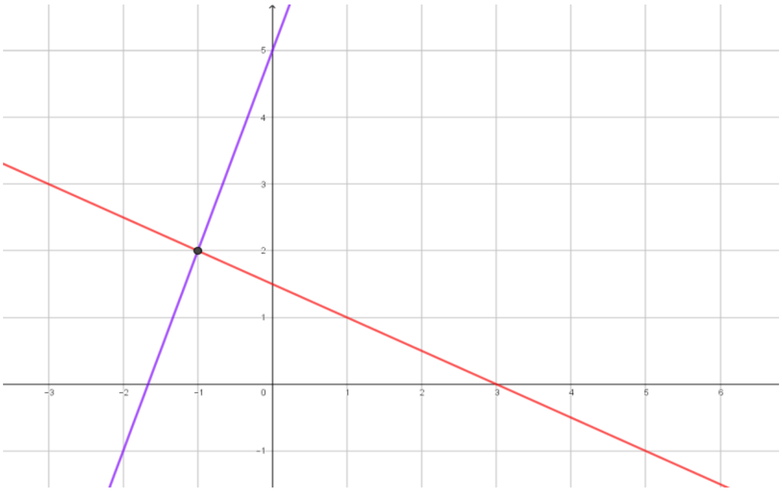


a) Classifique o sistema representado no registro gráfico e justifique.

b) Agora escreva um sistema de equações que represente algebricamente o gráfico.

c) Como você faria para certificar-se de que o sistema de equações apresentado está correto?

Gráfico 02

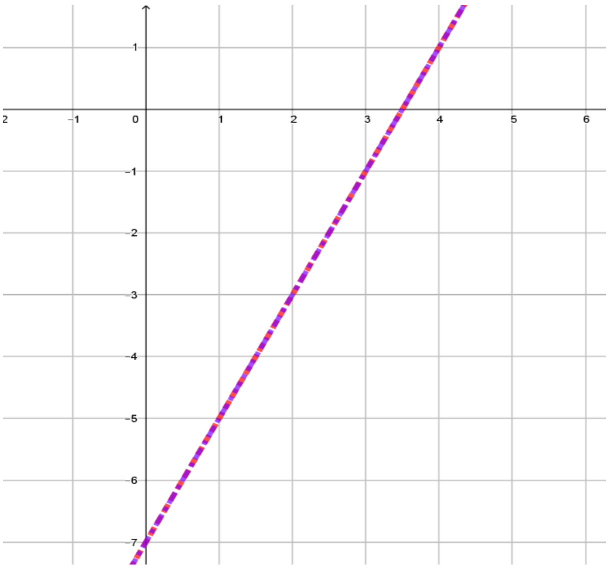


a) Classifique o sistema representado no registro gráfico e justifique.

b) Agora escreva um sistema de equações que represente algebricamente o gráfico.

c) Como você faria para certificar-se de que o sistema de equações apresentado está correto?

Gráfico 03



a) Classifique o sistema representado no registro gráfico e justifique.

b) Agora escreva um sistema de equações que represente algebricamente o gráfico.

c) Como você faria para certificar-se de que o sistema de equações apresentado está correto?

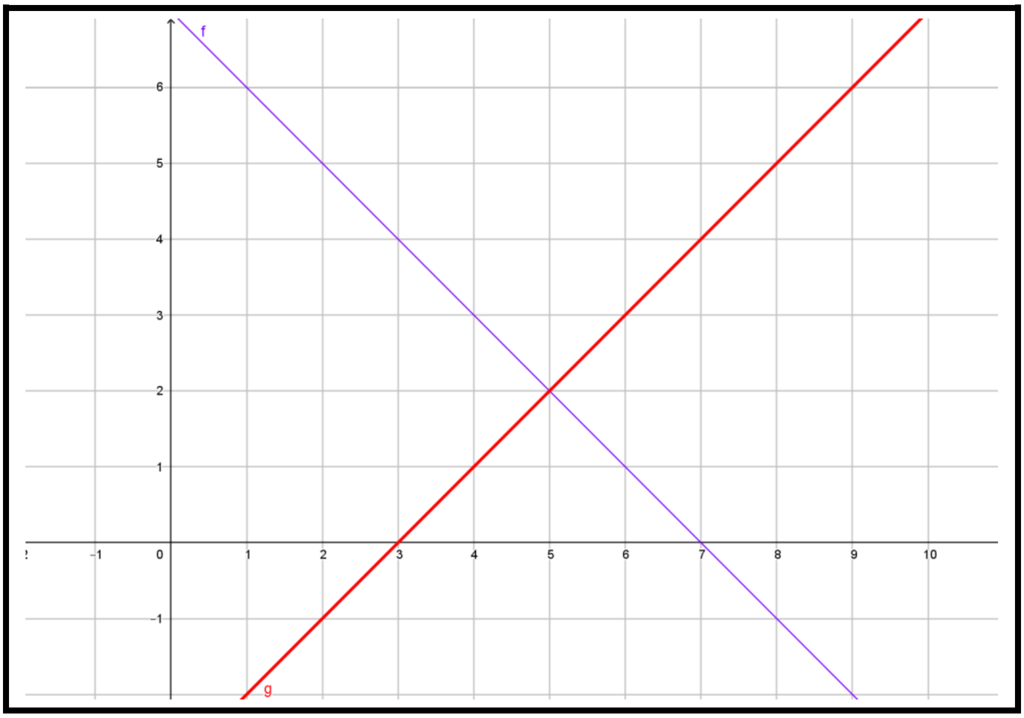
Objetivo: verificar se o estudante classifica um sistema linear 2 x 2 a partir de sua representação gráfica e se faz a conversão do registro gráfico para o algébrico, pois conforme a Teoria de Duval é necessário que o estudante seja submetido a situações de conversão nos dois sentidos, pois trata-se de processos de resolução com custos cognitivos diferentes.

Antes de iniciar esta atividade o professor entregou aos estudantes um sistema linear possível e determinado no registro gráfico (Figura 18) para avaliar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação a conversão do registro gráfico para o algébrico. Foi estipulado um determinado tempo aos estudantes e não ocorreu nenhuma intervenção do professor. Houve reclamações por parte dos estudantes, pois relataram que não tinham ideia de como proceder.

A atividade anterior consistia em converter um sistema linear representado no registro algébrico para o registro gráfico e isso confirma a hipótese de Duval: a conversão em um dos sentidos não garante a compreensão da conversão no sentido inverso, pois se isso fosse verdadeiro os estudantes não teriam dificuldade em realizar a conversão no sentido inverso, como ficou evidente nesta atividade.

O professor então fez a explanação no quadro e como os estudantes ainda não aprenderam Geometria Analítica, optou-se em ancorar a explicação nas funções polinomiais do 1º grau cuja forma é $y = ax + b$. O professor reescreveu então essa forma geral de modo a deixá-la com a configuração convencional de um sistema linear (Figura 18).

Figura 18 – Representação gráfica usada pelo professor para explicação da conversão para o registro algébrico



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Partindo do pressuposto de que no 1º ano do Ensino Médio na expressão $y = ax + b$ os estudantes associaram o parâmetro *b* ao coeficiente linear e o parâmetro *a* à inclinação da reta (coeficiente angular), mas que ainda não possuem elementos da Geometria Analítica para determinar o coeficiente angular através de uma fórmula geral, o professor questionou como os estudantes tinham procedido ao esboçar o gráfico na atividade 08 a partir do registro algébrico.

Os estudantes afirmaram que encontraram valores para *x* e *y* e os localizaram no gráfico. Um estudante ainda afirmou que com dois pontos já é possível fazer o gráfico. Assim o professor concordou com o estudante afirmando que se forem considerados dois pontos do plano cartesiano é possível construir a reta, então é possível fazer o inverso também. Mas estes dois pontos devem ser aqueles que nos dão uma visão global do comportamento dessa reta, ou seja, quando $x = 0$ e $y = 0$.

A partir disso o professor retomou o exemplo da Figura 18 e solicitou que os estudantes tentassem realizar essa conversão. Para que o professor pudesse realizar a correção no quadro estabeleceram conjuntamente os mesmos pares ordenados a serem considerados: para a reta *f* os pares ordenados (5,2) e (4,3) e para a reta *g* (5,2) e (4,1). O professor comentou ainda que qualquer ponto pertencente a reta poderia ser usado. Conforme os estudantes apresentavam algumas resoluções, o professor registrava-as no quadro conforme pode ser verificado na sequência.

Em relação a reta *f*, substitui-se o ponto (5,2) na fórmula geral de uma equação polinomial do 1º grau $y = ax + b$ obtendo-se $2 = 5a + b$. Na sequência tomando o ponto (4,3) tem-se $3 = 4a + b$. Como os dois pontos pertencem a mesma reta as duas equações podem ser reescritas como um sistema linear.

$$\begin{cases} 5a + b = 2 \\ 4a + b = 3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear encontra-se o valor $a = -1$ e $b = 7$

Em relação a reta *g* faz-se o mesmo procedimento, tomando o ponto (5,2) e substituindo em $y = ax + b$ tem-se $2 = 5a + b$. Na sequência tomando o ponto (4,1) tem se que $1 = 4a + b$ e assim obtém o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} 5a + b = 2 \\ 4a + b = 1 \end{cases}$$

Resolvendo-o tem-se $a = 1$ e $b = -3$

Usando os valores de a e b e substituindo na equação da reta f tem-se $y = -x + 7$, reescrevendo na forma de sistema linear obtém-se: $x + y = 7$

Agora usando os valores de a e b da equação da reta g tem-se $y = x - 3$, reescrevendo tem-se $- x + y = -3$, ou seja, $x - y = 3$

Dessa forma a representação algébrica do sistema linear que estava representado no registro gráfico é: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Destaca-se ainda que ao obterem o registro algébrico podem realizar um tratamento algébrico como forma de garantir que realmente refere-se ao mesmo sistema linear representado no registro gráfico.

O professor teve muitas dúvidas sobre qual a melhor maneira de mostrar aos estudantes uma das possíveis formas de conversão do registro gráfico para o algébrico, pois mais importante do que escrever o sistema linear em questão, é que o estudante articule os diferentes registros de representação para classificar e resolver os sistemas lineares.[17]

A abordagem utilizada foi um pouco trabalhosa e havia a possibilidade de um caminho mais rápido através da Geometria Analítica, usando por exemplo a fórmula para calcular o coeficiente angular de uma reta a partir de dois pontos dados. No entanto para isso o professor precisaria ampliar as discussões sobre coeficiente angular e demonstrar a fórmula o que seria trabalhoso.

Os estudantes realizaram a atividade em grupos, mas registraram individualmente as respostas e em relação ao primeiro sistema (SI) não demonstraram grandes dificuldades em usar este procedimento para encontrar o registro algébrico do sistema linear, no entanto percebeu-se que nenhum dos estudantes obteve a resposta correta. Uma dupla selecionou o par ordenado errado, portanto não chegou a resposta esperada. Outro grupo encontrou de forma correta a primeira equação do sistema, mas provavelmente por falta de atenção usou equivocadamente o valor de b que foi encontrado na primeira equação para a segunda, o que resultou em um sistema errado.

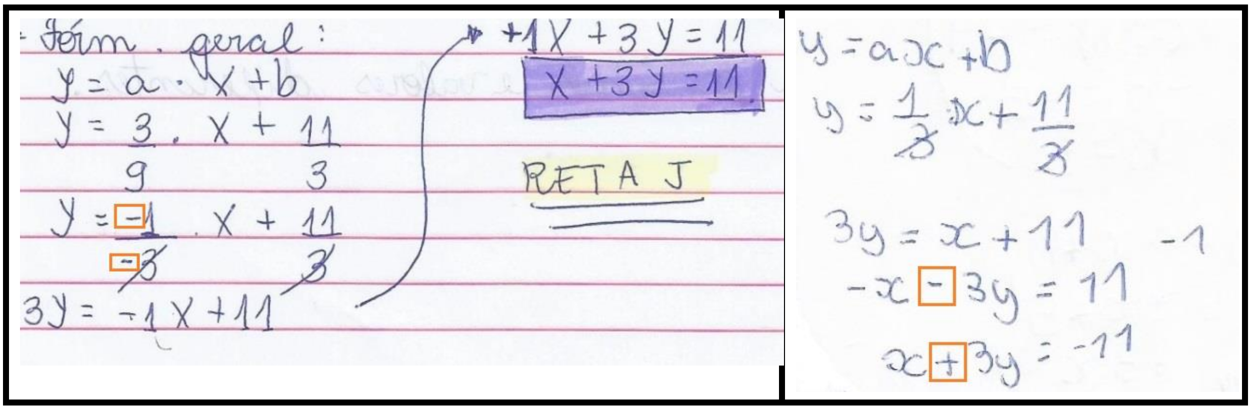
O terceiro grupo encontrou a primeira equação, mas errou nos tratamentos algébricos referente a segunda equação e o último grupo encontrou a primeira equação, mas errou ao reescrever na forma de um sistema linear e em relação a segunda equação ocorreram erros no

[17] Pontua-se ainda que os trabalhos de Jordão (2011) e Boemo (2015), outras pesquisas que estudaram este tema, não abordaram a conversão do registro gráfico para o algébrico.

tratamento algébrico. Percebeu-se que grande parte dos erros relacionou-se a mudança das variáveis em relação aos lados da igualdade e também o tratamento numérico referente aos números inteiros.

Ocorreram alguns erros nos tratamentos algébricos, geralmente ao organizar a função $y = ax + b$ na forma de um sistema linear, ou seja, todo o tratamento algébrico foi realizado de forma correta, mas ao reescrever a função ocorreu o erro, conforme pode ser verificado na Figura 19. À direita o erro ocorreu na escrita em forma de sistema linear e à esquerda o estudante simplesmente inseriu um sinal negativo ao simplificar o número racional na forma fracionária.

Figura 19 – Parte final da resolução dos estudantes C (à esquerda) e T (à direita) em relação ao primeiro registro gráfico da atividade 10.



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Todos os grupos classificaram corretamente o sistema em impossível apenas observando a representação no registro gráfico. Um dos objetivos da atividade era observar se após a representação algébrica os estudantes tomariam o cuidado de verificar se o sistema escrito realmente representava um sistema impossível, conforme já aprendido em atividades anteriores: para isso os coeficientes das incógnitas entre as duas equações deveriam ser proporcionais e os termos independentes não. Essa comparação pode ser observada ao responderem o item *c*. Mesmo com alguns erros pontuais no tratamento algébrico e não obtendo o sistema linear correto, o sistema linear obtido (errado) manteve as características de um sistema impossível, o que demonstrou que nem sempre isso basta para ter certeza de que o sistema encontrado está correto.

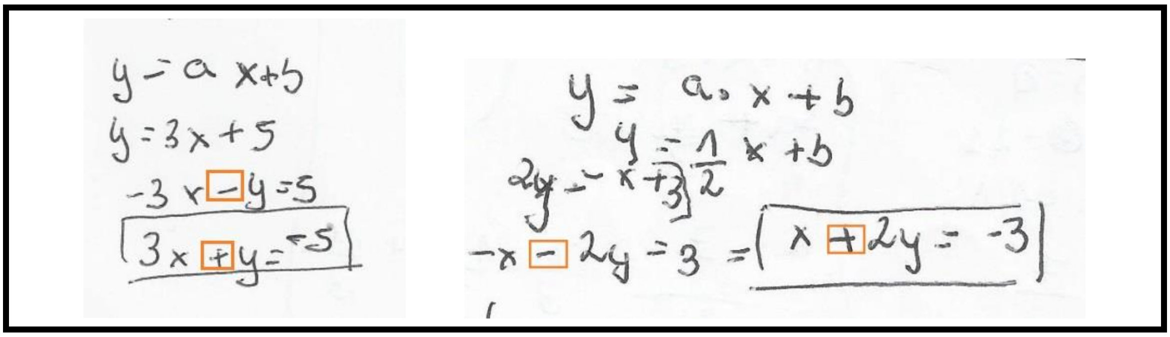
No entanto é um bom indicativo conforme a resposta do estudante T “Olhando, por exemplo, a proporcionalidade dos termos. No caso, é um SI, pois as incógnitas são proporcionais e os termos independentes não.” No entanto este estudante obteve um sistema impossível, mas que não condizia com o sistema representado no gráfico. Assim, além de observar isso deveria verificar se alguns pontos do gráfico satisfaziam a equação linear obtida conforme resposta da aluna K: “Podemos usar os pontos encontrados e procurar ver se está certo”. No entanto, mesmo enunciando isso, o estudante não usou este procedimento para verificar se o sistema linear encontrado estava correto.

Dos quatro grupos, três resolveram de forma parcialmente correta pois fizeram algum erro nos tratamentos algébricos, embora tenham encontrado duas equações que satisfaziam as características de proporcionalidade de um sistema impossível. Um grupo escolheu valores errados em relação aos pares ordenados, realizou os procedimentos corretamente, mas obteve uma representação algébrica que não correspondia ao registro gráfico.

Em relação ao segundo sistema (SPD) todos os grupos classificaram corretamente o sistema em possível e determinado baseados no registro gráfico. Por tratar-se de um SPD há um ponto em comum entre as duas retas, que constitui o conjunto solução do sistema linear. Todos perceberam isso e usaram o mesmo ponto para a escrita de cada uma das duas retas.

Dois grupos realizaram os tratamentos corretamente e encontraram o registro algébrico referente ao sistema linear representado no registro gráfico. Um grupo fez os tratamentos algébricos da primeira equação corretamente, mas errou ao escrevê-la na forma de uma equação linear (Figura 20) e em relação a segunda equação ocorreram erros no tratamento algébrico. O quarto grupo errou ao usar o método da adição e por isso obteve um sistema linear que não correspondia ao registro gráfico.

Figura 20 – Erros nos tratamentos algébricos efetuados pelo estudante A



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

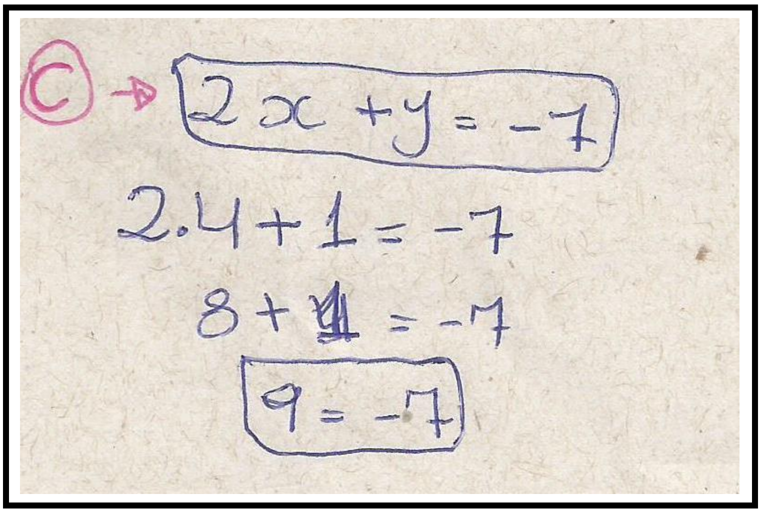
Em relação ao item c “*Como você faria para certificar-se de que o sistema de equações apresentado está correto?”,* dois grupos responderam que basta observar que não há proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas das equações pertencentes ao sistema linear e também não há proporcionalidade entre os termos independentes, um grupo escreveu uma resposta sem sentido e o grupo que errou ao usar o método da adição obteve as seguintes equações lineares: *x + y = 3* e *x + y = - 4.*

Diante deste resultado poderiam ter verificado que havia algum erro na resolução, pois não poderia haver proporcionalidade. No entanto, fizeram a interpretação a partir do resultado obtido não considerando os critérios já estudados anteriormente, conforme resposta de um estudante “As incógnitas são proporcionais, por isso tocam o mesmo ponto, já o termo independente não, por isso vão para lados diferentes”. Poderiam ainda substituir os valores dos pares ordenados separadamente em cada equação para ver se satisfaziam a expressão. Nesse caso ficou evidente que somente a observação da proporcionalidade ou não dos coeficientes das equações do sistema linear não seria suficiente.

Em relação ao terceiro sistema (SPI) todos os grupos classificaram corretamente o sistema possível e indeterminado de acordo com a observação no registro gráfico. Três grupos encontraram o sistema linear, mas um destes grupos errou ao final na escrita do sistema linear. Um grupo errou os tratamentos obtendo uma representação algébrica não correspondente ao registro gráfico.

Ao verificar se o sistema encontrado estava correto, um dos grupos fez a seguinte resolução (Figura 21).

Figura 21 – Validação da solução encontrada pelo estudante M



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

No entanto, mesmo verificando que haviam encontrado a equação errada, não fizeram a correção.

Nesta situação os estudantes escreveram apenas uma equação linear, pois tratava-se de um sistema possível e indeterminado e a segunda deveria ser escrita de acordo com o que já haviam aprendido: deveria ocorrer proporcionalidade tanto nos coeficientes das incógnitas quanto nos termos independentes entre as duas equações. No entanto, duas duplas escreveram corretamente a segunda equação linear e duas duplas não escreveram a segunda equação linear.

Atividade 11

Classifique os sistemas lineares e encontre o conjunto solução.

a) $\begin{cases} x+y=8 \\ x+y=5 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 5x+3y=22 \\ 8x+5y=36 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 5x=1-3y \\ 2x+4y=y-3x \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 7x-y=y-x-7 \\ 2y-5x-3=3x+4 \end{cases}$

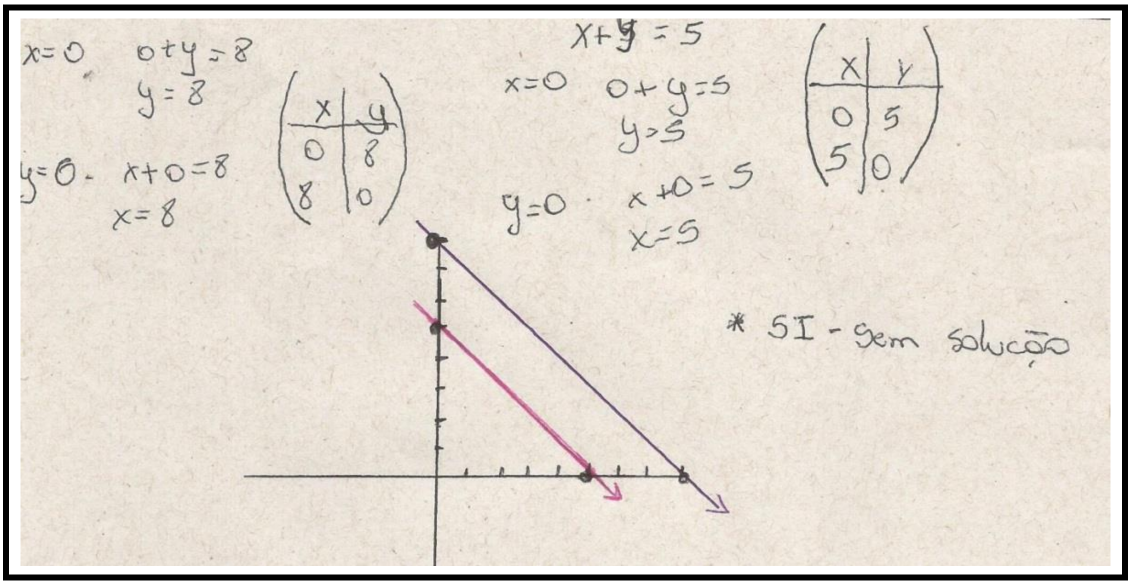
Na elaboração inicial das atividades desta sequência didática não estava prevista a atividade 11, mas durante a aplicação desta pesquisa constatou-se dificuldades no tratamento algébrico e numérico e considera-se que assim como a conversão, o tratamento dentro de um mesmo registro de representação é uma transformação importante requerida pela Matemática e por isso deve ser efetivamente apropriada pelos estudantes.

Percebeu-se ainda que nem sempre as situações envolvendo os sistemas lineares estão escritas na forma padrão, portanto optou-se em organizar uma atividade para sistematização dos métodos de resolução de sistemas lineares 2 x 2 e que contemplasse outras formas de organização do registro algébrico destes sistemas lineares.

Em relação aos sistemas lineares dos itens *c* e *d* o professor questionou os estudantes sobre como resolver, pois os sistemas lineares não estavam no mesmo formato que os sistemas estudados até o momento. O estudante K respondeu: “colocar os números com x e y de um lado e o número do outro lado”.

O primeiro sistema linear da atividade 11 correspondia a um sistema impossível, o que facilmente poderia ser observado no registro gráfico e até mesmo observando a proporcionalidade. Assim os estudantes nem precisariam resolver, poderiam a partir do critério de proporcionalidade escrever que o sistema era impossível, no entanto todos os estudantes resolveram, sendo que oito usaram o método da adição, ou seja, realizando um tratamento algébrico e somente um estudante fez uso do registro gráfico conforme pode ser visualizado na Figura 22.

Figura 22 – Uso do registro gráfico pelo estudante A para classificação do sistema



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Observa-se, no entanto, que em atividades de classificação de sistemas lineares o registro gráfico permite uma resposta rápida, isso não ocorre no entanto para determinar o conjunto solução de um sistema de modo geral, exceto nos sistemas impossíveis, como nesse em que o estudante fez uso do registro gráfico (Figura 22).

Em relação ao sistema linear do item *a* desta atividade sete estudantes encontraram a resposta correta e identificaram que tratava-se de um sistema impossível, no entanto apenas quatro destes estudantes escreveram o conjunto solução usando a terminologia matemática específica, os outros três simplesmente escreveram que o sistema não tinha solução. Um estudante interpretou o resultado ao final da resolução de modo equivocado e classificou como um sistema possível e indeterminado e outro estudante errou ao usar o método da adição, obtendo $y = 3$ e classificando o sistema como possível e determinado.

Uma das dificuldades apresentadas pelos estudantes na resolução do item *b* desta atividade foi que ao usar o método da adição houve a necessidade de multiplicar ambas as equações por um determinado número inteiro para que uma das incógnitas fosse eliminada. Nem todos recordaram disso e o professor relembrou como proceder nessa situação.

Nenhum dos estudantes teve a preocupação de escrever a solução deste sistema conforme convencionado matematicamente, ou seja, S = {2,4}. Novamente um estudante usou o registro gráfico o que lhe permitiu classificar corretamente o sistema, no entanto, não possibilitou encontrar o conjunto solução e necessitou fazer o tratamento algébrico.

Um estudante resolveu de modo errado, pois ainda não domina os métodos de resolução de sistemas lineares 2 x 2. Este estudante possui sérias defasagens na aprendizagem e foi orientado pelo professor a frequentar as aulas de apoio pedagógico nas quartas-feiras a tarde como forma de contribuir para a compreensão dos conteúdos trabalhados na sequência didática, bem como em etapas anteriores da escolaridade, mas o mesmo nega-se a participar deste atendimento. No conselho de classe o professor solicitou a coordenação que contatasse a família deste estudante a fim de explicar a necessidade deste atendimento.

Outro estudante errou ao realizar o tratamento algébrico obtendo valores diferentes para a solução, mas mesmo assim encontrou um valor para cada incógnita e classificou corretamente como sistema possível e determinado e um não resolveu esse item, sendo que os demais resolveram corretamente.

No sistema linear do item *c* era necessário primeiro escrever as equações de acordo com a convenção estabelecida para os sistemas lineares e após esta organização os estudantes poderiam verificar diretamente que tratava-se de SI por meio da observação da proporcionalidade. Como o exercício solicitava que os estudantes classificassem e encontrassem o conjunto solução, não havia a necessidade de resolver usando métodos, conforme já ocorreu no sistema linear do item *a* desta atividade, por tratar-se de um sistema impossível.

Novamente evidenciou-se que todos os estudantes resolveram usando o método da adição, assim ficou implícito então que nenhum destes estudantes articulou a representação algébrica aos critérios de proporcionalidade. Mas uma conversa com estes estudantes evidenciou que na verdade sentem-se mais seguros ao realizar um procedimento de resolução, como forma de garantir que o professor compreenda os procedimentos usados pelo estudante.

Sete estudantes resolveram de modo correto, embora apenas quatro tenham escrito o conjunto solução de maneira convencional. Um estudante errou o tratamento algébrico e outro não soube organizar as equações na forma $5x + 3y = 1$ e $5x + 3y = 0$.

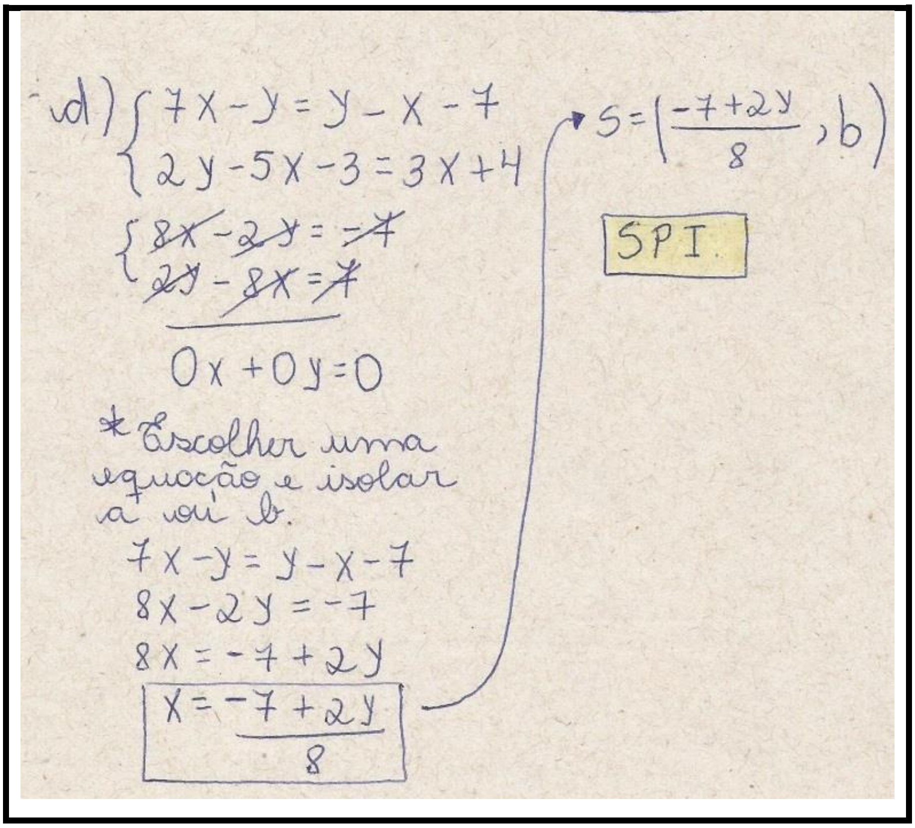
Em relação ao sistema linear do item *d* (SPI), cinco estudantes resolveram de modo correto. Dos quatro estudantes que não obtiveram êxito nesta atividade, dois não conseguiram agrupar corretamente e reduzir os termos semelhantes[18] e dois erraram nos tratamentos algébricos.

A resolução do estudante C está correta, mas constatou-se que ao escrever a solução geral o estudante volta novamente a equação original, quando poderia ter usado a forma já reduzida que facilitaria os cálculos. Ao escrever a solução geral, ainda escreveu *b* ao invés de

[18] Termos semelhantes são aqueles que têm a mesma parte literal ou que não têm parte literal.

y, provavelmente porque o exemplo que possuía no caderno era com as incógnitas *a* e *b* (Figura 23).

Figura 23 – Escrita da solução geral de um SPI pelo estudante C



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Ao término da atividade o professor retomou cada um dos sistemas lineares e apontou os principais erros cometidos com o intuito de sanar dúvidas que os estudantes ainda possuíam, pois esta foi a última atividade referente aos sistemas lineares 2 x 2, anterior a avaliação individual e sem consulta.

Percebeu-se que os estudantes, de modo geral, não demonstraram preocupação em escrever de maneira formal as soluções dos sistemas possíveis e determinados e sistemas impossíveis. Apenas destacaram o valor das incógnitas no caso do SPD e em relação ao SI escreveram apenas “sem solução”.

Avaliação individual e sem consulta – sistemas lineares 2 x 2

Resolva os dois problemas abaixo, encontrando o conjunto solução para cada situação apresentada.
Orientações – o primeiro problema deve ser resolvido algebricamente e o segundo graficamente.

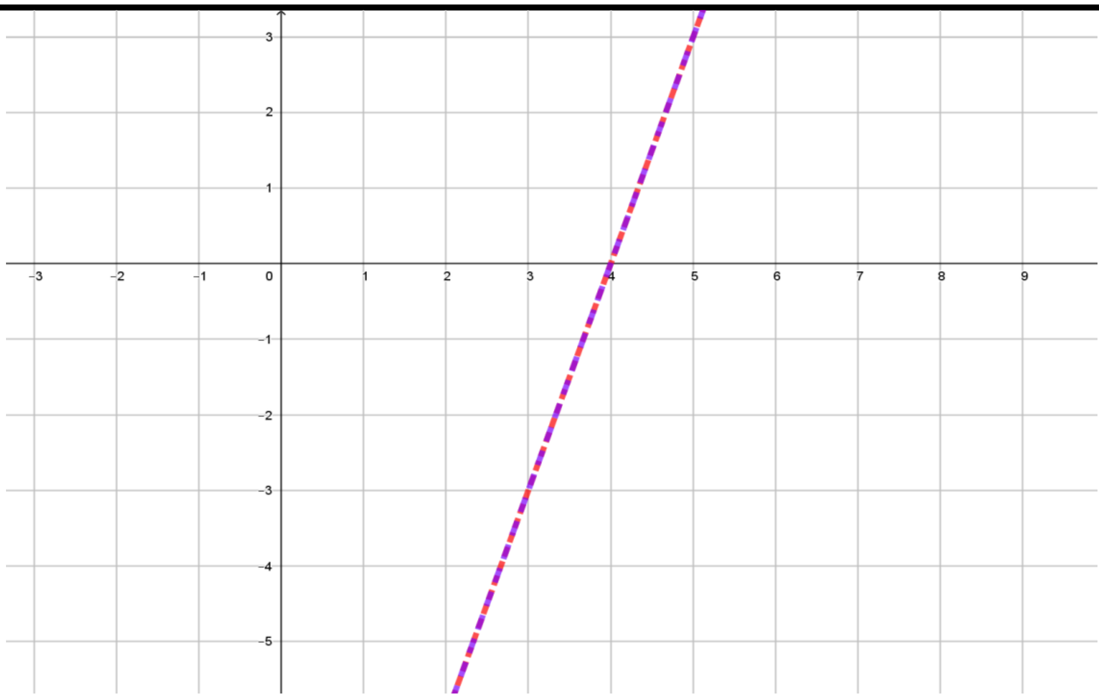
1. Um fabricante de móveis produz cadeiras e mesas de jantar. Cada cadeira leva 08 minutos para ser lixada e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesa de jantar leva 12 minutos para ser lixada e 18 minutos para ser envernizada. A bancada para lixar fica disponível 14 horas por semana e a bancada para envernizar, 18 horas por semana. Quantos móveis de cada tipo podem ser fabricados por semana para que as bancadas sejam plenamente utilizadas? (1,0 ponto)

2. (Adaptado – Unicamp 2010) . Uma confeiteira produz dois tipos de bolos de festa. Cada quilograma do bolo do tipo A consome 350 g de açúcar e 250 g de farinha. Por sua vez, o bolo do tipo B consome 300 g de açúcar e 200 g de farinha para cada quilograma produzido. Sabendo que a confeiteira dispõe de 10 kg de açúcar e 7 kg de farinha, quantos quilogramas de bolo do tipo A e do tipo B ela deve produzir se pretende gastar toda a farinha e o açúcar de que dispõe? (1,0 ponto)

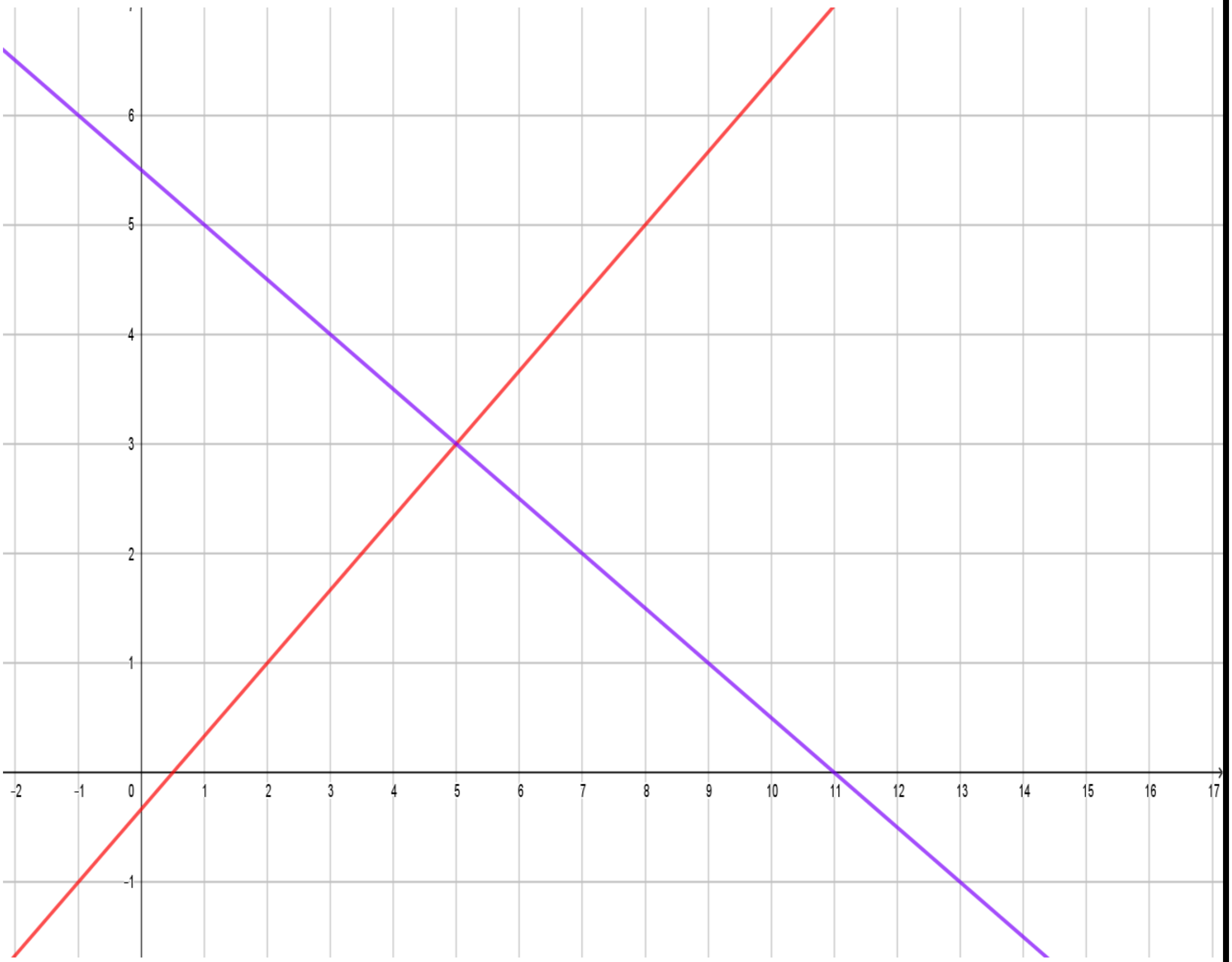
3. Classifique cada um dos sistemas de equações lineares abaixo em: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI) e justifique a classificação proposta. Em seguida encontre o conjunto solução. (0,5 ponto cada).

$$\begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = 8 - 2y \\ x - 2y = y - 3x - 7 \end{cases}$$

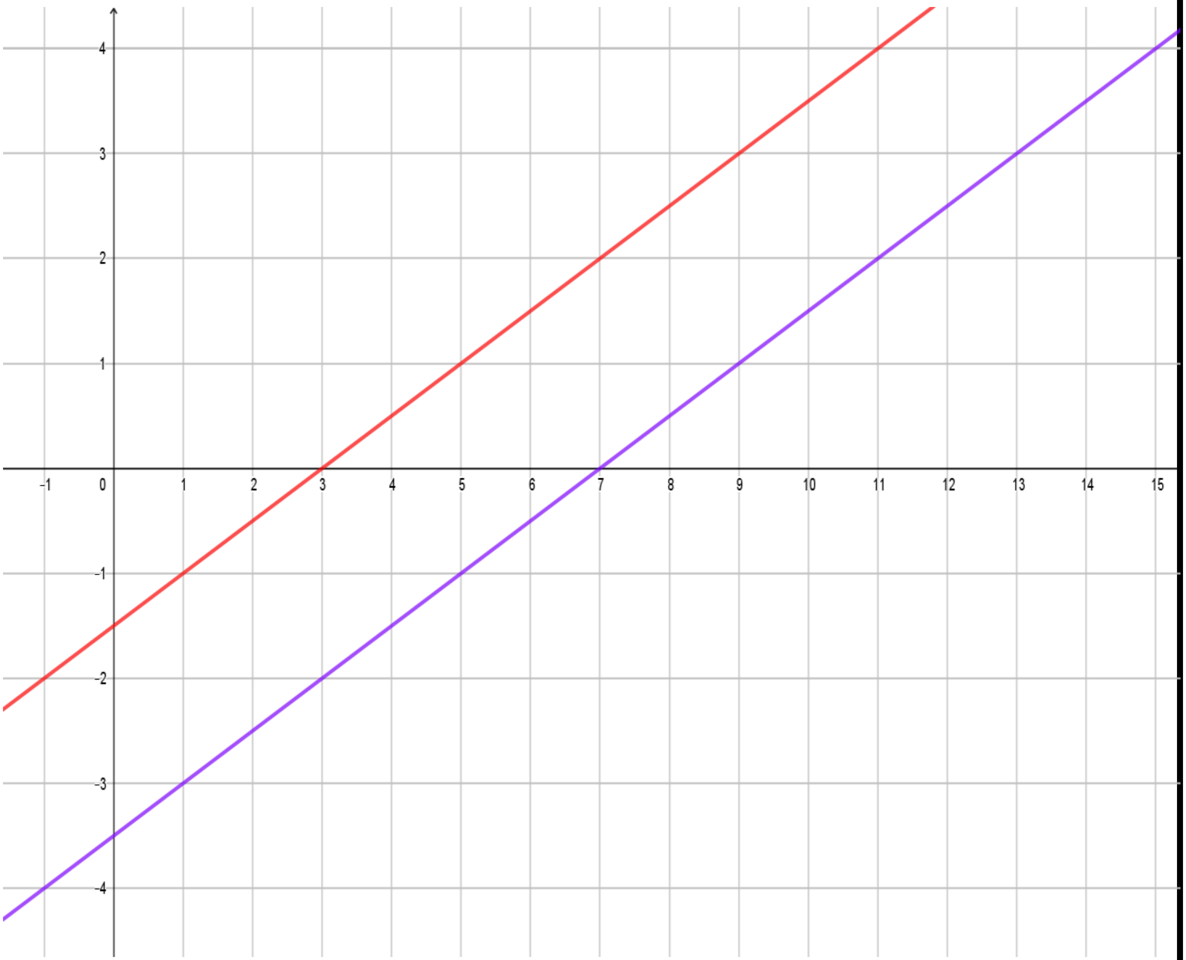


3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
1
2
3
4
5
6
7
8
9



6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17

4. Escreva o sistema linear correspondente ao gráfico abaixo e classifique-o. (1,0 ponto)



Esta avaliação foi realizada individualmente e sem nenhuma consulta a materiais, inclusive o professor não fez nenhuma intervenção de modo a obter dados fidedignos que demonstrem a compreensão e as dificuldades dos estudantes em relação aos sistemas lineares 2 x 2 após a aplicação da primeira parte da sequência didática.

Buscou-se inserir todos os tipos de registros abordados durante a sequência didática: língua materna, algébrico, simbólico, numérico e gráfico e atividades de tratamento, conversão e de articulação entre estes registros de representação.

A primeira questão da avaliação consistia em representar algebricamente um sistema linear representado em língua materna. Sete estudantes fizeram a conversão corretamente, classificaram como um sistema impossível cuja solução é expressa pelo conjunto vazio. Um estudante acertou parcialmente pois escreveu uma solução geral para o sistema, o que se aplicaria se fosse um sistema possível e indeterminado e um estudante resolveu de forma errada.

Na questão dois os estudantes deveriam encontrar o conjunto solução mas para isso deveriam usar apenas o registro gráfico. Uma das possibilidades seria primeiramente converter o registro em língua materna para o algébrico, depois os estudantes descobririam os pontos em que a reta corta os eixos *x* e *y* fazendo $y = 0$ e $x = 0$ respectivamente, obtendo o registro gráfico.

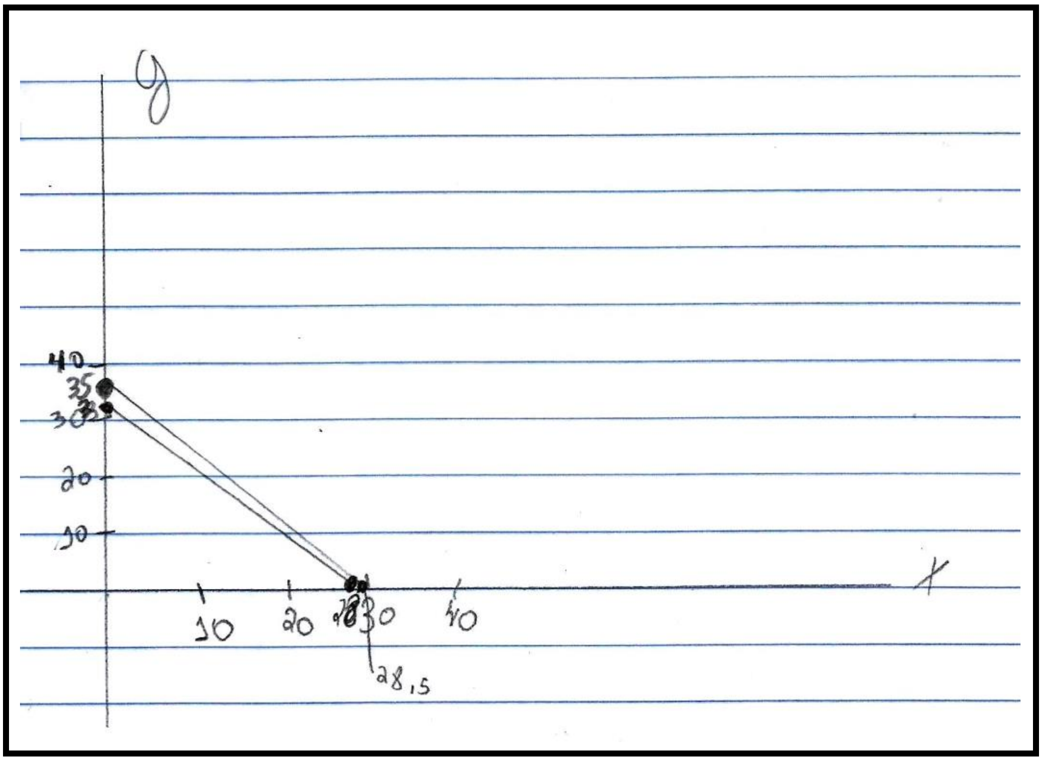
No entanto como apenas esboçaram o gráfico e não tiveram muitos cuidados com a escala numérica, o ponto de intersecção que correspondia a solução do sistema não ficou evidente na maior parte dos registros gráficos, necessitando resolver algebricamente para encontrar o conjunto solução. Seria mais interessante modificar este item e solicitar então que os estudantes representassem graficamente SPI ou SI, ou evidenciar que precisam respeitar a escala nos eixos *x* e *y*, caso contrário, não terão a definição do par ordenado em que as retas se intersectam.

O objetivo da questão 02 não foi atingido mesmo que seis estudantes tenham encontrado a solução, pois a ideia era que os estudantes apenas utilizando o registro gráfico chegassem à solução do sistema. No entanto, todos os estudantes fizeram primeiro o tratamento algébrico e encontraram a solução e apenas registraram por meio de gráfico porque o enunciado solicitou.

Seis estudantes resolveram a atividade encontrando a solução do sistema através do tratamento algébrico e esboçaram corretamente o gráfico. Dois estudantes encontraram corretamente os valores em que cada equação cortava os eixos *x* e *y*, no entanto trocaram um dos valores de *x* e *y* em uma das equações o que culminou em um registro gráfico que supostamente foi considerado de maneira intuitiva pelo estudante como retas paralelas (Figura 24).

Estes estudantes não articularam os registros entre si, pois se o tivessem feito teriam percebido que ao encontrarem uma única solução para o sistema, este seria classificado como SPD. Também deveriam considerar que representação gráfica, nesse caso deveria ser de duas retas concorrentes em que o ponto de intersecção seria a solução do sistema. Um estudante errou toda a resolução.

Figura 24 – Representação gráfica do sistema linear apresentada pelo estudante V



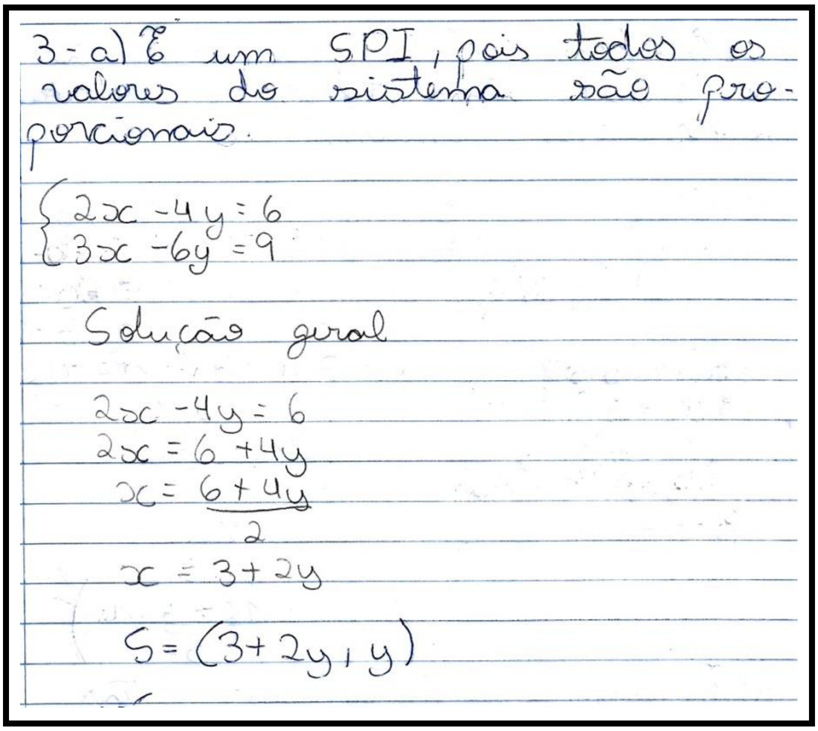
Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Três estudantes tomaram o cuidado de usar os valores encontrados na resolução do sistema para indicar o ponto de intersecção no registro gráfico. Os demais não tiveram essa preocupação.

A questão 03 solicitava que os estudantes classificassem os sistemas lineares e encontrassem o conjunto solução. Dois sistemas lineares estavam representados algebricamente e outros dois na forma gráfica. A intenção foi verificar os tipos de registros mobilizados pelos estudantes ao resolver tais situações e ainda se articulavam os diferentes registros a fim de certificar-se das respostas obtidas.

No primeiro sistema da questão 03 todos os coeficientes eram proporcionais, tratando-se, portanto, de um sistema possível e indeterminado. Não havia a necessidade de fazer o tratamento algébrico, bastava isolar uma das incógnitas para escrever a solução geral. Uma das possíveis dificuldades nesta questão era que a razão $\frac{2}{3}$ entre os coeficientes não era um número inteiro o que poderia levar os estudantes a erroneamente indicar que não há proporcionalidade, pois verificou-se que alguns estudantes somente percebiam a proporcionalidade quando a razão era expressa por um número inteiro. Apenas um estudante escreveu diretamente a solução geral, sem realizar o tratamento algébrico (Figura 25).

Figura 25 – Escrita da solução geral de um SPI pelo estudante T

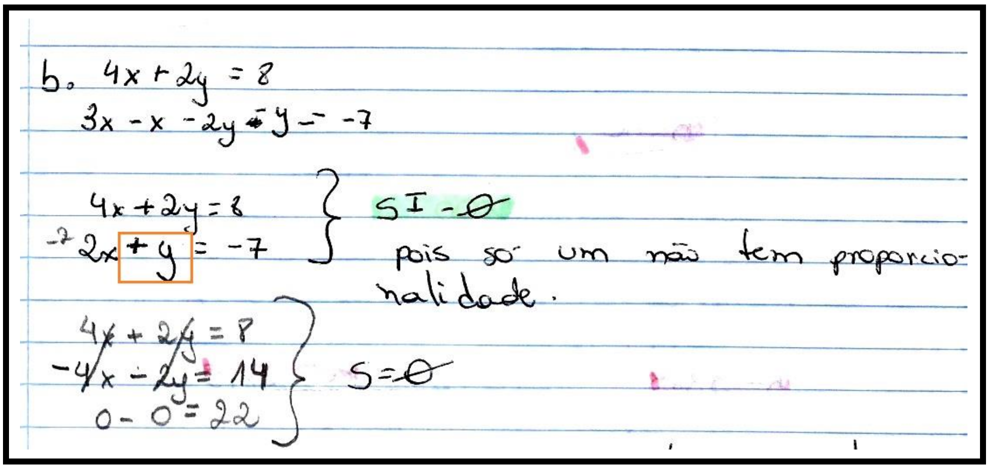


Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Sete estudantes realizaram o tratamento algébrico corretamente, mesmo não sendo necessário e um estudante resolveu de modo errado. Em relação a solução geral sete escreveram de modo adequado, um deixou em branco e um isolou uma das incógnitas mas errou nos cálculos, além de trocar a posição do par ordenado ao escrever a solução.

No segundo sistema linear era necessário organizar primeiramente o sistema. Três estudantes cometeram erros já nessa etapa, ao realizar a manipulação algébrica (Figura 26), os outros seis estudantes manipularam corretamente e realizaram os tratamentos algébricos, chegando a solução como SPD.

Figura 26 - Erros no tratamento algébrico efetuado pelo estudante A



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

O terceiro sistema linear representado no registro gráfico, tratava-se de um SPI, e, portanto, não havia a necessidade de fazer o tratamento algébrico, apenas isolar uma das incógnitas para escrever a solução geral. Mas para isso os estudantes precisavam a partir de dois pontos da reta, encontrar a representação algébrica do sistema linear em questão e oito estudantes lembraram desse procedimento. Não havia necessidade de escrever a segunda equação pois é idêntica a primeira por tratarem-se de retas coincidentes.

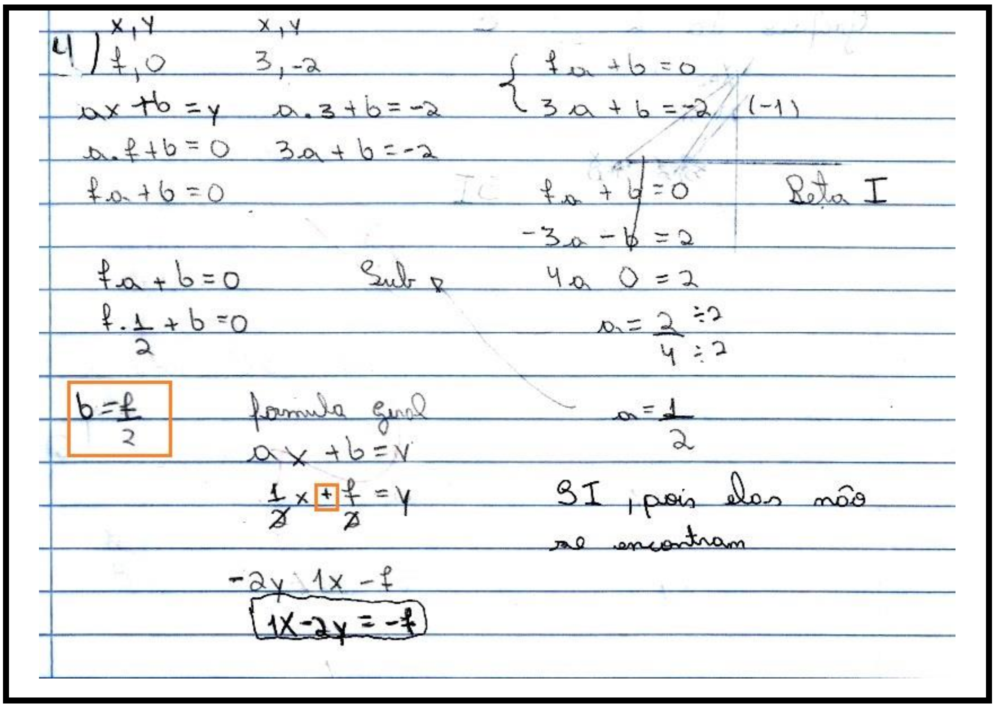
Quatro estudantes realizaram todos os procedimentos de modo correto e cinco apresentaram erros em alguma etapa da resolução. Destes cinco estudantes, três cometeram erros já no processo para encontrar o registro algébrico (equação) referente ao registro gráfico (reta coincidente). Dois estudantes realizaram todos os procedimentos corretos, mas um não escreveu a solução geral e outro a escreveu de modo errado.

No quarto sistema linear também representado graficamente, não havia a necessidade de escrever o sistema linear na forma algébrica pois o enunciado da questão solicitava apenas que os estudantes classificassem e escrevessem a solução. Sete estudantes acertaram essa questão e classificaram diretamente como SPD por tratar-se de retas concorrentes e identificaram o ponto de intersecção como o conjunto solução do sistema. Dois estudantes erraram, sendo que um escreveu as equações e classificou como SI.

A questão 4 consistia em verificar se os estudantes convertem um sistema linear 2 x 2 representado graficamente para o registro algébrico. Apenas dois estudantes converteram corretamente, seis resolveram de modo parcialmente correto e um de modo errado.

Em relação aos estudantes que resolveram de modo parcialmente correto, os erros mais comuns relacionaram-se aos tratamentos algébricos e numéricos (Figura 27).

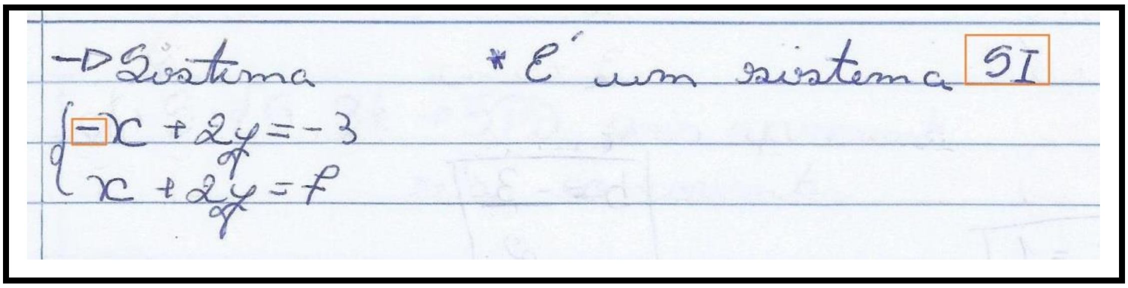
Figura 27 – Resolução da questão 04 da avaliação final pelo estudante J



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Alguns estudantes não compreenderam, por exemplo, que o fato de um número ser positivo ou negativo implica em manter ou não a mesma razão e consequentemente a proporcionalidade (Figura 28).

Figura 28 – Resolução da questão 04 da avaliação final pelo estudante N.



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Ao final da avaliação aplicada aos estudantes constatou-se que um estudante não conseguiu resolver nenhuma das atividades propostas. As dificuldades deste estudante já haviam sido evidenciadas durante a aplicação da sequência didática. Este estudante tem sérias dificuldades de aprendizagem e não domina os conceitos básicos da Matemática.

Os demais estudantes não tiveram dificuldades em efetuar a conversão do registro em língua materna para o registro algébrico, mas pontua-se que as situações propostas eram semelhantes as da sequência didática e dado o caráter particular da língua materna, geralmente não congruente, não há como esgotar as diversas possibilidades em uma única sequência didática.

O objetivo da questão 02 não foi atingido pois os estudantes apoiaram-se no registro algébrico para a resolução e somente usaram o registro gráfico porque havia a indicação no enunciado da questão.

Em relação aos dois primeiros sistemas lineares da questão 03 (representados algebricamente) os estudantes relacionaram de forma adequada os coeficientes com a classificação dos sistemas lineares, inclusive houve uma melhora significativa na escrita da solução geral de sistemas possíveis e indeterminados.

A análise dos dois últimos sistemas da atividade 03 (representados por meio de gráficos) demonstrou que permitem a classificação imediata dos sistemas lineares e em particular nos sistemas impossíveis e possíveis e determinados a solução também é imediata, e somente no caso de sistemas possíveis e indeterminados há a necessidade de mobilizar o registro algébrico.

A análise da questão 04 evidenciou que os estudantes tiveram dificuldades em realizar a conversão do registro gráfico para o algébrico, especialmente em não coordenarem estes registros para compreender que a representação algébrica encontrada não estava correta.

Destaca-se ainda algumas dificuldades nos tratamentos numéricos e algébricos, e por fim observou-se que ao articular os diferentes registros de representação semiótica o estudante possui melhores condições de resolver e classificar corretamente os sistemas lineares.

Com exceção de um estudante, a classe melhorou consideravelmente na compreensão e apreensão conceitual do objeto matemático sistemas lineares 2 x 2, em comparação com as primeiras atividades desenvolvidas na sequência didática.

5.2 SISTEMAS LINEARES 3 x 3

Atividade 01

Um fabricante de móveis produz cadeiras, mesinhas de centro e mesas de jantar. Cada cadeira leva 10 minutos para ser lixada, 6 minutos para ser tingida e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesinha de centro leva 12 minutos para ser lixada, 8 minutos para ser tingida e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesa de jantar leva 15 minutos para ser lixada, 12 minutos para ser tingida e 18 minutos para ser envernizada. A bancada para lixar

fica disponível 16 horas por semana, a bancada para tingir, 11 horas por semana e a bancada para envernizar, 18 horas por semana. Quantos móveis de cada tipo devem ser fabricados por semana para que as bancadas sejam plenamente utilizadas?
Classifique este sistema de acordo com o que você aprendeu sobre classificação dos sistemas lineares 2 x 2. Justifique.

Objetivo: verificar se o estudante faz a conversão do registro em língua materna para o algébrico de um sistema linear 3 x 3 e se faz o tratamento algébrico adequadamente estendendo o uso dos métodos de resolução de sistemas lineares 2 x 2 já estudados para a resolução de sistemas 3 x 3.

A atividade foi realizada individualmente e o professor não fez nenhuma intervenção nesta atividade. Solicitou-se aos estudantes que escrevessem o sistema linear referente a situação apresentada. Após o tempo estipulado, solicitou-se a um estudante que escrevesse o sistema linear no quadro. Isso porque eram dois objetivos diferentes: primeiro, verificar se os estudantes escreviam corretamente o sistema linear e o outro que consistia em resolvê-lo. O estudante poderia escolher o método a ser usado, para que fosse verificado se conseguia transferir o uso dos métodos de resolução para sistemas lineares 3 x 3.

Nesta aula estavam presentes oito estudantes, sendo que seis escreveram corretamente o sistema linear 3 x 3 no registro algébrico a partir do registro em língua materna e dois estudantes não fizeram a conversão.

Após o estudante ter escrito o sistema linear no quadro, foi estipulado mais um tempo para que os estudantes fizessem a resolução. Ao final constatou-se que apenas três estudantes conseguiram estender o uso dos métodos de resolução de sistemas lineares 2 x 2 para os sistemas 3 x 3, os demais não conseguiram nem iniciar a resolução. Verificou-se que os estudantes que acertaram usaram o método da adição para resolver o sistema linear.

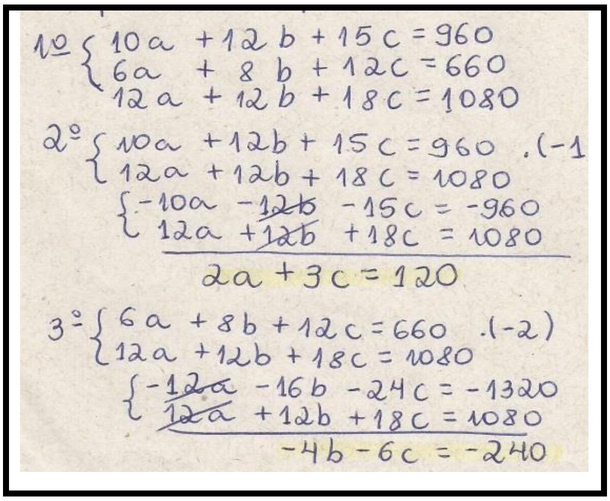
Usando outro exemplo de sistema linear 3 x 3 possível e determinado o professor fez no quadro a explicação de como usar o método da adição na resolução deste tipo de sistema linear. Destacou que dos três métodos usados na resolução de sistemas lineares 2 x 2 apenas o método da adição torna-se prático na resolução de sistemas lineares 3 x 3. Portanto ao abordar os sistemas lineares 3 x 3 não serão usados os métodos da comparação e da substituição.

Na aula seguinte, após estas explicações, o professor entregou novamente a atividade 01 e solicitou que os estudantes resolvessem o sistema linear usando o método da adição como forma de verificar se haviam compreendido como deveriam usá-lo para a resolução de sistemas lineares 3 x 3.

Nesta aula estavam presentes novamente oito estudantes. Dos cinco estudantes que não conseguiram aplicar o método da adição antes da explicação do professor, constatou-se que após a explicação, dois estudantes resolveram de forma correta, um resolveu de modo parcialmente correto pois fez a troca de um algarismo, um estudante fez apenas a primeira parte da resolução de forma correta e outro estudante errou toda a resolução.

Na Figura 29 consta a resolução inicial do estudante C, que inicialmente não eliminou a mesma incógnita em ambos agrupamentos das equações tomadas duas a duas, conforme explicado pelo professor, mas ao verificar o equívoco retomou a resolução e chegou ao conjunto solução.

Figura 29 – Resolução inicial da atividade 01 pelo estudante C



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Esse é um caso de representação em língua materna em que não há letras já disponíveis no enunciado como ocorreu em algumas situações anteriores. A intenção foi verificar então se os estudantes lembrariam de apontar o que cada letra estava representando, por exemplo, x referia-se a quantidade de cadeiras produzidas, mas constatou-se que apenas um estudante fez a relação entre a incógnita e o que ela estava representando.

Em relação a classificação constatou-se que cinco estudantes classificaram corretamente como SPD, e três estudantes não classificaram. No entanto apenas um estudante mencionou que classificou o sistema como possível e determinado, pois não havia proporcionalidade entre os termos das três equações.

Assim o professor reforçou a ideia de que duas equações são proporcionais entre si quando pode ser aplicada a mesma razão nos coeficientes das incógnitas de cada equação em relação a outra e não há necessidade de que essa razão seja dada por um número inteiro.

No caso de SPD ao perceber que os coeficientes das incógnitas não são proporcionais em nenhuma das três situações o estudante nem precisa verificar a proporcionalidade dos termos independentes, pois estes dependem da razão estabelecida (se houver) dos coeficientes das incógnitas para fazer a comparação.

O professor orientou ainda os estudantes a analisarem a proporcionalidade sempre tomando as equações de duas em duas: a 1ª equação com a 2ª, a 1ª com a 3ª e a 2ª com a 3ª equação, ou seja, nos sistemas lineares 3 x 3 esse resultado nem sempre é tão imediato como ocorria nos sistemas lineares 2 x 2.

Atividade 02

Resolva os problemas usando o método da adição.

(Adaptada- UFPE 2011). Uma fábrica de automóveis utiliza três tipos de aço A_1, A_2 e A_3 na construção de três tipos de carros, C_1, C_2 e C_3. A quantidade dos três tipos de aço, em toneladas, usados na confecção dos três tipos de carro, está no quadro a seguir:

	C_1	C_2	C_3
A_1	3	3	6
A_2	1	1	2
A_3	2	1	1

Se foram utilizados 33 toneladas de aço do tipo A_1, 11 toneladas do tipo A_2 e 12 toneladas do tipo A_3, qual o total de carros construídos de cada um dos tipos C_1,C_2 e C_3?

a) Existe uma única possibilidade de solução para esta situação?
b) Como você classificaria este sistema? Justifique
c) E em relação a proporcionalidade das equações o que você observou? Observação: para analisar a proporcionalidade faça a comparação tomando as equações duas a duas, ou seja: compare 1 e 2, depois 1 e 3 e por fim as equações 2 e 3.

2. (Unicamp 2010 – adaptado) Uma confeitaria produz três tipos de bolos de festa. Cada quilograma do bolo do tipo A consome 0,4 kg de açúcar, 0,2 kg de farinha e 0,2 kg de achocolatado em pó. Por sua vez o bolo do tipo B consome 0,2 kg de açúcar, 0,3 kg de farinha e 0,1 kg de achocolatado em pó. Por fim o bolo do tipo C consome 0,2 kg de açúcar, 0,1 kg de farinha e 0,1 kg de achocolatado em pó para cada quilograma produzido. Sabendo que, no momento, a confeitaria dispõe de 10 kg de açúcar, 6 kg de farinha e 3 kg de achocolatado em pó. Quantos quilogramas de cada tipo de bolo é possível produzir se a *confeitaria pretende gastar exatamente todo o açúcar, a farinha e o achocolatado de que dispõe?*

a) Como você classificaria este sistema? Justifique
b) E em relação a proporcionalidade das equações o que você observou? Observação: para analisar a proporcionalidade faça a comparação tomando as equações duas a duas, ou seja: compare 1 e 2, depois 1 e 3 e por fim as equações 2 e 3.

Objetivo: verificar se o estudante faz a conversão do registro tabular para o algébrico (primeira situação) e em língua materna para o registro algébrico (segunda situação), se faz os tratamentos adequados ao usar o método da adição e ainda se classifica corretamente o sistema linear a partir da solução obtida e também através da relação entre a proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas.

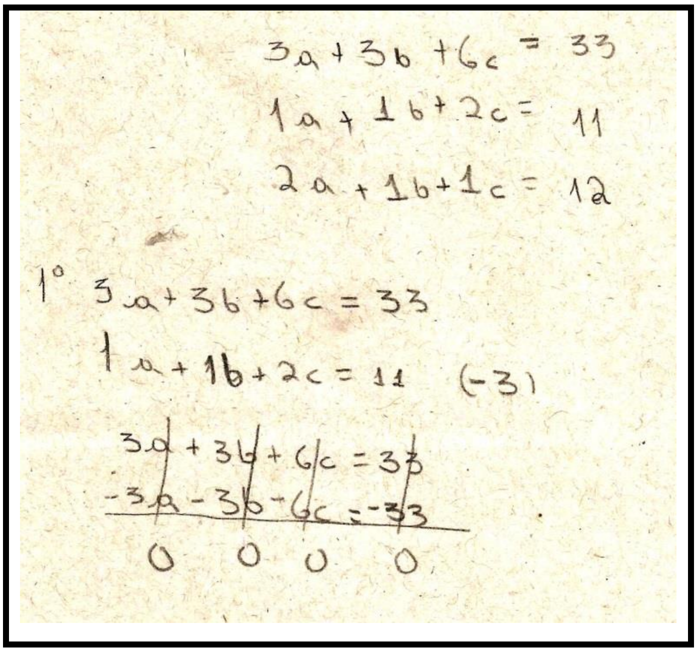
Neste dia estavam presentes oito estudantes e foram organizadas quatro duplas. Na primeira situação tem-se um sistema possível e indeterminado, por isso há várias soluções possíveis. Duas equações mantém proporcionalidade tanto nas incógnitas quanto nos termos independentes. E a terceira equação não mantém nenhuma proporcionalidade com as outras duas. Esse também é um dos casos possíveis em que temos SPI nos sistemas 3 x 3, dentre três situações possíveis que foram apresentadas posteriormente aos estudantes, diferentemente do que ocorria nos sistemas lineares 2 x 2 em que havia uma única possibilidade.

Constatou-se que todas as duplas escreveram o sistema linear de modo correto, ou seja, converteram o registro tabular para o algébrico. Verificou-se certa facilidade em realizar esse processo, possivelmente por ter os dados já organizados. Esse caso especifico, trata-se de uma conversão congruente conforme apontado por Duval.

Além disso, todas usaram corretamente o método da adição, resolveram as duas primeiras equações obtendo como resultado $0x + 0y + 0z = 0$, e identificaram nesse caso que tratava-se de um sistema possível e indeterminado pois havia proporcionalidade entre as duas equações tanto nos coeficientes das incógnitas quanto nos termos independentes (Figura 30).

No entanto, nenhum dos grupos deu continuidade a resolução do sistema e ignorando a presença da terceira equação o classificaram como SPI. Ressalta-se que se essa equação representasse um plano paralelo aos outros dois a classificação deste sistema seria como impossível e por isso foram orientados a sempre finalizar a resolução.

Figura 30 – Resolução do item 01 da atividade 02 pelo estudante J



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Nesse momento ainda não foi solicitado aos estudantes que escrevessem a solução geral de um sistema possível e indeterminado 3 x 3 pois havia a necessidade de explicação do professor e esse não era o objetivo desta atividade, evitando sobrecarregar os estudantes com muitas informações novas numa mesma situação.

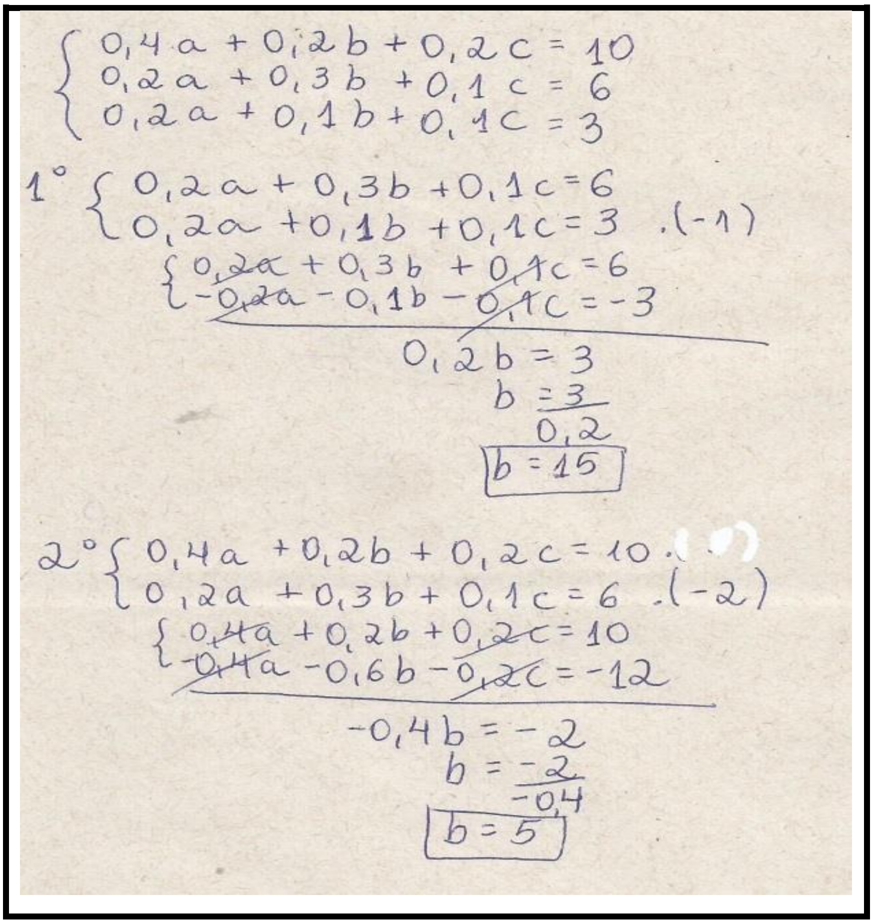
Ao analisar todas as equações tomadas duas a duas, todas as duplas responderam corretamente que nas equações 1 e 2 há proporcionalidade tanto nos coeficientes das incógnitas quanto nos termos independentes, nas equações 1 e 3 não há proporcionalidade e nas equações 2 e 3 também não há proporcionalidade.

Já na segunda situação tem-se um sistema impossível. Isso ocorre porque há proporcionalidade entre duas equações nos coeficientes das incógnitas e não nos termos independentes e a terceira equação não mantém proporcionalidade com as outras duas.

O estudante perceberá nas próximas atividades que essa é apenas uma das possibilidades de um sistema ser impossível, pois quando se trabalha com sistemas lineares 3 x 3, há quatro possibilidades de ser classificado como impossível.

Todas as duplas escreveram corretamente o sistema linear, ou seja, converteram o registro em língua materna para o registro algébrico. Pela primeira vez, nessa sequência, os estudantes tiveram contato com números racionais representados na forma decimal. Em relação ao uso do método da adição três duplas chegaram ao resultado $0x + 0y + 0z = 4$, e uma dupla obteve os valores que podem ser verificados na Figura 31, pois ao compor as equações tanto no primeiro passo quanto no segundo, usou as equações que não eram proporcionais entre si, no entanto resolveu corretamente.

Figura 31 – Resolução do segundo sistema da atividade 02 pelo estudante C



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Ao observarem o resultado obtido (Figura 31) os estudantes que faziam parte da dupla não sabiam como proceder e nem mesmo como classificar o sistema. O professor questionou se em uma equação linear uma incógnita pode assumir mais de um valor e os mesmos responderam que não e assim compreenderam tratar-se de SI.

Todas as duplas classificaram corretamente o sistema, mas nem todas apresentaram justificativas válidas. Em relação a proporcionalidade das equações tomadas duas a duas, obteve-se o seguinte resultado: apenas uma dupla fez a comparação de forma adequada, duas erraram apenas uma das comparações e uma dupla fez a comparação de forma equivocada.

Acredita-se que a partir do momento que os estudantes tiverem acesso ao registro gráfico referente a estes sistemas eles terão mais facilidade para classificar, pois conforme descrito por Duval s mobilização de diferentes registros é necessária à compreensão.

Atividade 03

Parte 1
Resolva usando a Regra de Cramer

(PAIVA) Um ourives cobrou R$ 150,00 para cunhar medalhas de ouro com 3 g cada uma; de prata, com 5 g cada uma; e de bronze, com 7 g cada uma, ao preço unitário de R$ 30,00, R$ 10,00 e R$ 5,00, respectivamente. Sabendo que foram confeccionadas 15 medalhas, com massa total de 87 g, determine o número de medalhas de ouro confeccionadas?

Parte 2
Agora , resolva as duas situações anteriores (atividade 01 e 02) usando a Regra de Cramer e verifique o que ocorre nos resultados. Qual o valor do determinante que você encontrou em ambos os casos? O que isso significa?

Parte 3
Resolva o sistema abaixo usando a Regra de Cramer e responda as questões:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ x+y+z=-10 \\ x+y+z=20 \end{cases}$$

a) *O que você observou em relação a proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas nas três equações?*
b) *Isso se aplica também aos termos independentes?*
c) *Classifique este sistema a partir da proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas e dos termos independentes.*
d) *Que valores você obteve para x, y e z?*
e) *Como você classificaria este sistema a partir do uso da Regra de Cramer?*
f) *Essa regra pode ser usada nos casos em que o determinante dos coeficientes das incógnitas é igual a zero? Por quê?*

Objetivo: verificar se o estudante converte corretamente o sistema de equações do registro em língua materna para o algébrico e se resolve corretamente sistemas lineares 3 x 3 usando a Regra de Cramer (parte 01 e 02). Identificar se o estudante constata as limitações da Regra de Cramer para classificar sistemas impossíveis e sistemas possíveis e indeterminados (parte 03).

Parte 1 - Inicialmente o professor apresentou aos estudantes a Regra de Cramer como um método a ser usado na resolução de sistemas lineares 3 x 3 e também no sistemas 2 x 2, no entanto ressaltou que aplica-se somente a matrizes quadradas. Neste momento o professor ainda não comentou a limitação do uso da Regra de Cramer para SPI e SI, pois foi organizada uma atividade justamente para os estudantes compreenderem tal limitação (parte 03).

Fez a explanação referente ao uso da Regra de Cramer no quadro e ao final solicitou que os estudantes anotassem no caderno para que pudessem consultar quando necessário.

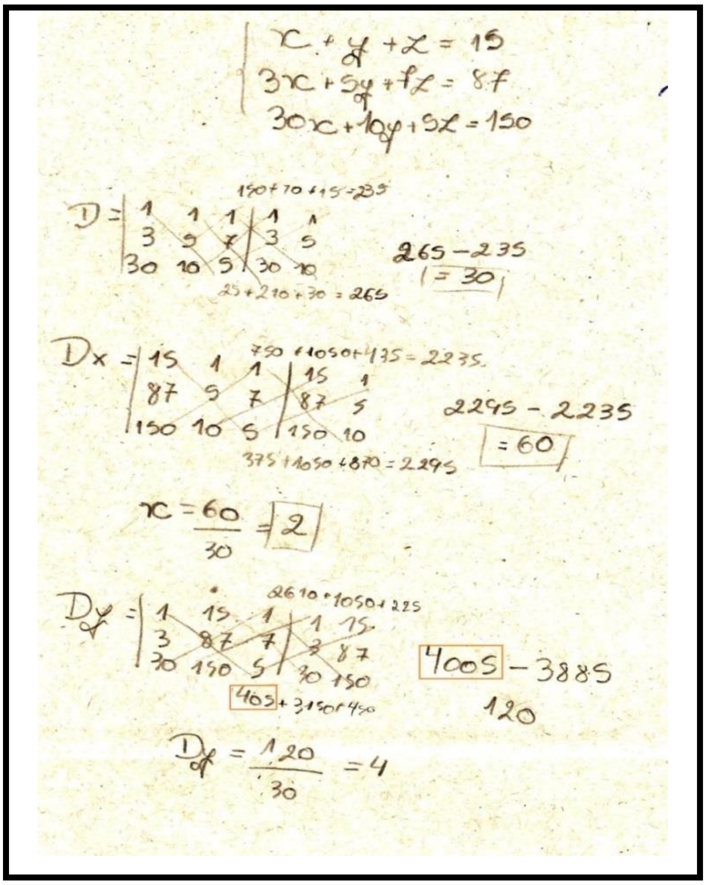
Na sequência, em duplas, os estudantes deveriam ler a situação referente as medalhas e escrever o sistema linear no registro algébrico. O professor precisou auxiliar alguns estudantes pois tiveram dificuldades em escrever a equação $x + y + z = 15$, pois estes valores (exceto o 15) não estavam explícitos na situação apresentada.

Notou-se que duas duplas escreveram a relação entre as incógnitas e o que elas representavam conforme já havia sido orientado pelo professor em aulas anteriores. Usaram x para designar a quantidade de medalhas de ouro, y para as medalhas de prata e z para as de bronze. As demais duplas não fizeram essa relação inicial.

Apenas uma dupla não conseguiu encontrar a quantidade de medalhas de ouro conforme proposto, sendo que essa dupla usou de modo correto a Regra de Cramer mas errou ao realizar operações matemáticas elementares (Figura 32).

Não havia necessidade de calcular determinantes para y e z, no entanto duas duplas realizaram todos os cálculos alegando que queriam ter certeza de que os resultados encontrados estavam corretos.

Figura 32 – Uso da Regra de Cramer pelo estudante S



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

Parte 2 – Na sequência foi solicitado aos estudantes que resolvessem novamente duas situações que já haviam sido resolvidas pelo método da adição, mas agora usando a Regra de Cramer: a primeira trata-se de um sistema possível e indeterminado e a segunda de um sistema impossível. Nesse sentido os estudantes já conheciam a classificação do sistema e deveriam observar o comportamento que a resolução apresentaria ao usarem a Regra de Cramer.

Um estudante usou o método da adição, não notou inicialmente que foi solicitado o uso da Regra de Cramer e foi orientado pelo professor a ler o enunciado da questão.

Outro estudante questionou se precisavam calcular os valores de todas as incógnitas (*x, y e z)* se já percebessem que todos os resultados seriam zero. O professor afirmou que deveriam calcular todas as incógnitas pois esse é o primeiro exemplo desse tipo que estavam trabalhando.

Algumas calculadoras apresentaram no visor o valor $4 \cdot 10^{-3}$ para 0,004 e os estudantes não souberam interpretar este resultado e o professor fez a explicação no quadro.

Após a resolução do primeiro sistema os estudantes verificaram que todos os determinantes calculados resultaram no valor zero. Assim, sabendo que tratava-se de um SPI obtiveram a seguinte relação: se o determinante principal for zero e todos os demais determinantes das incógnitas também forem iguais a zero tem-se um sistema possível e indeterminado.

No segundo sistema encontraram o valor zero para o determinante principal e para os determinantes dos coeficientes das incógnitas encontraram valores diferentes de zero. Nesse caso constataram que tratava-se de um sistema impossível pois não é possível efetuar a divisão por zero.

Ao final puderam constatar ainda que ao calcular o determinante principal há duas possibilidades: 1º) se o determinante principal for diferente de zero, o sistema será possível e determinado e 2º) se o determinante for igual a zero o sistema será possível e indeterminado ou será impossível.

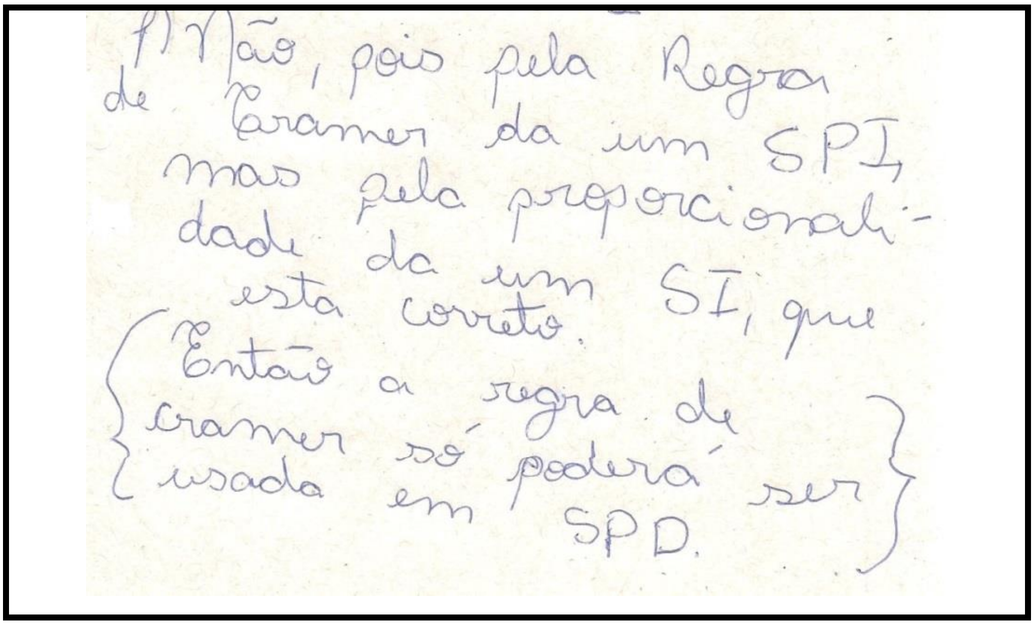
Parte 3 – Todos os estudantes resolveram corretamente o sistema linear por meio da Regra de Cramer e chegaram a conclusão de que tratava-se de um SPI. No entanto ao responderem as questões referentes a proporcionalidade, todos verificaram tratar-se de um SI. Portanto, identificaram que a Regra de Cramer não é um método seguro para classificar sistemas possíveis e indeterminados e sistemas impossíveis, pois apresenta falhas. Foram orientados a usá-la somente em sistemas possíveis e determinados.

No entanto quando indagados quanto aos valores de x, y e z, os estudantes não compreenderam que não existe valor para estas incógnitas pois o sistema é impossível, conforme já puderam constatar em uma atividade anterior. Sete estudantes responderam que todas estas incógnitas teriam valor zero, desse modo não lembraram que o fato de um sistema ter um único valor para cada uma das incógnitas equivale a classificá-lo como um sistema possível e determinado. Apenas um estudante escreveu que x, y e z equivalem a $\frac{0}{0}$, o que pressupõe tratar-se de uma indeterminação.

Acredita-se que a maioria dos estudantes considerou como resposta o valor zero devido as valores apresentados no cálculo dos determinantes, no qual todos os valores encontrados foram zero; no entanto, já haviam resolvido uma situação semelhante anteriormente, mas possivelmente não haviam compreendido a relação entre $\frac{0}{0}$ e a indeterminação de um sistema linear ao usar a Regra de Cramer.

A classificação do sistema linear a partir da Regra de Cramer foi realizada corretamente por sete estudantes. E em relação a resposta ao item f "*Essa regra pode ser usada nos casos em que o determinante dos coeficientes das incógnitas é igual a zero? Por quê?*" os estudantes tiveram dificuldades em escrever argumentos consistentes com boas justificativas. Pontua-se que os estudantes escrevem e justificam pouco nas aulas de Matemática e isso precisa ser revisto, pois os estudantes apresentam dificuldades em justificar os procedimentos adotados e os resultados encontrados (Figura 33).

Figura 33 - Resposta do item (f) da atividade 3 pelo estudante T



Fonte: acervo do pesquisador (2017)

O professor ressaltou, portanto, que o uso da Regra de Cramer para sistemas impossíveis e sistemas possíveis e indeterminados apresenta falhas quanto a classificação do sistema, por isso não deve ser utilizada. Por isso em momento posterior aprenderão a usar outro método de resolução, que assim como o método da adição não apresenta limitações e falhas.

Ao final, observando que ainda não havia ficado totalmente compreensível para os estudantes os resultados da resolução de sistemas impossíveis e possíveis e indeterminados por meio da Regra de Cramer, o professor solicitou que os estudantes pesquisassem em casa sobre os resultados e as diferenças entre um número real qualquer dividido por zero e zero dividido por zero e isso foi discutido no início da próxima aula.

Apenas dois estudantes pesquisaram e informaram que no caso de zero dividido por zero temos uma indeterminação por isso o sistema é classificado como possível e indeterminado. Isso significa que $\frac{0}{0}$ não tem como resultado zero. No caso de um número real qualquer dividido por zero trata-se de algo considerado impossível, por isso o sistema é classificado como impossível. Todos os estudantes afirmaram que haviam compreendido a diferença após esta explicação, e ainda que esta classificação apresenta falhas e deverá ser usada apenas para sistemas possíveis e determinados.

Atividade 04

Usando o GeoGebra faça a representação gráfica referente a cada sistema de equações e de acordo com os resultados apresentados organize-os em três grupos: sistemas possíveis e indeterminados (SPI) e sistemas impossíveis (SI) e sistemas possíveis e determinados (SPD):

a)

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-4z=4 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=3 \\ 4x+4y-4z=7 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-4z=7 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} 2x+2y-2z=3 \\ x+y-z=1 \\ 4x+4y-z=4 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} 4x+4y-z=4 \\ 2x+2y-2z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x+3y+4z=5 \\ 4x+7y-z=13 \end{cases}$$

SISTEMA POSSÍVEL E INDETERMINADO

Sistema	*Proporcionalidade nos coeficientes e no termo independente.*	*Posição relativa entre os planos*	*Representação gráfica*

SISTEMA IMPOSSÍVEL

Sistema	*Proporcionalidade nos coeficientes e no termo independente.*	*Posição relativa entre os planos*	*Representação gráfica*
		.	

SISTEMA POSSÍVEL E DETERMINADO

Sistema	*Proporcionalidade nos coeficientes e no termo independente.*	*Posição relativa entre os planos*	*Representação gráfica*
		.	

Após preencher o quadro responda:

a) *Nos sistemas lineares 3 x 3 é possível estabelecer um único critério para todos os sistemas que fazem parte do grupo SPI? Justifique.*
b) *E em relação ao grupo SI? Justifique.*

Objetivo: observar se o estudante relaciona a representação gráfica das diferentes posições relativas entre os planos com a classificação dos sistemas lineares e com os casos de proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas e dos termos independentes.

Dada a dificuldade em representar gráficos de sistemas lineares 3 x 3 de forma manual, contou-se novamente com o apoio do *software* GeoGebra e destaca-se a importância de atividades envolvendo tratamentos em registros multifuncionais, pois “existem tratamentos que não se reduzem a algoritmos (os tratamentos puramente figurais ou visuais, como figuras geométricas, gráficos e esquemas). Tais tratamentos não são geralmente, objetos de aprendizagem por serem considerados de segunda importância" (ALMOLOUD, 2007, p. 74), no entanto do ponto de vista cognitivo são igualmente importantes.

Nos sistemas lineares 2 x 2 o professor apresentou inicialmente a representação algébrica dos sistemas lineares e depois a representação gráfica. Ao final propôs atividades que solicitavam a articulação entre os diferentes registros. Em relação aos sistemas lineares 3 x 3 optou-se em abordar primeiramente o registro gráfico referente as oito possibilidades de classificação de um sistema linear de acordo com a posição relativa entre os planos. Acredita-se que isso facilitará os tratamentos algébricos, pois o estudante já perceberá a relação entre a proporcionalidade e a classificação dos planos em: coincidentes, paralelos e concorrentes, o que Duval denomina de coordenação de registros.

> A organização de situações de aprendizagem centradas sobre a coordenação de registros requer então que tenhamos provavelmente identificadas todas as variações cognitivamente pertinentes de uma representação num registro, de forma que uma exploração conforme 'o método consistindo em fazer variar um só fator de cada vez, os outros sendo todos mantidos imutáveis' possa ser colocada em prática pelos alunos (DUVAL, 2009, p. 102-103).

A ideia foi trabalhar inicialmente nesta atividade apenas seis situações em que a observação da proporcionalidade já possibilita classificar os sistemas. Os dois casos em que não se aplica a proporcionalidade foram abordados na atividade seguinte pois trata-se de combinação linear entre duas equações para obter a terceira equação. No entanto as duas atividades foram realizadas na mesma aula por terem o mesmo objetivo.

Pontua-se que no Ensino Médio não é usado o termo combinação linear por isso optou-se em trabalhar separadamente estes dois casos em uma atividade específica. No entanto, ao final da abordagem das oito possibilidades, o professor mostrou aos estudantes que sete casos estudados (exceto SPD) constituem casos de combinação linear que pode ou não se estender ao termo independente. Destes sete casos, cinco apresentam proporcionalidade pelo menos em duas equações que pode ou não se estender aos termos independentes (por isso foram abordados na atividade 04 juntamente com SPD) e dois não apresentam proporcionalidade e foram abordados na atividade 05.

Considerou-se importante trabalhar concomitantemente a relação entre a proporcionalidade e as posições relativas dos planos, pois em algumas situações a representação gráfica pode gerar dúvidas, pois a visualização não evidencia se os planos por exemplo tem uma reta em comum ou um ponto. Essa dúvida pode ser sanada com o uso da proporcionalidade entre as equações mobilizando, portanto diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático e ainda com alguns recursos disponíveis no GeoGebra.

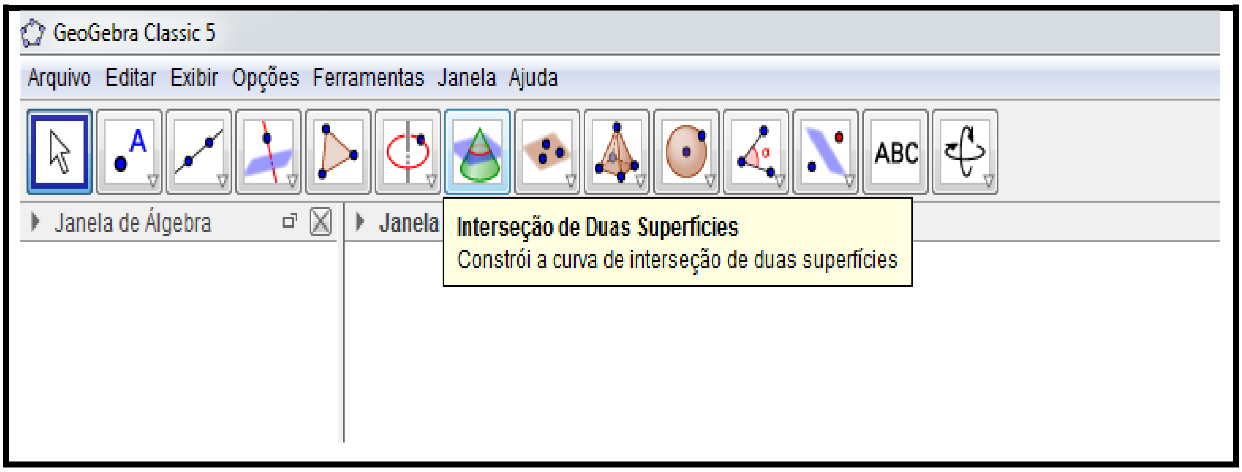
Novamente houve dificuldade em usar o laboratório de Informática, pois este não está disponível justamente no dia da semana em que a turma tinha duas aulas de Matemática. Portanto as atividades foram realizadas na própria sala de aula com notebooks. Como nem todos os estudantes possuem notebook, a atividade foi realizada de maneira individual pelos estudantes J, K e M e em duplas: A e T, C e N e S e V.

O professor novamente usou o projetor multimídia e mostrou aos estudantes como deveriam proceder para representar por meio do registro gráfico sistemas lineares 3 x 3. O caminho é semelhante ao realizado com sistemas lineares 2 x 2, no entanto agora há a necessidade de ativar o plano 3D para representar planos no espaço.

Nessa etapa o professor apresentou aos estudantes mais duas funcionalidades do GeoGebra: os ícones "intersecção de duas superfícies" e "intersecção de dois objetos", que devem ser usados quando o estudante tiver dúvidas em relação a intersecção entre os planos: por exemplo, não ficar visualmente nítido se os planos possuem um ponto ou uma reta em comum.

Explicou como proceder: clicar no ícone "intersecção de duas superfícies" e depois clicar nos planos dois a dois. Na janela de álgebra aparecerá a reta correspondente. Ao final serão obtidas três retas referentes a intersecção entre os planos 1 e 2, 1 e 3 e 2 e 3 (Figura 34).

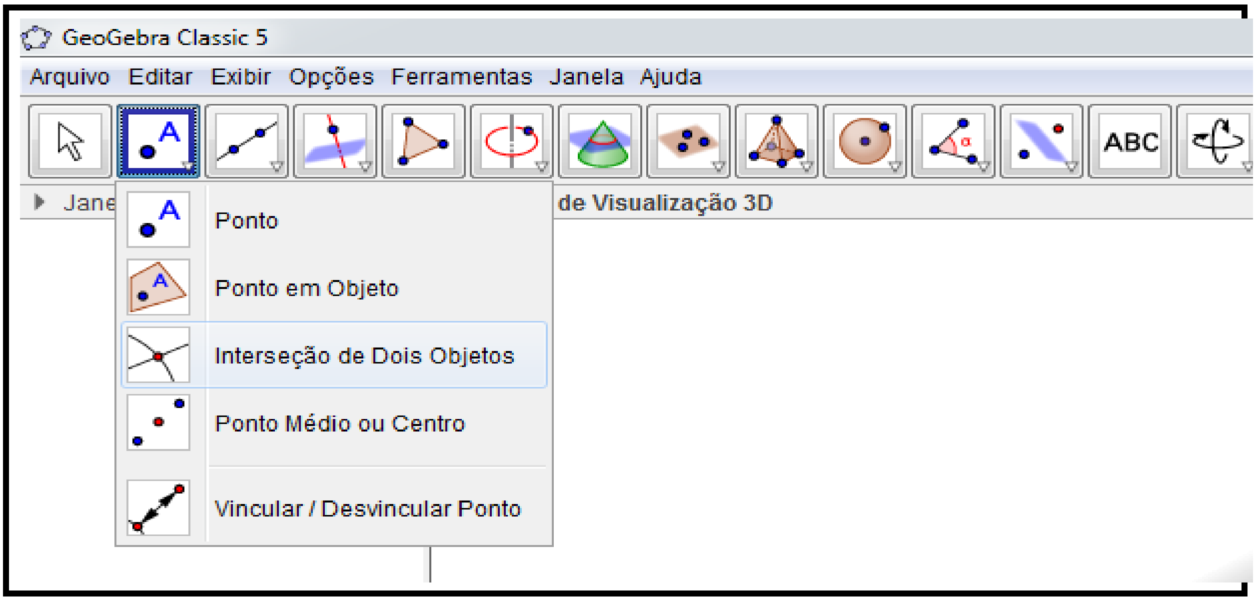
Figura 34 – Visualização do ícone "intersecção de duas superfícies"



Fonte: dados do autor

Feito isso o próximo passo é clicar no ícone "intersecção de dois objetos" (Figura 35). Novamente deve-se clicar nesse ícone e nas retas tomando-as duas a duas para verificar o resultado que será obtido. Se constar a mesma terna ordenada trata-se de um sistema possível e determinado e se apresentar apenas um ponto de interrogação tem-se um sistema impossível ou possível e indeterminado.

Figura 35 – Visualização do ícone "intersecção de dois objetos".



Fonte: dados do autor

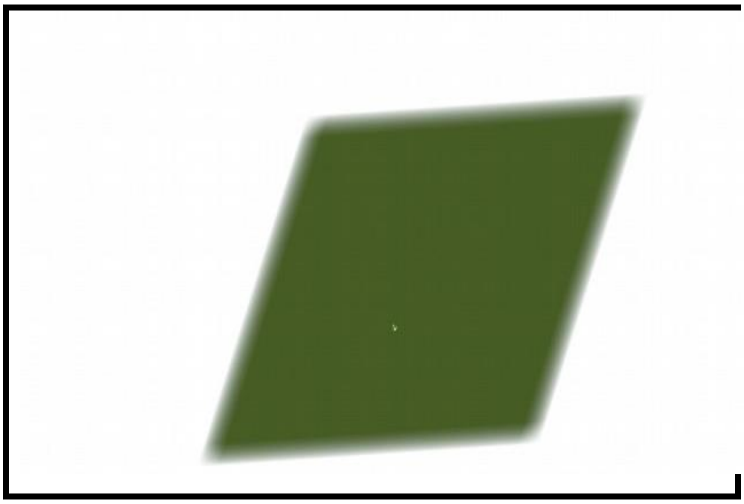
Para classificar o sistema corretamente o estudante pode retornar as equações da reta formadas ao clicar em intersecção entre duas superfícies e deverá observar que no sistema impossível as equações são distintas, já no sistema possível e indeterminado duas das equações serão iguais.

Os resultados referentes a aplicação dessa atividade foram organizadas separadamente por cada um dos sistemas lineares e estão descritos a seguir.

Primeiro sistema: todos os estudantes classificaram corretamente o sistema como possível e indeterminado a partir da visualização gráfica obtida no GeoGebra de três planos coincidentes e também da relação de proporcionalidade estabelecida corretamente por todos. Apenas o estudante M classificou a posição relativa entre os planos como "concorrentes", possivelmente por ainda não ter se apropriado das definições.

No entanto, destaca-se que nenhum estudante teve o cuidado em usar alguns artifícios explicados pelo professor. Nesse caso especificamente os estudantes deveriam usar cores diferentes para representar os três planos e ainda fazê-los de forma pontilhada para ficar visível que houve a sobreposição de três planos. Nenhum estudante procedeu dessa maneira e com a representação realizada teve- se a impressão de tratar-se de um único plano (Figura 36).

Figura 36 – Representação gráfica de três planos coincidentes pelos estudantes C e N



Fonte: dados do autor (2017)

Segundo sistema: todos os estudantes classificaram corretamente o sistema como impossível, a partir da constatação de tratar-se de três planos paralelos em que há proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas das três equações mas essa proporcionalidade não se estende aos termos independentes.

Terceiro sistema: todos os estudantes classificaram corretamente o sistema como impossível relacionando isso ao fato do registro gráfico apresentar dois planos coincidentes e um plano paralelo a estes. Em relação a justificativa quanto a proporcionalidade a dupla S e V explicou de forma incompleta "todos os coeficientes são proporcionais menos o termo independente", não evidenciando que isso ocorria somente na terceira equação. Novamente o estudante M usou o termo "planos concorrentes" para se referir a planos coincidentes. Por fim destaca-se que novamente os estudantes não tiveram preocupação em obter uma representação gráfica adequada dos planos coincidentes.

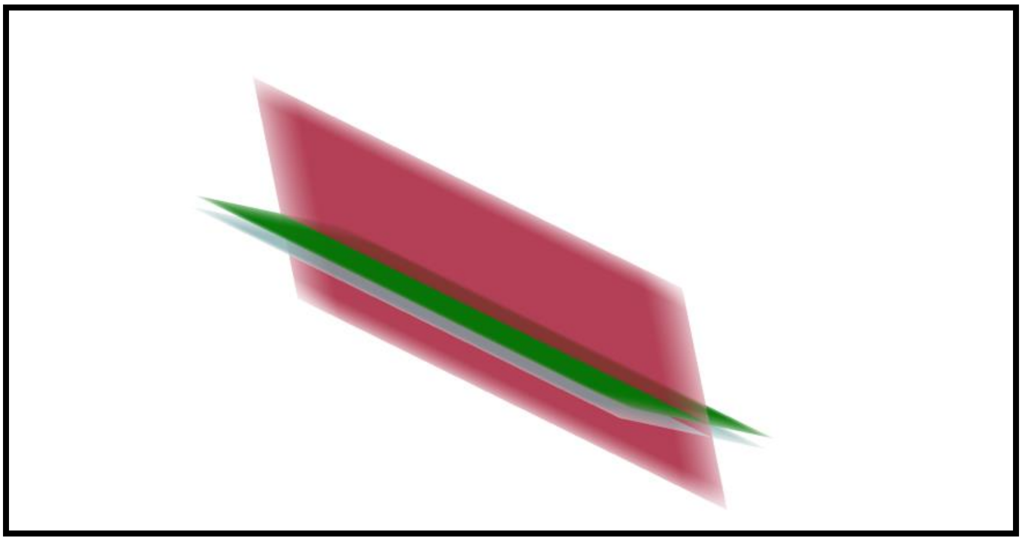
Quarto sistema: todos os estudantes classificaram corretamente como sistema impossível e atribuíram isso ao fato de obterem dois planos paralelos intersectados por um terceiro plano, ou seja, não havia nenhum ponto em comum entre os três planos.

No entanto nem todos os estudantes articularam corretamente os registros pois não consideraram estes aspectos ao escrever a justificativa relacionada a proporcionalidade. Dois estudantes e uma dupla justificaram de forma adequada. Uma dupla escreveu de forma incompleta "dois planos paralelos e um corta um dos planos", quando o correto seria informar que o plano intersecta os outros dois planos.

Uma dupla e um estudante ainda afirmaram que havia proporcionalidade apenas nos coeficientes das incógnitas e não nos termos independentes. Ao serem questionados pelo professor explicaram que não haviam percebido que na terceira equação apenas a incógnita *z* não era proporcional, e como *x* e *y* mantinham proporcionalidade com as outras duas equações deram essa resposta. No entanto não articularam devidamente os registros, pois a justificativa dada correspondia a três planos paralelos que não correspondia o que estava representado no gráfico.

Novamente alguns estudantes não se preocuparam com a visualização adequada dos registros gráficos. Dentre as orientações do professor, destacou que deveriam girar os gráficos e/ ou aplicarem o *zoom* até obterem uma imagem adequada. A Figura 37 mostra, no entanto, ser difícil perceber que há dois planos paralelos, pois ficaram muito próximos.

Figura 37 – Representação gráfica de dois planos paralelos intersectados por outro plano pelo estudante K



Fonte: dados do autor (2017)

Quinto sistema: nesse caso havia o registro gráfico de dois planos coincidentes intersectados por outro plano, o que implicou em que os três planos tinham uma reta em comum e consequentemente tratava-se de um sistema possível e indeterminado.

Uma dupla compreendeu que os três planos tinham um único ponto em comum, e apesar de ter feito todas as demais relações entre os registros de forma adequada não perceberam o equívoco, classificando como SPD. Possivelmente a visualização tenha sido um obstáculo, no entanto o professor orientou inicialmente que em caso de dúvidas, deveriam usar os ícones “intersecção entre duas superfícies” e “intersecção entre dois objetos”. Outro estudante classificou como SI e os demais estudantes classificaram corretamente.

Em relação a escrita da posição relativa entre os planos dois estudantes responderam de forma equivocada. O estudante M pontuou “Duas equações são proporcionais em tudo e por isso são coincidentes e uma é proporcional apenas nas incógnitas, por isso ela corta as coincidentes, sendo uma reta concorrente". Percebe-se que o estudante não relaciona a planos concorrentes a não proporcionalidade entre os coeficientes das equações. Os demais estudantes estabeleceram corretamente a relação entre os diferentes registros.

Sexto sistema: esse era o único caso de sistema possível e determinado representado por três planos concorrentes com um único ponto em comum, implicando que as equações não possuiriam proporcionalidade entre si.

Todos os estudantes classificaram corretamente e justificaram a proporcionalidade e a posição relativa entre os planos de forma adequada, apenas um estudante escreveu de forma incompleta a posição dos planos "as três retas são concorrentes", o que por si só não caracteriza um SPD, sendo necessário complementar com a informação de que possuem um único ponto em comum entre os três planos.

Ressalta-se que este estudante usou o termo "retas" quando deveria utilizar "planos", mas em diferentes momentos outros estudantes também usaram de maneira equivocada este termo. Os estudantes utilizaram ainda os ícones de intersecção entre duas superfícies e entre dois objetos para classificar corretamente o sistema, além de validarem a classificação também com o critério da proporcionalidade.

Assim a maneira como foi abordada a relação entre o registro gráfico, o algébrico e a proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas e dos termos independentes mostrou-se favorável ao entendimento dos estudantes. Compreenderam que existem quatro posições entre os planos para representar os sistemas impossíveis, três para representar os sistemas possíveis e indeterminados e uma para os sistemas possíveis e determinados.

Além disso, perceberam que deveriam tomar as equações duas a duas e não relacioná-las diretamente com a classificação do sistemas, mas de acordo com as posições relativas entre os dois planos: 1) proporcionalidade tanto nos coeficientes das incógnitas quanto nos termos independentes implica em planos coincidentes, 2) proporcionalidade nas incógnitas dos coeficientes mas que não se estende para os termos independentes tem-se planos paralelos e 3) ausência de proporcionalidade nas incógnitas independente de haver ou não proporcionalidade nos termos independentes implica planos concorrentes.

E a partir dos resultados das comparações das posições dos planos com a proporcionalidade pode-se enfim fazer a classificação do sistema linear de acordo com o número de soluções apresentadas.

Atividade 05

1. Considere o sistema linear: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 4x+y+3z=7 \end{cases}$

a) Digite-o no GeoGebra e obtenha a representação gráfica.
b) Descreva a posição relativa entre os três planos formados.
c) E em relação a proporcionalidade ou combinação linear o que você identifica.
d) Com base nestes parâmetros classifique este sistema linear.

2. Considere o sistema linear: $\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 5x+2y+z=2 \\ 9x+3y+5z=5 \end{cases}$

a) Digite-o no GeoGebra e obtenha a representação gráfica.
b) Descreva a posição relativa entre os três planos formados.
c) E em relação a proporcionalidade ou combinação linear o que você identifica.
d) Com base nestes parâmetros classifique este sistema linear.

3. *Agora retorne a questão 4 e insira no quadro que você preencheu mais estas duas possibilidades. Dessa forma você terá um resumo das oito possibilidades estudadas de classificação de sistemas lineares de acordo com a proporcionalidade/combinação linear e a posição relativa entre três planos no espaço.*

Objetivo: verificar se o estudante identifica os casos em que há combinação linear entre as equações integrantes do sistema linear e se relaciona os casos de combinação linear a planos concorrentes entre si e ainda se classifica-os corretamente.

Esta atividade foi realizada no mesmo dia da atividade 04 e antes de iniciar o professor explicou três situações de sistemas lineares que não apresentavam proporcionalidade. Nos sistemas lineares 2 x 2 sempre que isso ocorria as retas eram classificadas como concorrentes e o sistema como SPD, no entanto nos sistemas lineares 3 x 3, os planos continuam sendo concorrentes quando não apresentarem proporcionalidade, já a classificação não será tão imediata.

É necessário verificar primeiramente se há combinação linear em todos os coeficientes das incógnitas e também nos termos independentes de duas das três equações do sistema linear para obter a terceira (SPI), pois terão uma reta (infinito pontos) em comum ou a combinação linear aplica-se somente aos coeficientes das incógnitas e não nos termos independentes configurando que os planos são concorrentes, mas não possuem nenhum ponto em comum.

A partir da construção gráfica de três planos concorrentes a visualização proporcionada pelo GeoGebra nem sempre permite saber se os três planos possuem uma reta ou um ponto em comum e para isso deveriam usar novamente os dois ícones já explicados anteriormente: intersecção de duas superfícies e intersecção de dois objetos, ou ainda o critério de combinação linear.

Assim em relação ao primeiro sistema linear da atividade cinco, os estudantes deveriam verificar que teriam três planos concorrentes com uma reta em comum, portanto classificariam como SPI. Todos os estudantes construíram o gráfico corretamente e com o uso dos ícones do GeoGebra "intersecção entre duas superfícies" e "intersecção entre dois objetos" classificaram corretamente, no entanto não justificaram de maneira adequada (Figura 38).

Figura 38 – Respostas do item (1b) da atividade 05

C e N: planos concorrentes com uma reta em comum.

A e T: os planos são coincidentes, tem uma reta em comum

S e V: concorrentes.

M: concorrentes.

J: os três planos se interceptam em uma linha.

K: são planos que são coincidentes.

Fonte: dados do autor (2017)

Em relação a proporcionalidade todos os estudantes apenas afirmaram não ser proporcional, o que supostamente faria com que o sistema fosse SPD. Apenas uma dupla justificou corretamente tratar-se de uma combinação linear entre os coeficientes das incógnitas e também dos termos independentes de duas equações para obter a terceira.

No entanto apenas um estudante não classificou o sistema corretamente, fez a relação entre os diferentes registros e registrou que havia incoerência entre as respostas dos itens *b* e *c* não permitindo classificá-lo (Figura 39).

Figura 39 – Respostas dos itens (1b), (1c) e (1d) da atividade 05 pelo estudante K

a) Descreva a posição relativa entre os três planos formados.

São planos que são concidentes.

b) E em relação a proporcionalidade ou combinação linear o que você identifica.

Não há proporcionalidade nem entre os termos independentes nem nas incógnitas.

c) Com base nestes parâmetros classifique este sistema linear.

Não há como classificá-los pois quanto ao desenho é SPI e na proporcionalidade é SPD

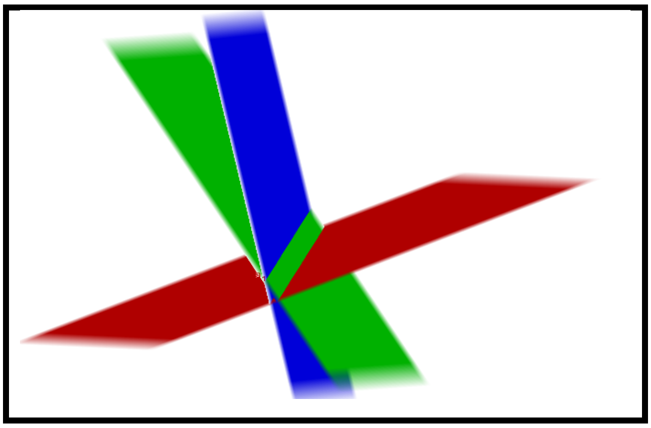
Fonte: dados do autor (2017)

O segundo sistema linear da atividade cinco consistia em mais um caso em que não há proporcionalidade, no entanto verificou-se combinação linear entre os coeficientes das incógnitas de duas equações para obter a terceira, mas essa combinação linear não se estendeu aos termos independentes, portanto, tratava-se de planos concorrentes em que não havia nenhum ponto em comum aos três, caracterizando um sistema impossível.

Constatou-se que os estudantes tiveram dificuldade em interpretar a representação gráfica obtida em relação ao segundo sistema linear desta atividade.

Apenas uma dupla fez a relação adequada. Uma dupla e um estudante interpretaram que tratava-se de planos concorrentes com uma reta em comum e não perceberam, por exemplo que na Figura 40, o plano (verde) intersecta os outros dois (azul e vermelho) mas não no mesmo ponto, ou seja, se tomados dois a dois possuem uma reta em comum, no entanto, os três planos não possuem nenhum ponto em comum. Isso fez com que estas duas duplas classificassem erroneamente o sistema como possível e indeterminado.

Figura 40 – Representação gráfica do segundo sistema da atividade 05 pelo estudante J



Fonte: dados do autor (2017)

Uma dupla escreveu ainda “um plano paralelo e dois concorrentes” possivelmente por ainda não terem se apropriado destas definições e por ter associado o plano em vermelho a mesma posição obtida em planos paralelos representados em atividades anteriores, no entanto classificaram corretamente como SI.

Um estudante apenas identificou como planos concorrentes e classificou como SI e outro estudante escreveu tratar-se de planos paralelos, provavelmente não compreendendo a definição de paralelismo e ao classificar o sistema escreveu equivocadamente ainda “quanto a proporcionalidade é SPD e quanto ao desenho é SI”.

Em relação ao item *c* apenas uma dupla identificou tratar-se de uma combinação linear e que aplica-se somente aos coeficientes das incógnitas, todos os demais estudantes apenas afirmaram que não havia proporcionalidade.

Atividade 06

Resolva os sistemas lineares usando o método do escalonamento e encontre o conjunto solução.

1) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-4z=4 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=3 \\ 4x+4y-4z=7 \end{cases}$ *3)* $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-4z=7 \end{cases}$ *4)* $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 4x+y+3z=7 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x+2y-2z=3 \\ x+y-z=1 \\ 4x+4y-z=4 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x+4y-z=4 \\ 2x+2y-2z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x+3y+4z=5 \\ 4x+7y-z=13 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 5x+2y+z=2 \\ 9x+3y+5z=5 \end{cases}$

Objetivo: verificar se o estudante faz os tratamentos algébricos adequados ao usar o método de escalonamento (também conhecido como método de eliminação de Gauss) na resolução de sistemas lineares 3 x 3 e se relaciona a classificação em SPD, SPI e SI com as soluções encontradas.

Como a Regra de Cramer possui limitações, o professor apresentou aos estudantes o processo de escalonamento de um sistema linear. Usou novamente como exemplo um sistema possível e determinado para explicar aos estudantes como usar esse método, explicando-o passo a passo. É importante que os estudantes percebam que mesmo sendo processos de resolução diferentes, o resultado encontrado precisa ser o mesmo. Os estudantes registraram no caderno os passos e operações elementares que devem ser usados no processo de escalonamento.

Novamente justifica-se a importância de atividades envolvendo tratamentos, pois conforme apontado por Duval (2009, p. 52-53) “a aquisição de novos tratamentos quase instantâneos aparece então como condição de todo progresso qualitativo na aprendizagem. Porém essa aquisição, passa necessariamente por uma fase de tratamentos intencionais”.

Na sequência o professor fez a explicação de um sistema linear SPI resolvido através do escalonamento. Justifica-se a necessidade de explicar passo a passo, pois como este sistema apresenta infinitas soluções, há a necessidade de usar a incógnita livre para escrever a solução geral, o que causa, inicialmente, dificuldades entre os estudantes, conforme já foi observado na resolução de sistemas lineares 2 x 2.

Nesta atividade foram utilizados os mesmos sistemas lineares das atividades 04 e 05 justamente para que os estudantes tivessem maior controle sobre o uso do método de escalonamento. Isso permite fazer a comparação entre os resultados obtidos no tratamento algébrico e a classificação do sistema já realizada no registro gráfico.

Ficou combinado que os estudantes deveriam resolver por completo cada um dos sistemas a fim de perceber o comportamento dos resultados obtidos e a partir destes classificar o sistema, pois em atividades anteriores, ao aplicar o método da adição, percebeu-se que os estudantes já classificaram alguns sistemas usando apenas duas equações, o que pode provocar classificações equivocadas, sem considerar a terceira equação do sistema linear.

No primeiro sistema os estudantes não tiveram nenhuma dificuldade em realizar os tratamentos algébricos, a dificuldade foi interpretar os resultados obtidos e principalmente escrever a solução geral por tratar-se de um sistema possível e indeterminado, como pode ser verificado na transcrição do diálogo entre professor e o estudante C.

> *P: Aqui você multiplicou por - 2 . Quanto é – 2 com + 2?*
>
> *C: Zero. Ah, é tudo proporcional.*
>
> *P: Então é?*
>
> *C: SPI.*
>
> *P: Precisa escrever a solução geral.*
>
> *Depois de um tempo*
>
> *P: Você isolou a incógnita* **x***, certo, mas agora precisa escrever a solução.*

*C: **1 – y – z***

P: Nesse caso tem duas variáveis livres, mas nem sempre é assim. Isso você vai verificar na resolução dos próximos sistemas.

C: Duas variáveis livres por que ao usar o escalonamento as duas primeiras equações zeraram?

P: Isso.

Os estudantes perceberam que tratar-se de um SPI pelo resultado apresentado: $0x + 0y + 0z = 0$, no entanto o fato de terem três incógnitas e a possibilidade de escrever uma solução geral com uma ou duas variáveis livres, dependendo da situação, fez com que fosse necessária a intervenção do professor.

Por isso o professor havia realizado uma explicação geral no quadro, mas preferiu fazer atendimento individual e em grupos no decorrer desta atividade. Em relação aos sistemas possíveis e indeterminados são três possibilidades, portanto, três formas distintas de escrever a solução geral. Buscou ainda acompanhar os tratamentos algébricos para verificar se os estudantes conseguiriam chegar ao resultado final, caso contrário não teriam a possibilidade de comparar o resultado e a classificação dos sistemas um dos objetivos previstos para a atividade.

Convém ressaltar que os estudantes realizaram a atividade individualmente, mas podiam consultar colegas para trocar ideias e tirar dúvidas. Todos os estudantes precisaram de orientação para escrever a solução geral referente ao primeiro sistema linear, pois este sistema apresentou duas variáveis livres a serem consideradas.

Em relação ao segundo sistema todos os estudantes resolveram corretamente e verificaram tratar-se de um SI. Todos usaram a simbologia adequada para representar o conjunto vazio.

Na resolução do terceiro sistema os estudantes resolveram corretamente o sistema, mas ficaram em dúvida sobre como classificá-lo pois os resultados obtidos foram "$0x + 0y + 0z = 0$" e "$0x + 0y - 0z = 3$". Isso fica evidente novamente no diálogo entre o professor e o estudante C.

*C: Isso aqui (**0x + 0y – 0z =3**) também é SI né?*

P: Por quê?

C: Porque é proporcional só nas incógnitas então deu este resultado.

P: Mas poderia ser SPI também?

C: Por quê?

P: Porque nessa parte deu ***0x +0y +0z = 0****. Foi o que você falou antes que assim era SPI, lembra?*

C: Então por que é SI?

P: Observando as equações quais as posições entre os planos?

C(pensou um pouco, ficando em dúvida):Dois planos coincidentes e um paralelo.

P: Dois planos coincidentes e um terceiro paralelo a estes dois.

C: Por que dois planos coincidentes?

P: Porque ao usar o escalonamento você obteve ***0x +0y+0z = 0****. Então que tipo de sistema é?*

C: SI.

P: Isso os três planos não tem ponto em comum.

Os estudantes poderiam ter recorrido ao registro gráfico para sanar essa dúvida, mas nenhum o fez. Com a intervenção do professor perceberam tratar-se de um SI, pois os resultados obtidos demonstraram tratar-se de dois planos coincidentes e um plano paralelo a estes planos, ou seja, não há nenhum ponto em comum entre os três planos.

No quarto sistema novamente apareceu um caso de sistema possível e indeterminado, mas com uma característica diferente, justamente por tratar-se de posições relativas entre os planos diferentes daquela apresentada pelo primeiro sistema linear, era uma situação em que não ocorria proporcionalidade, mas combinação linear.

Um estudante fez um erro no tratamento algébrico e os demais realizaram de forma correta. No entanto, constatou-se que somente dois estudantes escreveram a solução geral de forma correta.

Dentre os erros cometidos na escrita da solução geral, três estudantes escreveram-na considerando duas variáveis livres que não era o caso nesta situação, pois ao final do escalonamento havia duas equações e três incógnitas, evidenciando uma variável livre. Dois estudantes escreveram a solução geral de modo equivocado por errarem ao isolar uma das incógnitas e um terceiro estudante não explicitou como escreveu a solução geral, não permitindo verificar qual o erro cometido.

Da forma como o quinto sistema linear estava organizado não permitia a aplicação direta do escalonamento, portanto, antes de resolver era necessário trocar a primeira e a segunda equação entre si, o que todos os estudantes fizeram.

Ao resolver o sistema encontraram $z = 0$, o que num primeiro momento, levou os a considerar tratar-se de um SPD, no entanto o resultado anterior $0x + 0y - 0z = 1$ evidenciou tratar-se de um SI. Isso mostra que não se deve considerar um resultado de forma isolada ao resolver um sistema linear.

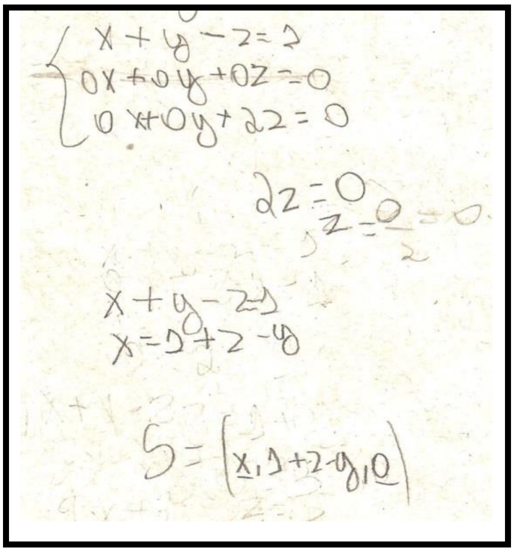
Um estudante errou o tratamento algébrico, mas mesmo assim obteve um resultado que lhe permitiu classificar corretamente o sistema e um estudante não escreveu o conjunto solução.

O sexto sistema linear era bastante semelhante ao quinto sistema. Os estudantes também encontraram $z = 0$, mas o outro resultado obtido $0x + 0y - 0z = 0$ implicou tratar-se de um SPI. No entanto, por tratar-se de posições relativas entre os planos diferentes, a solução geral também possui características um pouco diferentes das anteriores.

Os estudantes precisavam compreender que tratava-se de um SPI, mas com um valor fixo, nesse caso $z = 0$, sendo que x e y poderiam assumir quaisquer valores e o sistema teria infinitas soluções.

Somente quatro estudantes escreveram a solução geral de forma correta, mesmo que sete estudantes tenham aplicado corretamente o método de escalonamento. Notou-se que alguns estudantes não consideraram que z deveria ser igual a zero ao escrever a solução geral (Figura 41). Outros erraram, principalmente os sinais ao isolar uma das incógnitas.

Figura 41 – Solução geral do sexto sistema apresentada pelo estudante V



Fonte: dados do autor (2017)

O sistema linear sete tratava-se de um SPD, portanto os estudantes deveriam encontrar um único valor para x, y e z. Cinco estudantes resolveram corretamente e quatro parcialmente. Interessante que todos os estudantes fizeram a resolução correta encontrando o valor de $z = 0$, no entanto cometeram erros ao substituir o valor de z na equação para encontrar o valor de y e consequentemente para encontrar o valor de *x*. Apenas o estudante M equivocou-se ao admitir que *1z = 0* seria impossível, conforme pode ser verificado neste diálogo.

> *P: Este sistema vai ser o quê?*
>
> *M: SPI?*
>
> *P:* ***1z = 0.***
>
> *M: Impossível.*
>
> *P: Cuidado, pois* ***0z =1*** *é diferente de* ***1z = 0****. Quanto é 1z = 0?*
>
> *M: Zero?*
>
> *P: Nesse caso* ***z = 0****. Você precisa substituir* ***z*** *por zero e encontrar o valor de* ***y*** *e depois o valor de* ***x****.*
>
> *P: Nesse caso, qual o tipo de sistema?*
>
> *M: SPD.*
>
> *P: Isso.*

O último sistema tratava-se de uma combinação linear que resultava em sistema impossível, pois a combinação linear ficou restrita aos coeficientes das incógnitas. Dois estudantes não resolveram o sistema e dois cometeram erros no tratamento algébrico. Os demais resolveram corretamente.

Por fim destaca-se que essa atividade exigiu intervenções constantes do professor, inicialmente para auxiliar os estudantes no uso do método de escalonamento, depois na escrita da solução dos sistemas possíveis e indeterminados e ainda na interpretação dos resultados obtidos quanto a classificação dos sistemas lineares.

Atividade 07

1. *Observe o sistema linear:* $\begin{cases} 6x+2y+4z=32 \\ 9x+3y+6z=16 \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases}$

Para o sistema linear obtido na questão abaixo descreva a posição relativa entre os planos. Complete cada sistema com uma equação de modo que possa ser classificado como:

a) Sistema impossível:

b) Sistema possível e indeterminado:

c) Sistema possível e determinado:

d) Você estudou que existem quatro possibilidades para as posições relativas dos três planos no espaço representarem um sistema impossível. Escreva mais uma possibilidade de *equação que complete um dos sistemas, porém a posição relativa dos três planos deve ser diferente da letra a. Se necessário, use o GeoGebra para confirmar se a reposta está correta.*

e) *Porque este sistema se tornou um Sistema Impossível?*

f) *Você estudou que existem três possibilidades para as posições relativas dos três planos no espaço representarem um sistema possível e indeterminado. Escreva mais uma possibilidade de equação que complete um dos sistemas, porém a posição relativa dos três planos deve ser diferente da resposta da letra b. Se necessário, use o GeoGebra para confirmar se a reposta está correta.*

g) *Porque este sistema se tornou um Sistema Possível e Indeterminado?*

2. *Responda os itens a a g para o seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y - 2z = -1 \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases}$$

Objetivo: identificar se o estudante completa a terceira equação no registro algébrico de um sistema linear 3 x 3 de modo a obter cada uma das classificações propostas: SPD, SPI e SI e se relaciona isso com a posição relativa entre os planos no espaço.

Apenas seis estudantes estavam presentes no dia em que esta atividade foi desenvolvida e foram organizadas três duplas, mas cada estudante registrou individualmente as respostas. A ideia foi retomar algumas situações já abordadas anteriormente, assim a partir de um sistema linear 3 x 3 com apenas duas equações representadas algebricamente os estudantes precisavam escrever a terceira equação de acordo as possíveis classificações de um sistema linear.

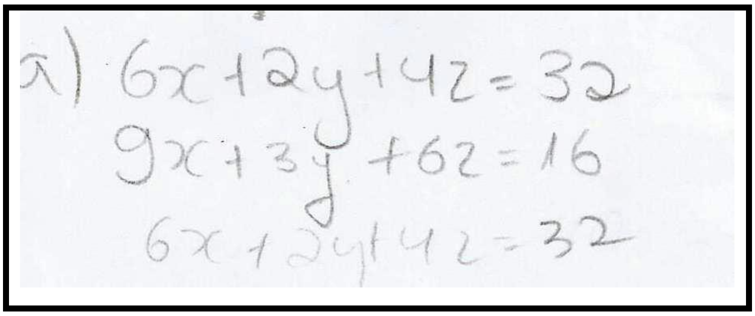
Por tratar-se de uma atividade aplicada mais ao final da sequência didática outro objetivo desta atividade foi verificar se o estudante mobilizaria os diferentes registros de representação abordados até o momento para responder de modo adequado as questões propostas.

Isso ficou evidente, pois o exercício pediu que os estudantes escrevessem a posição relativa entre os planos obtidos em cada uma das situações e nos itens *d* e *f* solicitou mais uma forma de escrever uma equação que representasse sistemas impossíveis e possíveis e indeterminados, mas não podendo repetir a posição relativa entre planos já descrita anteriormente.

As duas primeiras equações do sistema da equação I são proporcionais nos coeficientes das incógnitas, mas isso não se estende para os termos independentes, portanto os planos são paralelos entre si, limitando consideravelmente as possibilidades de escrita de equações que atendem os critérios estabelecidos.

Em relação ao item *a* todas as duplas escreveram corretamente a equação que tornava o sistema impossível; uma dupla considerou três planos paralelos e uma inseriu uma equação de modo que tivessem dois planos coincidentes e um plano paralelo (Figura 42) a estes e por fim uma dupla que considerou dois planos paralelos e um plano concorrente.

Figura 42 – Resposta do item (a) da atividade 07 pelo estudante K



Fonte: dados do autor (2017)

O item *d* desta mesma atividade solicitava que os estudantes novamente escrevessem uma equação de forma a tornar o sistema impossível, mas não poderiam repetir a posição entre os planos que já foi usada no item *a*.

Uma dupla escreveu de forma correta, tomando o cuidado de não repetir a mesma posição entre os planos, uma dupla repetiu a posição anterior: três planos paralelos e uma dupla afirmou tratar-se de dois planos paralelos e outro concorrente, mas o registro algébrico não traduziu isso, pois da forma como foi escrito o sistema representou três planos paralelos.

O item *b* solicitava aos estudantes que escrevessem uma equação de tal forma que o sistema se tornasse possível e indeterminado, o que nesse caso, não seria possível, pois as duas equações já escritas representam planos paralelos. Apenas uma dupla percebeu que isso não era possível.

O enunciado da questão dizia para os estudantes verificarem no GeoGebra caso ficassem com dúvidas, mas nenhum aluno havia trazido o notebook neste dia e o laboratório não havia sido reservado antecipadamente. Caso tivessem recorrido a representação gráfica no GeoGebra possivelmente teriam identificado o equívoco.

O item *f* solicitava novamente que o estudante escrevesse uma equação que tornasse o sistema possível e indeterminado, mas de modo a não repetir a posição anterior e mais uma vez não existia possibilidade de ter este tipo de sistema nesta situação. Neste caso duas duplas identificaram esta condição.

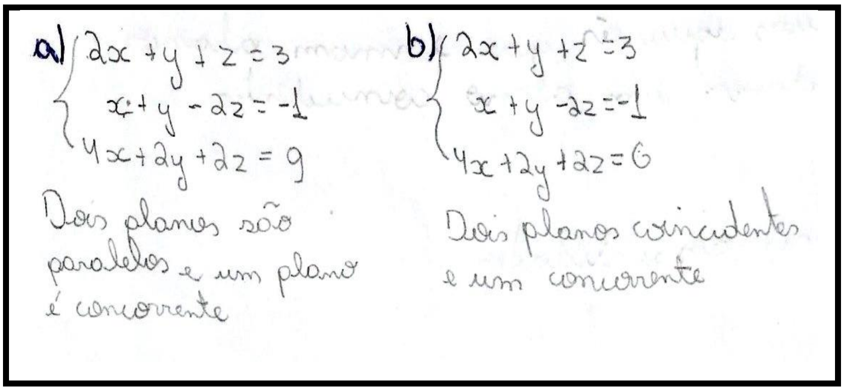
O item *c* solicitava aos estudantes que escrevessem uma equação de modo a tornar o sistema possível e determinado. Novamente isso não foi possível e duas duplas identificaram não ser possível.

Em relação ao segundo sistema linear uma dupla não respondeu pois dispendeu muito tempo ao responder a primeira parte desta atividade e o professor não poderia fazer mais alterações no cronograma devido ao elevado número de aulas já usadas para abordar os sistemas lineares. Sendo assim a análise será referente as duas duplas que realizaram a atividade.

Propositalmente este segundo sistema linear foi escrito de forma a não ter proporcionalidade entre os coeficientes das duas equações dando mais possibilidades de representação, inclusive por meio da combinação linear.

Em relação ao item *a* as duas duplas responderam corretamente, associando dois planos paralelos a um concorrente e o mesmo ocorreu para o item *b*. Uma das duplas usou praticamente a mesma equação, mudando apenas o valor do termo independente, o que já implicou modificar a classificação de SI para SPI (Figura 43).

Figura 43 – Respostas dos itens a (à esquerda) e do item b (à direita) pelo estudante J



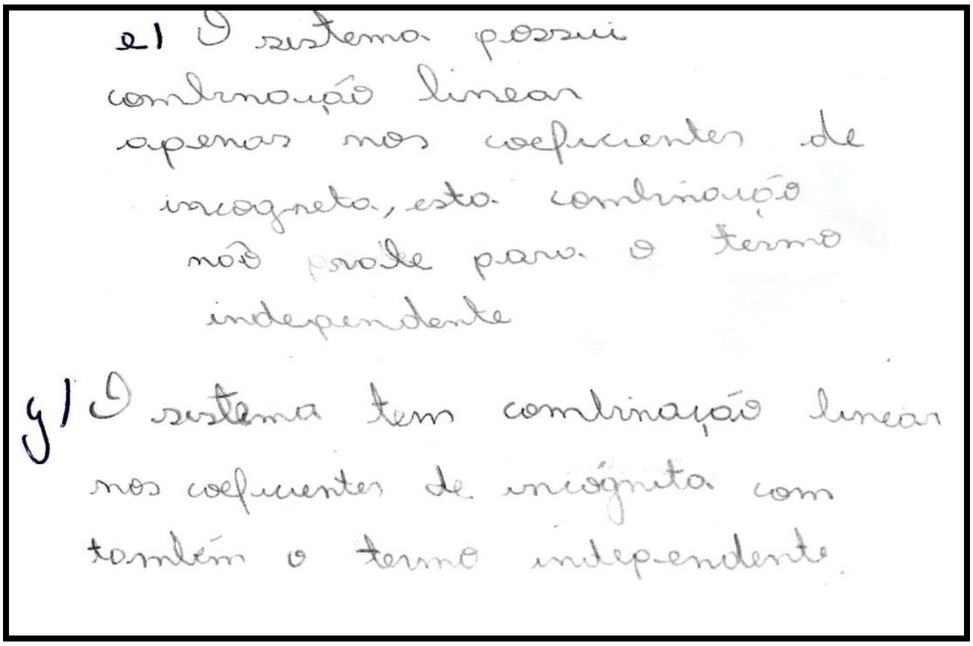
Fonte: dados do autor (2017)

Em relação ao item *c* as duas duplas escreveram de modo adequado a terceira equação e relacionaram-na a três equações não proporcionais entre si que implicam em três planos concorrentes.

Nos itens *d* e *e* as duplas escreveram corretamente a equação faltante usando combinação linear que foi devidamente justificada. O mesmo ocorreu para os itens *f* e *g*, no entanto uma dupla não respondeu estes itens alegando que uma aula não foi suficiente para realizar todas as etapas. Portanto, há de ser revisto o tempo disponível para essa atividade.

A dupla que respondeu os itens *f* e *g* usou combinação linear entre as duas equações para escrever a terceira e justificou corretamente (Figura 44).

Figura 44 – Respostas dos itens (e) e (g) da atividade 07 pelo estudante J


e) O sistema possui combinação linear apenas nos coeficientes de incognita, esta combinação não vale para o termo independente

g) O sistema tem combinação linear nos coeficientes de incógnita com também o termo independente.

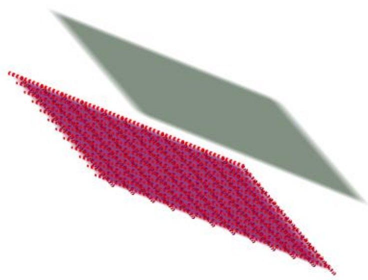
Fonte: dados do autor (2017)

Percebeu-se que estas últimas atividades demandam mais tempo, pois geralmente o estudante precisou mobilizar diferentes registros de representação e transitar entre eles, portanto há a necessidade de readequar o tempo previsto para as atividades contendo sistemas lineares 2 x 2 e destinar, se possível, parte deste tempo para a abordagem dos sistemas lineares 3 x 3.

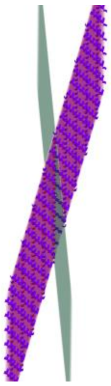
Atividade 08

1. *Classifique os sistemas lineares 3 x 3 em SPD (Sistema possível e determinado), SPI (Sistema possível e indeterminado) ou SI (Sistema impossível). Justifique cada classificação. Observação: considere planos pontilhados como planos coincidentes*.

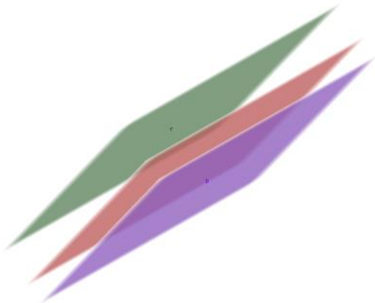
a)



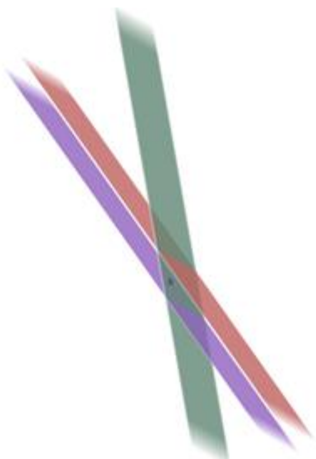
b)



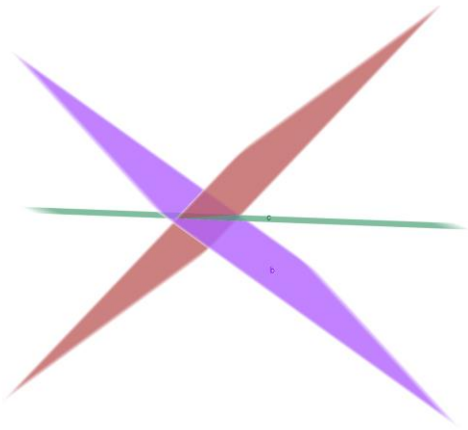
c)



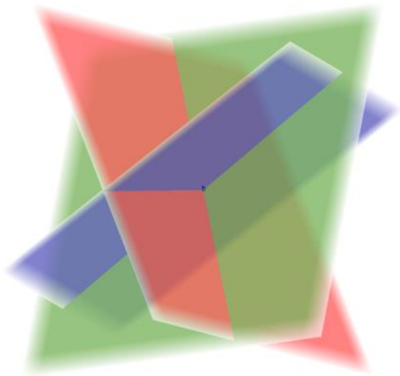
d)



e)



f)



Após realizar a classificação escreva algebricamente um sistema que possa representar cada situação apresentada nesta atividade.

Objetivo: verificar se o estudante classifica corretamente os sistemas lineares 3 x 3 por meio da observação do registro gráfico e se justifica a classificação de acordo com a posição relativa entre os planos no espaço e observar ainda se o estudante faz a conversão do registro gráfico para o algébrico.

Os estudantes não obtiveram dificuldades e todos fizeram corretamente a classificação, apenas um estudante não classificou um dos sistemas. Em relação as justificativas ocorreram alguns equívocos e dois estudantes não justificaram todas as classificações.

A única dificuldade encontrada foi em relação a visualizar uma representação tridimensional impressa em papel. Isso foi difícil especificamente nos dois últimos casos em que os três planos se intersectavam, necessitando visualizar se estes planos tinham uma reta ou ponto em comum ou se não tinham nenhum ponto em comum, o que implicaria na classificação.

Essa dificuldade também ocorreu ao usar o *software* GeoGebra, no entanto, naquele caso recorreu-se a algumas ferramentas que possibilitaram coordenar os dois registros para identificar o tipo de sistema. Na resolução manual isso não é possível, então o professor orientou os estudantes a relembrarem os gráficos construídos com o uso do GeoGebra. Novamente destaca-se a importância do uso planejado e intencional desse *software*, permitindo visualizações difíceis ou até impossíveis de serem realizadas por meio da construção manual de gráficos, conforme apontado também pela segunda versão revista da BNCC "o uso de *softwares* se constitui uma ferramenta fundamental para esse trabalho, sobretudo para analisar variações quando se modificam parâmetros (BRASIL, 2016, p. 576)

Em relação às justificativas, alguns estudantes optaram por escrever a posição relativa entre os três planos conforme descrito pelo estudante N em relação ao terceiro gráfico SI, "pois todos os planos são paralelos". Outros estudantes usaram a seguinte definição: "SI – nenhum ponto em comum, SPI – uma reta em comum e SPD um ponto em comum". Ainda houve justificativas que mesclaram as duas situações anteriores, conforme escrito pelo estudante K: "Dois planos são coincidentes e um é paralelo, sendo assim é SI, pois não tem nenhum ponto em comum".

Constatou-se que somente dois estudantes usaram a nomenclatura correta em todas as situações, os demais apresentaram respostas que alternaram: em alguns momentos usaram a palavra "retas" para referir-se a "planos", por exemplo. Em relação a classificação dos sistemas possíveis e indeterminados foi comum o uso da palavra "linha" para se referir a reta conforme pode ser visto na justificativa do estudante C " Porque dois planos são coincidentes e cortam o outro plano em uma linha".

Após a etapa de classificação e justificativas os estudantes deveriam representar algebricamente cada uma das situações. No entanto como ainda não estudaram Geometria Analítica e tampouco a representação de planos no espaço tridimensional, os mesmos foram orientados no enunciado da atividade a representarem possíveis sistemas lineares que observassem o critério de classificação anterior, ao mesmo tempo em que, atendessem a posição relativa entre os planos que estivesse sendo representada.

Dessa forma, orientou-se os estudantes a relacionarem o registro gráfico com a proporcionalidade e/ou combinação linear. Para exemplificar, usa-se a situação de um registro gráfico representado por três planos paralelos.

Nesse caso, os estudantes não teriam condições de escrever exatamente cada uma das equações que compunham o sistema linear, até porque os eixos foram retirados do registro gráfico para ampliá-lo, no entanto é possível perceber que pode-se representar algebricamente um sistema linear 3 x 3 que satisfaça a condição de ter três planos paralelos, mantendo as proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas das três equações, mas não estendendo essa proporcionalidade aos termos independentes.

Por fim cabe ressaltar a importância de propor atividades de conversão em ambos os sentidos, pois "geralmente no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando à conversão no outro sentido". (DUVAL, 2003, p. 20). No entanto são processos com custos cognitivos diferentes conforme apontado pelo próprio Duval.

Alguns estudantes tiveram dificuldades iniciais nessa atividade, pois nos sistemas lineares 2 x 2 classificavam os sistemas por meio da seguinte relação: SPD: retas concorrentes, SPI, retas coincidentes e SI, retas paralelas. Naquele momento essa relação parecia ser fácil de compreender e satisfazia os critérios de classificação, no entanto, ao trabalhar com sistemas 3 x 3, não são somente três possibilidades, e sim oito.

Por isso, alguns estudantes, no início, escreveram, por exemplo, sistemas lineares sempre proporcionais, entendendo que para ser SPI, os três planos sempre são coincidentes, o que representa apenas uma das possibilidades.

Dessa forma, compreendeu-se ser mais adequado fazer a seguinte relação entre a classificação dos sistemas lineares: SPD: um único ponto em comum, SPI, infinitos pontos em comum e SI nenhum ponto em comum, como já havia sido proposto pelo professor no estudo dos sistemas lineares 2 x 2.

Assim o estudante usou esse critério nos sistemas 2 x 2 e estendeu-o para os sistemas 3 x 3 podendo ser usado sem nenhum problema, entendendo, no entanto, que diferentemente dos sistemas 2 x 2, nos sistemas 3 x 3 há mais de uma possibilidade (quanto a posição) dos planos não terem nenhum ponto em comum ou infinitos pontos em comum.

Em relação a representação algébrica dos sistemas lineares, descreve-se a seguir, cada uma das situações:

a) SI (dois planos coincidentes e um plano paralelo a estes): todos os estudantes escreveram corretamente um sistema linear contendo duas equações com os coeficientes proporcionais entre si, inclusive o termo independente e a terceira equação com os coeficientes das incógnitas proporcionais as outras duas equações e o termo independente não.

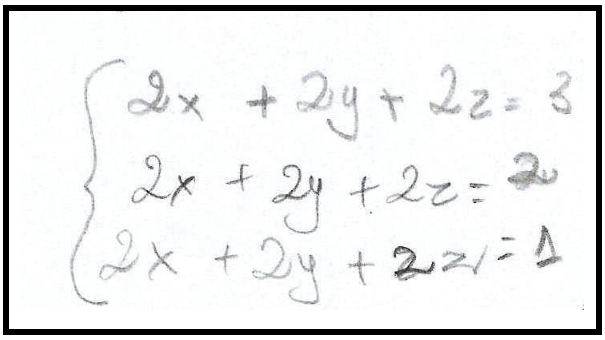
b) SPI (dois planos coincidentes e um plano concorrente a estes: um estudante escreveu o sistema de modo incompleto e os demais representaram duas equações com proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas e nos termos independentes e a terceira equação não proporcional as outras duas.

c) SI (três planos paralelos): um estudante escreveu o sistema linear de modo incompleto e os demais responderam corretamente tratar-se de três equações que apresentavam proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas das três equações, mas nenhuma delas apresentava proporcionalidade entre os termos independentes.

d) SI (dois planos paralelos e um concorrente a estes): um estudante escreveu de modo incompleto e três estudantes escreveram errado, sendo que dois estudantes escreveram como se fossem três planos paralelos, ou seja, identificaram que é SI, mas não perceberam que existem diferentes posições relativas entre os planos que podem caracterizar um sistema impossível (Figura 45). Responderam corretamente os estudantes que apresentaram um sistema em que as duas primeiras equações mantiveram proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas, mas não no termo independente e a terceira equação não apresentou proporcionalidade em relação às outras duas.

Em relação a situação de escrever o sistema linear de modo incompleto que foi mencionado anteriormente, constatou-se que isso sempre ocorreu com o mesmo estudante que não escreveu o termo independente em algumas da equações pertencentes aos sistemas lineares, o que não permitiu a análise.

Figura 45 – Registro algébrico do gráfico (d) pelo estudante A



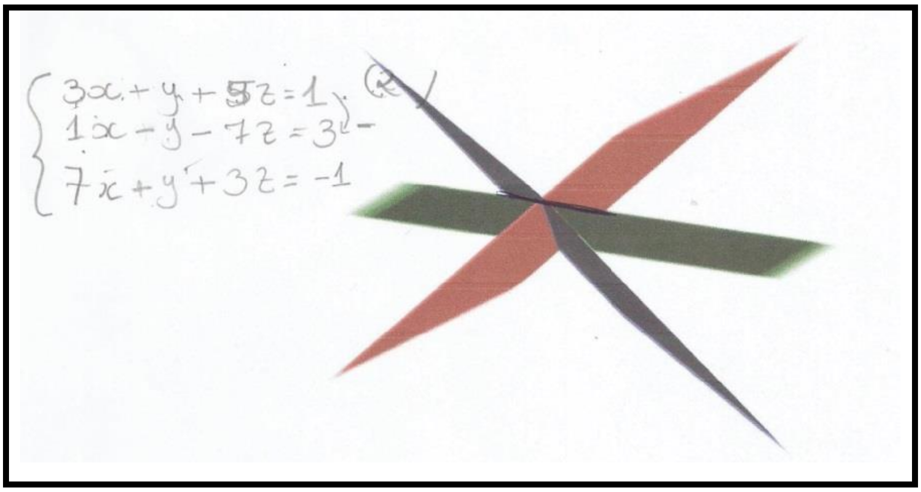
Fonte: dados do autor (2017)

e) SPI (três planos concorrentes com uma reta em comum). Esta questão diferenciou-se das demais por tratar-se de uma combinação linear. Diferentemente dos sistemas lineares 2 x 2 em que retas concorrentes sempre caracterizavam um SPD, nos sistemas lineares 3 x 3 três planos concorrentes podem não ter nenhum ponto em comum (SI), uma reta em comum (SPI) ou um ponto em comum (SPD). Nesta questão tratava-se de um SPI.

Este item gerou um pouco de dificuldade de visualização e os estudantes poderiam usar o GeoGebra, para isso foram orientados a baixar a versão para *Android*, pois todos os estudantes possuíam celular. Alguns estudantes baixaram essa versão que funcionou muito bem para sistemas lineares 2 x 2, mas como nos sistemas lineares 3 x 3 havia a necessidade de ativar a janela 3D e o professor não sabia se era possível ativar essa janela e também não conhecia os procedimentos para ativá-la, caso fosse possível. Assim não puderam contar com essa ferramenta para auxiliar na visualização. Além disso, a ida ao laboratório também não era possível, pois estavam ocupados naquele momento e isso deveria ter sido programado anteriormente.

Em relação a combinação linear exigida neste item ao representar algebricamente o sistema linear constatou-se que um estudante escreveu equações aleatórias sem nenhum sentido, outro estudante havia escrito de forma errada, mas após a intervenção do professor fez correto e os demais representaram corretamente. No entanto, verificou-se que dos sete estudantes que escreveram corretamente, seis simplesmente somaram as duas primeiras equações para obter a segunda e apenas um estudante fez um processo um pouco mais elaborado conforme pode ser verificado na Figura 46.

Figura 46 – Registro algébrico do gráfico (e) pelo estudante M



Fonte: dados do autor (2017)

f) SPD (três planos concorrentes com um único ponto em comum): apenas um estudante escreveu um sistema que não correspondia a representação gráfica, os demais escreveram corretamente três equações não proporcionais entre si.

Ao final da aplicação desta atividade constatou-se, portanto, que os estudantes relacionaram de modo satisfatório o registro gráfico e o algébrico ao considerar as diferentes posições relativas entre três planos no espaço.

Atividade 09

1. *Resolva as situações a seguir, encontrando o conjunto solução para cada situação apresentada. Escolha o método de resolução que julgar mais adequado para cada situação.*

a) (UFG 2012) Um fabricante combina cereais, frutas desidratadas e castanhas para produzir três tipos de granola. As quantidades, em gramas, de cada ingrediente utilizado na preparação de 100 g de cada tipo de granola são dadas no quadro a seguir:

Tipo de granola/ingredientes	*Cereais*	*Frutas*	*Castanhas*
Light	*80*	*10*	*10*
Simples	*60*	*40*	*0*
Especial	*60*	*20*	*20*

O fabricante dispõe de um estoque de 18 kg de cereais, 6 kg de frutas desidratadas e 2 kg de castanhas. Determine quanto de cada tipo de granola ele deve produzir para utilizar exatamente o estoque disponível.

b) (INSPER- 2009) Renato decidiu aplicar R$ 100 000,00 em um fundo de previdência privada. O consultor da empresa responsável pela administração do fundo sugeriu que essa quantia fosse dividida em três partes x, y e z, que seriam aplicadas em três investimentos A, B e C, respectivamente. Em seguida, mostrou a Renato duas simulações do desempenho da aplicação, considerando dois cenários distintos para um período de 5 anos.

Cenário	*Rendimento previsto para um período de 5 anos*			*Saldo previsto após 5 anos*
	Investimento A	*Investimento B*	*Investimento C*	
Conservador	*100%*	*50%*	*25%*	*R$ 170 000,00*
Otimista	*100%*	*150%*	*200%*	*R$ 235 000,00*

Com essas informações, determine os valores de x, y e z sugeridos pelo consultor.

c) Um biólogo analisará três espécies de bactérias I, II e III num mesmo tubo de ensaio, onde elas serão nutridas por três fontes distintas de alimentos A, B e C. A cada dia serão colocados no tubo 2 300 unidades de A, 800 unidades de B e 1 500 unidades de C. O quadro abaixo, mostra a quantidade, em unidades, de alimentos consumido por dia, por cada microrganismo.

	I	***II***	***III***
A	*2*	*2*	*4*
B	*1*	*2*	*0*
C	*1*	*3*	*1*

Quantas bactérias de cada espécie podem coexistir no tubo de ensaio de modo a consumir todo o alimento?

d) *Três pacientes A, B e C usam, em conjunto, 1830 mg por mês de um determinado medicamento que é produzido em cápsulas. O paciente A usa cápsulas de 5 mg, o paciente B usa cápsulas de 10 mg e o paciente C ingere cápsulas de 12 mg. O paciente A toma a metade do número de cápsulas de B e os três tomam juntos 180 cápsulas por mês. Nessas condições, o número de cápsulas que o paciente C toma mensalmente é igual a?*

Objetivo: proporcionar ao estudante algumas situações contextualizadas em que se faz uso dos sistemas lineares representadas em língua materna e verificar se encontra o conjunto solução de cada um dos sistemas lineares.

É importante abordar uma variedade de situações em língua materna, pois de acordo com Duval esse tipo de registro geralmente apresenta um caráter não congruente, sendo necessária sua presença de modo a possibilitar aos estudantes saltos qualitativos na compreensão deste objeto matemático.

A atividade foi realizada em duplas e um trio e os estudantes necessitaram de bastante tempo para desenvolver esta atividade, além de questionamentos constantes ao professor. Ao entregar a atividade aos estudantes o professor esclareceu que poderiam escolher e usar o método que considerassem mais adequado a cada situação ou então que dominassem melhor. Orientou ainda que os estudantes deveriam escrever a resposta ao final da resolução de acordo com o enunciado.

Esta postura foi adotada no decorrer deste trabalho por compreender que é necessário dar autonomia aos estudantes no aprendizado da Matemática, mostrando-lhes diferentes meios de resolução e assim gradativamente possibilitar que aprendam a analisar as situações propostas e não simplesmente resolver fazendo uso de determinadas técnicas.

Na primeira situação proposta apenas uma dupla usou o método da adição, todos os demais utilizaram a Regra de Cramer. Inicialmente realizaram a conversão de quilos para gramas para manter a mesma unidade de medida. Com isso obtiveram alguns valores muito altos e tiveram que refazer alguns cálculos, que não estavam corretos. No método da adição não ocorreu esse problema.

Uma dupla calculou corretamente todos os determinantes, mas errou ao fazer a divisão do determinante das incógnitas pelo determinante principal justamente porque ao transcrever os números confundiu a quantidade de algarismos zero. O professor precisou observar a resolução e descobrir o erro para que pudessem dar continuidade. Mas ao final todos os grupos encontraram os resultados corretos.

A segunda situação foi a mais difícil de ser realizada porque os estudantes necessitavam de conhecimentos de Matemática Financeira. Nessa situação a conversão do registro em língua materna para o registro algébrico pode ser considerada como não congruente conforme apontado na Teoria de Duval. Nesse sentido “mudar a forma de uma representação se revela ser, para muitos alunos nos diferentes níveis de ensino, uma operação difícil e, por vezes, mesmo impossível”. (DUVAL, 2009, p. 34)

Nenhum estudante conseguiu fazer a conversão e não tinham noção de como iniciar a resolução. O professor retomou conceitos básicos de Matemática Financeira até chegar a explicação do que a situação exigia.

Para isso apresentou um exemplo com o registro em porcentagem (25%) e retomou as escrita fracionária desse valor ($\frac{25}{100}$) e a escrita decimal (0,25). Os estudantes lembravam da relação entre estes números racionais representados em diferentes registros.

Na sequência demonstrou, por meio de questionamentos, como calcular a porcentagem de um número, por exemplo, 25% de 2000. Os estudantes apontaram que deveria multiplicar 2000 por 0,25 obtendo nesse caso o valor 500. O professor novamente questionou; “agora se quisermos saber qual o saldo final obtido ou o montante como devemos proceder?”. Os estudantes ressaltaram que deveria somar o capital inicial com o juro, obtendo nesse caso, 2500.

No entanto o professor questionou como representar isso de forma algébrica e nenhum estudante sabia como proceder.

Assim o professor deu continuidade e explicou que 100% corresponde ao valor *um* no registro decimal, ou seja, se multiplicarmos por *um* teremos o mesmo valor, por isso caso a aplicação em 5 anos renda 25% precisamos usar o seguinte fator de atualização 1,25 para obter o saldo final diretamente, o que é necessário ao escrever um sistema linear em registro algébrico.

A partir disso cada dupla fez a representação do sistema de acordo com a explicação e ao final o professor conferiu o sistema escrito por cada grupo para que pudessem dar prosseguimento a resolução.

Diferentemente do que ocorreu na situação anterior, nesta todos os estudantes usaram o método da adição, alegando que o uso da Regra de Cramer é complicado quando trabalha-se com valores maiores, além disso o sistema construído envolvia números racionais representados na forma decimal.

Todos os estudantes encontraram a solução desse sistema possível e determinado, no entanto, alguns realizavam parte da resolução e solicitavam a correção do professor. Solicitaram isso, pois foi uma resolução demorada, então era melhor prever antecipadamente um erro do que somente ao final da resolução.

A situação três apresentou uma situação no registro tabular. Os estudantes tiveram mais facilidade em organizar o registro algébrico do que quando as informações estavam todas expressas em língua materna. Mesmo assim alguns estudantes ainda apresentaram dúvidas quanto a organização correta do sistema linear, no que se refere aos dados que precisavam ser agrupados em cada equação.

Apenas uma dupla usou a Regra de Cramer e as demais usaram o método da adição. A dupla que usou a Regra de Cramer justificou que a situação apresentava valores menores, o que facilitaria a resolução.

A última situação provocou algumas dúvidas e discussões entre os estudantes. Conseguiram escrever as duas equações referentes ao sistema linear, mas não sabiam como encontrar a terceira equação. Esta situação foi inserida com o propósito de mostrar aos estudantes que nem sempre é necessário que o sistema tenha exatamente três equações e três incógnitas.

Foram orientados a tomar cuidado ao escolherem as letras para representar os números de cápsulas de cada um dos pacientes. Isto porque a situação já explicitava que os pacientes eram denominados pelas letras A, B e C. Através de questionamentos o professor orientou como deveriam escrever a terceira equação até que todas as duplas chegaram a escrita $x = \frac{y}{2}$. Para evitar o uso de um número racional representado na forma fracionária alguns estudantes optaram em reescrever esta expressão deixando a na forma $2x = y$.

Nessa situação perceberam que não seria possível o uso da Regra de Cramer pois a situação não configurava uma matriz quadrada.

As duplas aplicaram o método da adição, mas algumas precisaram refazer o procedimento para encontrar a solução correta. Deveriam considerar ainda que a situação solicitava apenas a quantidade de cápsulas tomadas mensalmente pelo paciente C.

O professor orientou os estudantes a sempre testarem a solução encontrada em todas as equações do sistema linear como forma de garantir que os valores encontrados estivessem corretos.

Todas as duplas encontraram a solução. Destaca-se, no entanto, que nas quatro situações apresentadas somente uma dupla escreveu respostas ao final da resolução, conforme orientado inicialmente pelo professor.

Atividade 10

a) *Escreva uma situação problema que represente o sistema linear abaixo:*

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y+2z=10 \\ 3x+2y+2z=13 \end{cases}$$

b) *Escreva uma situação problema que represente o sistema linear abaixo:*

Objetivo: verificar se o estudante faz a conversão de sistemas lineares representados no registro algébrico e gráfico para o registro em língua materna.

Essa atividade constituiu uma das mais complexas pois além de efetuarem a conversão, os estudantes ainda tinham o desafio de escrever uma situação real já tendo presente no primeiro caso os valores dos coeficientes das incógnitas e dos termos independentes. O segundo sistema proporcionou um pouco mais de liberdade na inserção destes valores, no entanto ainda continuaram as dificuldades.

Esta foi a última atividade a ser aplicada, e por já estarem no final do ano letivo e devido as demais classes do 2º ano já terem iniciado o conteúdo referente a Análise Combinatória, não foi possível corrigir a atividade com os estudantes a fim de perceberem os equívocos que cada grupo cometeu em cada uma das situações.

A escrita dos sistemas lineares em registro em língua materna obedeceu ao que estava previsto no registro algébrico, mas não atendeu aos requisitos lógicos, alguns grupos criaram situações hipotéticas não condizentes com a realidade conforme pode ser visto na Figura 47.

Figura 47 – Conversão RA → RLM pela dupla de estudantes A e T

a) Escreva uma situação problema que represente o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y+2z=10 \\ 3x+2y+2z=13 \end{cases}$$

Uma lanchonete vende três tipos de pirulito (x, y e z), na compra de um pirulito de cada tipo o valor a ser pago é de 6 reais. Na compra de 2 pirulitos do tipo x, 1 do tipo y e 2 do tipo z o valor a ser pago é de 10 reais. E na compra de 3 pirulitos do tipo x, 2 do tipo y e 2 do tipo z, o valor a se pagar é de 13 reais. Qual o valor de cada pirulito?

Fonte: dados do autor (2017)

Em relação ao segundo sistema, uma equipe não conseguiu realizar a conversão para o registro em língua materna e os três grupos que fizeram não conseguiram fazer de modo adequado conforme pode ser verificado na Figura 48.

Figura 48 – Conversão RG →RLM pela dupla de estudantes C e J

S.I $\begin{cases} 4x+4y+4z=15 \\ 2x+2x+2z=32 \\ x+y+z=19 \end{cases}$

Uma loja de eletrodomésticos possui três modelos diferentes de batedeiras. Cada batedeira do modelo A possui 4 velocidades, 4 botões e 4 batedores. A batedeira do modelo B possui 2 velocidades, 2 botões e 2 batedores. A batedeira do modelo C possui 1 velocidade, 1 botão e 1 batedor. Sabendo que, no momento, a loja dispõe, separadamente, de 15 motores de velocidade, 32 botões e 19 batedores, quantas batedeiras de cada modelo serão vendidas usando todas as peças do estoque?

Fonte: dados do autor (2017)

Avaliação individual e sem consulta referente aos sistemas lineares 3 x 3 (Primeira parte)

Resolva as duas situações abaixo, encontrando o conjunto solução para cada situação apresentada.

1. *(INSPER- 2009 - adaptado) Renato decidiu aplicar R$ 100 000,00 em um fundo de previdência privada. O consultor da empresa responsável pela administração do fundo sugeriu que essa quantia fosse dividida em três partes x, y e z, que seriam aplicadas em três investimentos A, B e C, respectivamente. Em seguida, mostrou a Renato duas simulações do desempenho da aplicação, considerando dois cenários distintos para um período de 5 anos.*

Cenário	*Rendimento previsto para um período de 5 anos*			*Saldo previsto após 5 anos*
	Investimento A	*Investimento B*	*Investimento C*	
Conservador	*100%*	*50%*	*25%*	*R$ 170 000,00*
Otimista	*200%*	*100%*	*50%*	*R$ 240 000,00*

Com essas informações, determine os valores de x, y e z sugeridos pelo consultor.

2. *UFPE 2011. Uma fábrica de automóveis utiliza três tipos de aço A_1, A_2 e A_3 na construção de três tipos de carros, C_1, C_2 e C_3. A quantidade dos três tipos de aço, em toneladas, usados na confecção dos três tipos de carro, está no quadro a seguir:*

	C_1	C_2	C_3
A_1	2	3	4
A_2	1	1	2
A_3	3	2	1

Se foram utilizadas 26 toneladas de aço do tipo A_1, 11 toneladas do tipo A_2 e 19 toneladas do tipo A_3, qual o total de carros construídos (dos tipos C_1, C_2 e C_3) ?

A avaliação teve como objetivo verificar as aquisições conceituais dos estudantes ao final da aplicação da sequência didática, por isso foi realizada individualmente, sem consulta e sem intervenção do professor com atividades que englobavam os diferentes registros de representação abordados durante a aplicação da sequência didática.

As atividades consistiam em questões envolvendo tratamentos, conversões e necessidade de mobilização destes diferentes registros de representação semiótica. Esta avaliação foi realizada em um único momento, mas para fins de análise, foi organizada em duas partes.

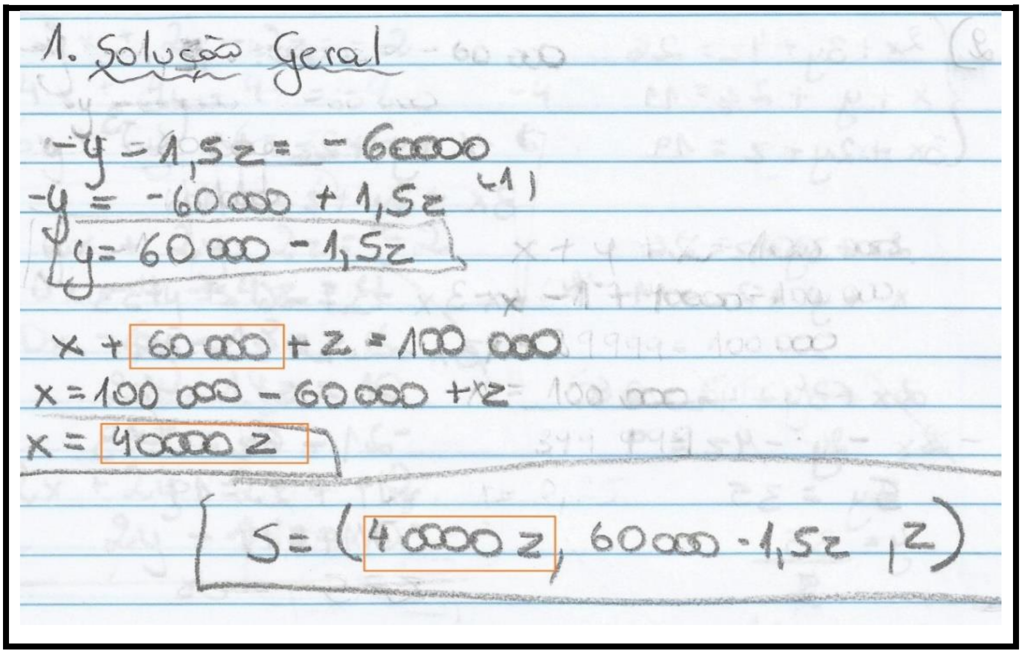
Em relação a ***questão 01*** destaca-se que oito estudantes converteram corretamente o registro em língua materna para o registro algébrico e somente um estudante não conseguiu realizar a conversão.

Todos os estudantes usaram o método da adição. Um estudante iniciou usando a Regra de Cramer, mas ao verificar que o determinante principal teve o valor zero, escreveu “não deu certo” e mudou de método. Possivelmente esta expressão “não deu certo” está vinculada ao fato de que foram orientados a usar a Regra de Cramer somente quando os resultados do determinante principal forem diferentes de zero.

Dos oito estudantes que escreveram o sistema, sete fizeram os tratamentos algébricos adequados por meio do método da adição e obtiveram o resultado final $0y + 0z = 0$. Um estudante errou no tratamento algébrico, mas obteve o mesmo resultado final apresentado pelos demais estudantes.

No entanto, nenhum estudante escreveu a solução geral de forma correta, sendo que cinco estudantes consideraram que haveria duas variáveis livres. Dois estudantes compreenderam tratar-se de apenas uma variável livre, mesmo assim cometeram erros ao isolar um das incógnitas para obter o valor das demais conforme a Figura 49. Dois estudantes não escreveram a solução referente a primeira questão da avaliação.

Figura 49 – Solução da questão 01 da avaliação final apresentada pelo estudante A



Fonte: dados do autor

Em relação a ***questão 02***, os estudantes inicialmente precisavam converter dados no registro tabular para o algébrico e, na sequência, fazer o tratamento algébrico usando um dos métodos estudados: adição, escalonamento ou Regra de Cramer. Sete estudantes realizaram a conversão de modo adequado e um estudante não organizou os dados na forma convencional de um sistema linear, já organizou os dados em uma matriz para o cálculo de determinantes.

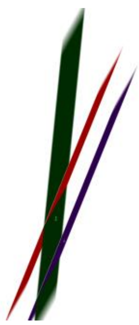
Quatro estudantes usaram a Regra de Cramer, sendo que três obtiveram os resultados esperados e um não terminou a resolução. A verificação da resolução efetuada pelo estudante evidenciou que os determinantes obtidos estavam errados.

Cinco estudantes usaram o método da adição e quatro encontraram corretamente a solução deste sistema. Um estudante errou já no início dos tratamentos algébricos. Ressalta-se que nenhum estudante optou em usar o método do escalonamento.

Avaliação individual e sem consulta referente aos sistemas lineares (segunda parte)

3. *Complete o quadro a seguir:*

Sistema	Proporcionalidade nos coeficientes e no termo independente ou combinação linear	Posição relativa entre os planos	Solução	Classificação
$\begin{cases} 2x+2y-2z=-2 \\ 4x+4y-4z=-4 \\ 6x+6y-6z=-6 \end{cases}$				
$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+y-z=1 \\ x+y-z=-10 \end{cases}$				
$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 4x+y+3z=7 \end{cases}$				
$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y+2z=10 \\ 3x+2y+2z=13 \end{cases}$				

$\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 5x+2y+z=2 \\ 9x+3y+5z=5 \end{cases}$				
$\begin{cases} x+y-z=1 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$				
$\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$				
$\begin{cases} 3x+2y+2z=10 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$				

A ***questão 3*** propunha verificar se os estudantes articulavam os diferentes registros de representação semiótica dos sistemas lineares como forma de garantir maior controle sobre os resultados obtidos em relação a classificação e a escrita da solução de sistemas lineares 3 x 3.

A posição relativa entre os planos poderia ser representada no registro gráfico ou em língua materna. Todas as oito possíveis posições entre os planos no espaço foram inseridas nesta atividade, mas tomou-se o cuidado de organizá-las de forma que não deixassem dúvidas quanto a visualização, pois a avaliação não foi realizada com o auxílio do GeoGebra.

Primeiro sistema: tratava-se de um sistema possível e indeterminado formado por três planos coincidentes, implicando em três equações que entre si, mantinham proporcionalidade tanto nos coeficientes das incógnitas quanto nos termos independentes.

Verificou-se que todos os estudantes justificaram corretamente, no entanto ao relacionar a proporcionalidade à posição relativa entre os planos um estudante não reconheceu tratar-se de planos coincidentes.

Constatou-se ainda que alguns estudantes usaram a palavra “retas” para referirem-se a “planos”. Isso ocorreu em mais algumas justificativas durante a avaliação.

Todos classificaram corretamente o sistema como possível e indeterminado, exceto o estudante que não estabeleceu a relação correta. Este estudante afirmou tratar-se de “planos paralelos”, mas classificou o sistema como possível e determinado, ou seja, classificou de forma aleatória, sem demonstrar conhecimento da relação entre a posição relativa de planos e a classificação dos sistemas lineares.

Conforme apontado em outros trabalhos a solução geral foi o grande entrave para a maioria dos estudantes e isso já havia ocorrido durante a aplicação da sequência didática.

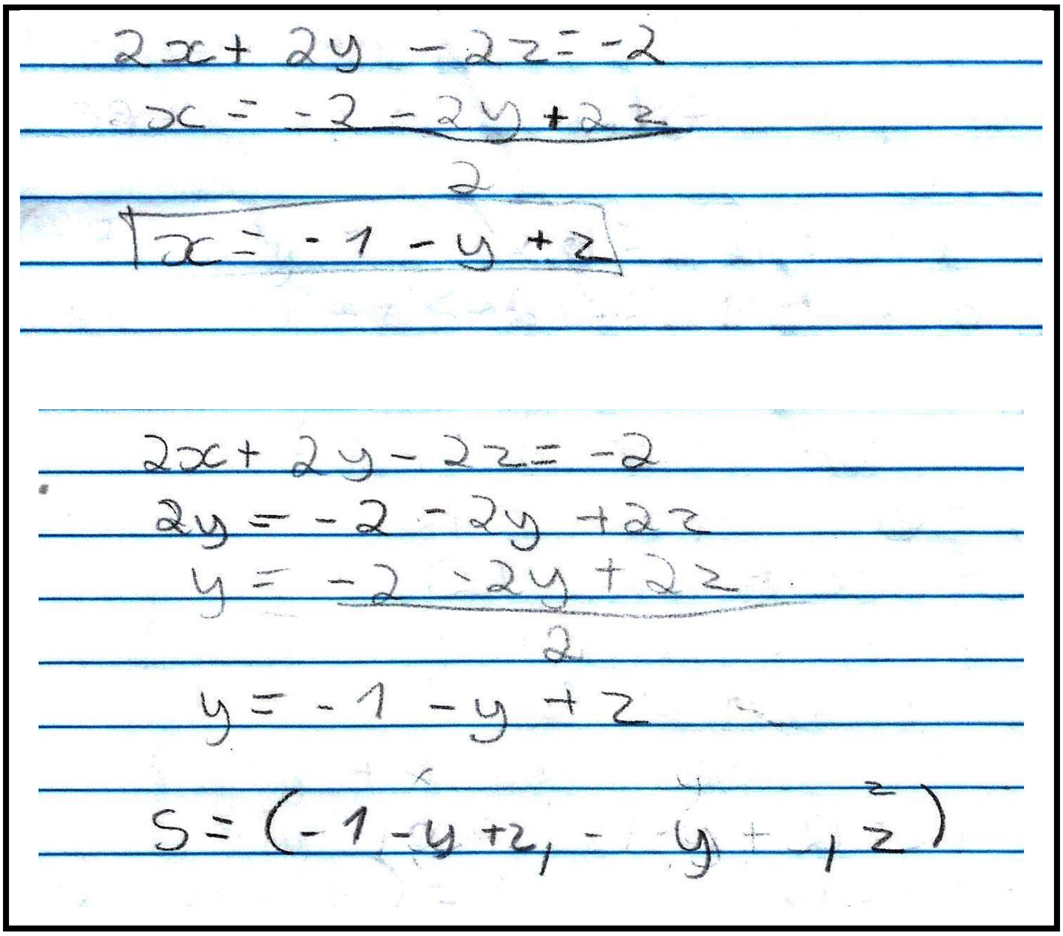
Em alguns casos os estudantes necessitariam resolver todo o sistema a fim de escrever a solução geral a partir dos dados obtidos, mas em outros não havia essa necessidade, como nesse primeiro. Ao observar que todas as equações são proporcionais o estudante já poderia saber que o resultado obtido na resolução de ambas às equações seria $0x + 0y + 0z = 0$.

Um dos propósitos foi verificar se o estudante reconhecia as situações em que não precisava resolver todo o sistema para escrever a solução de um sistema, pois o apoio a outros tipos de registros já permitiria a escrita da solução.

Todos os estudantes resolveram o sistema linear para escrever a solução geral. Talvez tenham ficado inseguros quanto a isso, pois geralmente pede-se que os estudantes justifiquem os resultados.

Dois estudantes fizeram o tratamento algébrico de modo errado e dos sete que resolveram corretamente somente três escreveram a solução de modo correto, sendo que um ainda simplificou o resultado obtido, considerando que haveria duas variáveis livres (Figura 50).

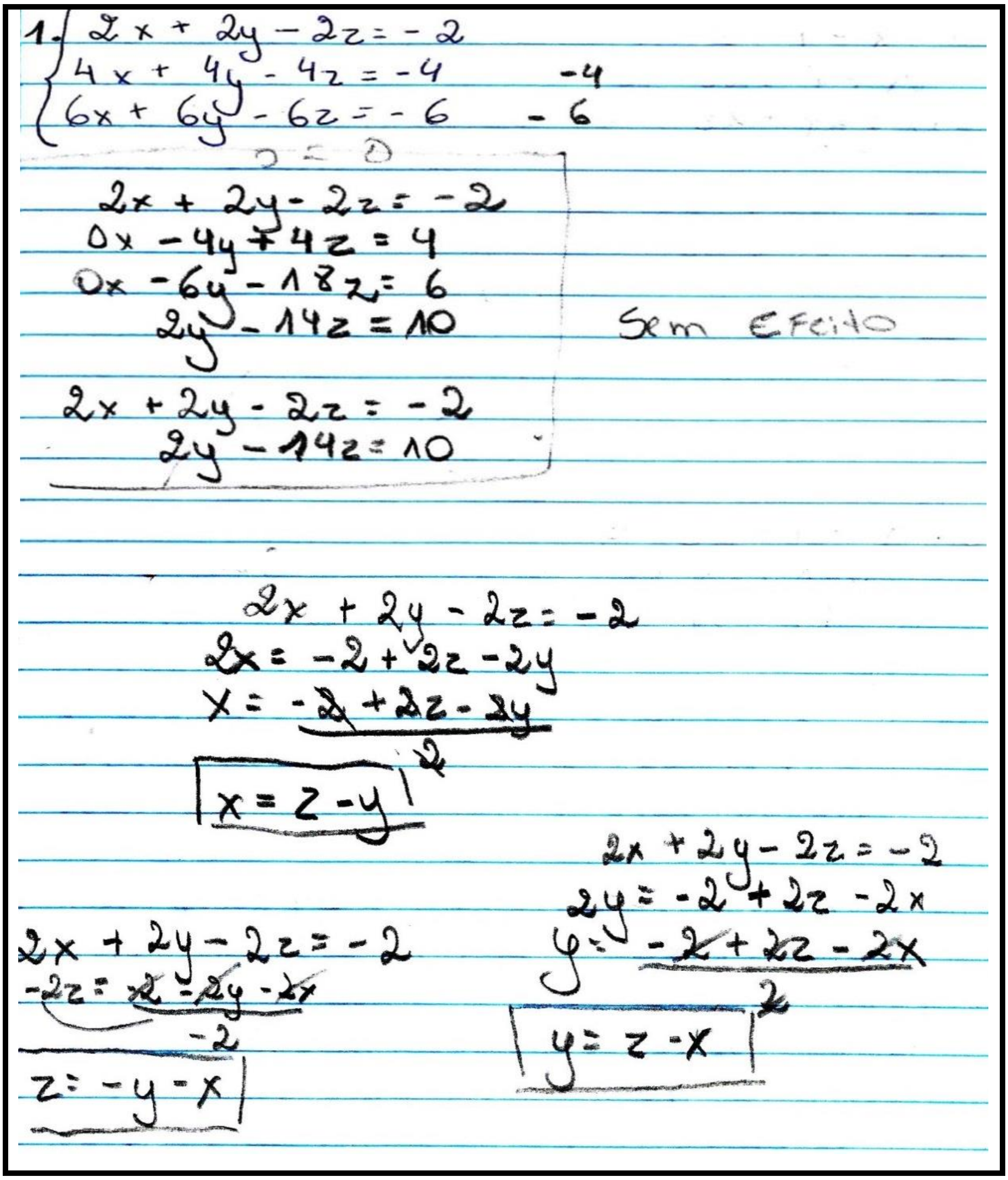
Figura 50 – Solução de um SPI referente ao 1º sistema da questão 03 da avaliação final pelo estudante T



Fonte: dados do autor (2017).

Dois estudantes apenas esqueceram de escrever que o resultado de x deveria ser dividido por dois. Deveria constar a resposta x = $\frac{2-2y+2z}{2}$ e escreveram apenas $x = 2 - 2y + 2z$. Um estudante deixou em branco e outro estudante não considerou que a solução teria duas variáveis livres. A Figura 51 mostra o tratamento algébrico efetuado pelo estudante A. Ao usar o método da adição e encontrar em ambos os resultados $2y - 14z = 10$, percebeu que não precisaria ter resolvido (apenas observar a proporcionalidade) e escreveu ao lado a resolução "sem efeito", mas não estabeleceu a relação adequada entre as incógnitas ao escrever a solução geral.

Figura 51 – Resolução do primeiro sistema da questão 03 da avaliação final pelo estudante A



1. $\begin{cases} 2x + 2y - 2z = -2 \\ 4x + 4y - 4z = -4 \quad -4 \\ 6x + 6y - 6z = -6 \quad -6 \end{cases}$

$0 = 0$

$2x + 2y - 2z = -2$
$0x - 4y + 4z = 4$
$0x - 6y - 18z = 6$
$2y - 14z = 10$

Sem Efeito

$2x + 2y - 2z = -2$
$2y - 14z = 10$

$2x + 2y - 2z = -2$
$2x = -2 + 2z - 2y$
$x = \dfrac{-2 + 2z - 2y}{2}$
$\boxed{x = z - y}$

$2x + 2y - 2z = -2$
$-2z = \dfrac{2 - 2y - 2x}{-2}$
$\boxed{z = -y - x}$

$2x + 2y - 2z = -2$
$2y = -2 + 2z - 2x$
$y = \dfrac{-2 + 2z - 2x}{2}$
$\boxed{y = z - x}$

Fonte: dados do autor (2017)

Segundo sistema: formado por dois planos coincidentes e um terceiro paralelo a estes dois, implicando em duas equações com proporcionalidade entre si tanto nos coeficientes das incógnitas quanto nos termos independentes e a terceira equação mantendo proporcionalidade com as outras duas equações somente nos coeficientes das incógnitas, sendo portanto, um sistema impossível.

Seis estudantes justificaram corretamente e três não estabeleceram a relação correta. Embora um dos estudantes não tenha justificado corretamente observou-se na sequência que identificou a posição relativa entre os planos nesta situação de modo correto.

Constatou-se ainda que um dos estudantes que escreveu corretamente a relação entre o registro algébrico e a proporcionalidade, não o fez para a posição relativa entre os planos considerando-os todos como paralelos, possivelmente por ser esse o primeiro registro gráfico abordado em relação a sistemas impossíveis e era a forma como todos os sistemas impossíveis eram representados nos sistemas lineares 2 x 2. Três estudantes não estabeleceram de forma correta a relação entre a proporcionalidade e a posição relativa dos planos.

Em relação a classificação deste sistema apenas um estudante classificou de modo errado e não escreveu a solução.

Dentre os estudantes que responderam de forma correta, três não resolveram o sistema possivelmente por compreenderem que não havia essa necessidade por tratar-se de um sistema impossível.

Terceiro sistema: tratava-se de um sistema linear que não apresentava proporcionalidade entre as equações, mas combinação linear entre as duas primeiras equações para obter a terceira e essa combinação linear ocorria tanto os coeficientes das incógnitas quanto nos termos independentes. Portanto os três planos eram concorrentes entre si, mas com uma reta em comum, configurando um sistema possível e indeterminado.

Não seria necessário que o estudante identificasse a combinação linear para obter êxito na resolução. A partir do momento que percebesse tratar-se de um caso em que não há proporcionalidade haveriam três possibilidades: SPD, SPI ou SI. Deveria fazer a resolução do sistema e de acordo com o resultado obtido classificar. Ressalta-se no entanto que se o estudante identifica a combinação linear dispõe de mais um mecanismo no qual pode comparar os resultados obtidos e verificar se fez algo errado durante a resolução.

Pontua-se ainda que se os estudantes apresentassem erros nos tratamentos algébricos, outros tipos de registros poderiam dar indícios para que eles investigassem o possível erro que os fez classificar equivocadamente o sistema linear.

Apenas um estudante não identificou que não havia proporcionalidade. Dentre os outros, seis afirmaram tratar-se de combinação linear, mas somente quatro relacionaram corretamente: combinação linear que aplica-se tanto aos coeficientes das incógnitas quanto aos termos independentes.

Em relação a posição relativa entre os planos verificou-se que mesmo a maioria dos estudantes afirmando não haver proporcionalidade não relacionaram isso a planos concorrentes. Alguns estudantes indicaram a posição entre os planos usando unicamente o fato de entenderam que se tratava de um SPI e associaram a planos coincidentes. Não lembraram que nos sistemas lineares 3 x 3 há três possibilidades de posição entre os planos para os sistemas possíveis e indeterminados.

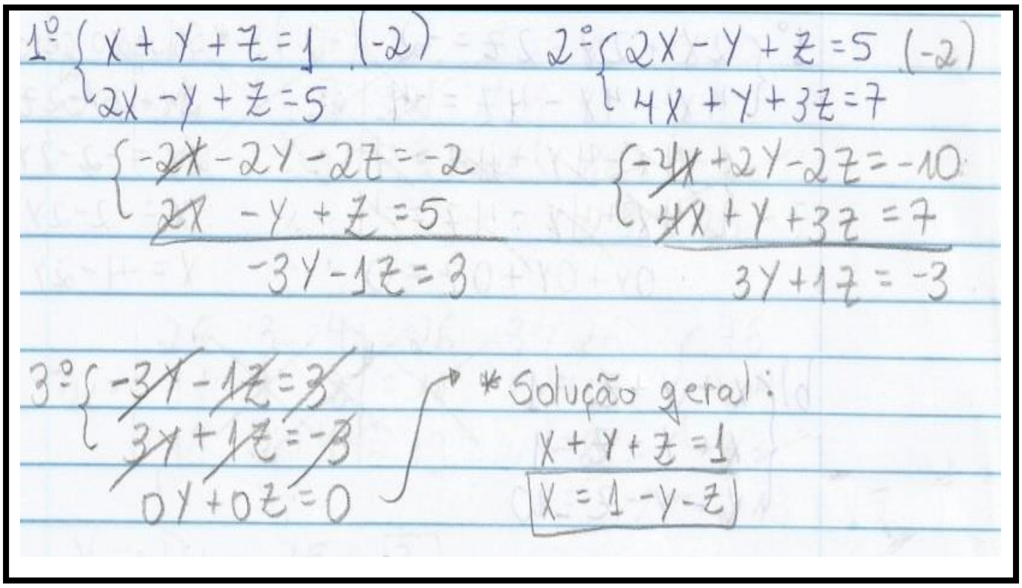
Assim, dois estudantes erraram indicando tratar-se de planos coincidentes e quatro responderam de forma correta: “os planos intersectam-se em uma reta” ou “os planos são concorrentes com uma reta em comum”. Um estudante relacionou a não proporcionalidade a planos paralelos (mas classificou como SPI) e ainda um estudante deixou a resposta em branco. Um estudante respondeu de forma parcialmente correta, pois afirmou que os planos eram concorrentes, mas não deu continuidade a explicação, afirmando por exemplo, que eram concorrentes com uma reta em comum.

Dentre os oito estudantes que afirmaram não ocorrer proporcionalidade, seis classificaram corretamente como SPI, um classificou como SI por realizar o tratamento algébrico de forma errada e outro deixou em branco.

Dos estudantes que admitiram ser SPI, havia a necessidade de resolver o sistema linear e escrever a solução geral.

Apenas um estudante escreveu a solução geral de modo correto, contendo apenas uma variável livre. Quatro estudantes escreveram a solução geral considerando duas variáveis livres (Figura 52), como ocorreu no primeiro exemplo, não perceberam tratar-se de uma situação diferente, ou seja, não fizeram a articulação entre os registros de forma adequada. Um estudante escreveu parcialmente correto, pois errou nos tratamentos algébricos ao usar o método da adição.

Figura 52 – Resolução do 3º sistema da questão 03 da avaliação final pelo estudante C



Fonte: dados do autor (2017)

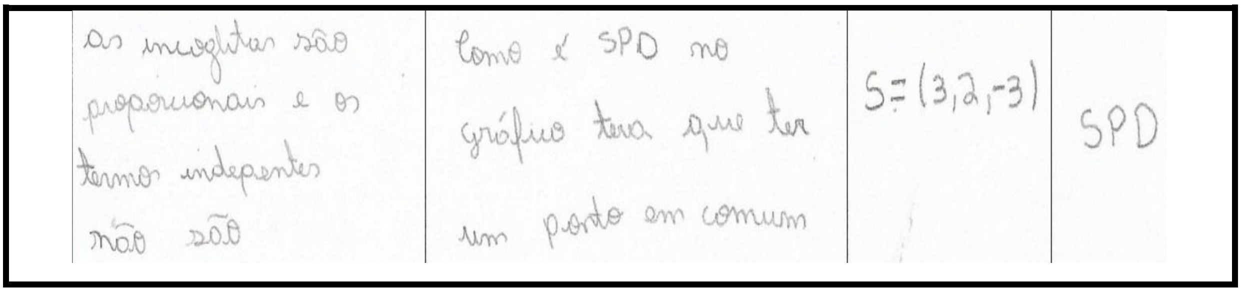
Desse modo percebeu-se que os estudantes que compararam os diferentes registros de representação entre si acertaram pois tiveram um maior controle sobre as respostas. Estudantes que responderam cada um dos itens do mesmo sistema linear de forma isolada não obtiveram o mesmo êxito.

Quarto sistema: tratava-se de um sistema possível e determinado pois não havia proporcionalidade tampouco combinação linear, havendo três planos concorrentes e com um único ponto em comum. Caso o estudante ficasse em dúvida quanto a combinação linear pois nem sempre está evidente poderia resolver para confirmar que se tratava de SPD.

Possivelmente alguns estudantes consideraram haver combinação linear pois ao somar os coeficientes das incógnitas *x* e *y* das duas primeiras equações para obter a terceira havia indícios de ser combinação linear, no entanto, isso não se aplicou ao coeficiente da incógnita *z*.

Fica evidente na resolução do estudante J, por exemplo, que não fez a articulação entre os diferentes registros a fim de verificar possíveis equívocos (Figura 53).

Figura 53 – Falta de articulação entre os registros demonstrada pelo estudante J



Fonte: dados do autor (2017)

Três estudantes consideraram existir combinação linear. Cinco consideraram não haver proporcionalidade, classificando de modo correto e um afirmou não haver proporcionalidade, mas classificou o sistema como impossível.

No entanto apenas dois estudantes encontraram a solução do SPD, todos os demais erraram nos tratamentos algébricos, mas como encontraram valores únicos para satisfazer as incógnitas do sistema não perceberam que os valores encontrados estavam errados. Conforme já havia sido orientado pelo professor deveriam ainda testar todos os valores encontrados nas três equações do sistema a fim de verificar o equivoco.

Quinto sistema: neste sistema não ocorria proporcionalidade, mas combinação linear entre os coeficientes das incógnitas das duas primeiras equações para obter a terceira, no entanto a combinação linear não se estendia para os termos independentes, tendo como representação gráfica três planos concorrentes sem nenhum ponto em comum.

Um estudante não respondeu este item, três estudantes responderam corretamente. Três estudantes afirmaram tratar-se de combinação linear mas não complementaram a resposta. Um estudante afirmou ainda que não havia proporcionalidade, mas classificou o sistema como possível e indeterminado e outro fez mesma afirmação mais classificou como possível e determinado.

Em relação a posição relativa entre os planos um estudante afirmou não haver proporcionalidade entre as equações e manteve a coerência ao afirmar que eram planos concorrentes. Três estudantes fizeram o registro gráfico correto e um deixou em branco. Um estudante não articulou a combinação linear a planos concorrentes e outro afirmou que havia proporcionalidade mas representou com três planos paralelos. Um último estudante afirmou tratar-se de planos concorrentes, mas não completou a afirmação com o fato de que não haverá nenhum ponto em comum, por isso foi classificado como sistema impossível.

Cinco estudantes classificaram corretamente como SI, dois estudantes classificaram como SPI: um destes estudantes não interpretou corretamente o resultado obtido no tratamento algébrico $0y + 0z = 2$ e outro errou o tratamento algébrico. Dois estudantes classificaram ainda o sistema como SPD.

Sexto sistema: dois planos coincidentes e um terceiro plano concorrente a estes dois, implicando em duas equações que possuem proporcionalidade tanto nos coeficientes das incógnitas quanto nos termos independentes e uma terceira equação que não apresenta proporcionalidade em relação as outra duas, formando portanto um sistema impossível.

Nestes três últimos sistemas lineares da atividade diferentemente dos anteriores já havia a representação gráfica, mas o registro algébrico estava incompleto e a partir disso os estudantes precisavam classificar e obter possíveis equações que satisfizessem a situação apresentada.

Três estudantes relacionaram corretamente o registro gráfico ao algébrico e as justificativas de proporcionalidade, compreendendo tratar-se de dois planos coincidentes e um terceiro plano paralelo a estes. Três estudantes justificaram equivocadamente, através do registro algébrico, que o registro gráfico implicava em três planos coincidentes. Um estudante escreveu corretamente a justificativa referente a proporcionalidade mas não considerou isso ao escrever as equações. Dois estudantes responderam aleatoriamente.

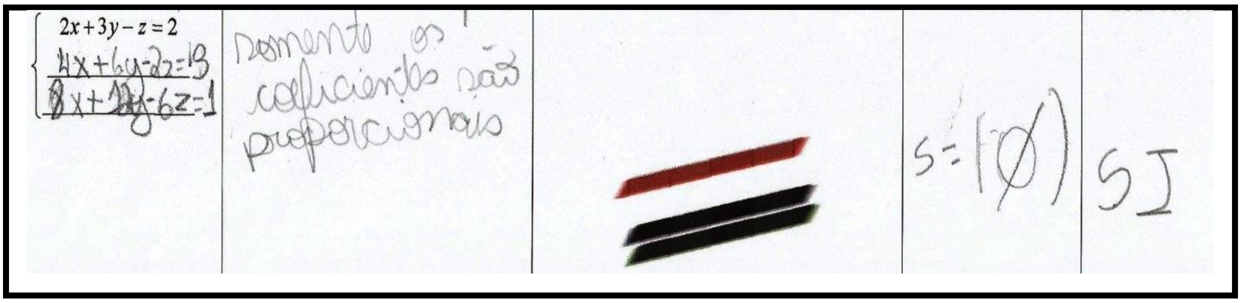
Mesmo que o professor tenha proposto anteriormente atividades em que ficou evidente que existem três diferentes situações para os sistemas possíveis e indeterminados implicando em escritas diferentes de solução geral, parte dos estudantes não considerou isso na avaliação.

Todos os estudantes classificaram corretamente como SPI, possivelmente o registro gráfico tenha permitido isso. No entanto não articularam com outros itens do mesmo sistema. Já em relação a solução geral nenhum estudante escreveu-a de forma correta. Dois estudantes não escreveram e dos sete que responderam todos cometeram os mesmos erros já apontados no sistema anterior, não considerando que tratava-se de uma situação diferente. O erro mais comum foi considerar apenas a primeira equação e escrever a solução com duas variáveis livres o que não se aplicava a esse caso.

Sétimo sistema: representado por três planos paralelos, o que algebricamente implica em três equações que mantém proporcionalidade entre si somente nos coeficientes das incógnitas, sendo classificado como um sistema impossível.

Sete estudantes relacionaram corretamente o registro gráfico com a proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas das três equações que não se estende aos termos independentes. Um estudante acertou parcialmente, pois errou o resultado de uma multiplicação em uma das equações tornando-a não proporcional conforme pode ser visto na Figura 54.

Figura 54 – Resolução do 7º sistema da atividade 03 da avaliação final pelo estudante V



Fonte: dados do autor (2017)

Oitavo sistema: dois planos paralelos e um terceiro que os intersecta, implicando em duas equações que apresentavam proporcionalidade entre si, nos coeficientes das incógnitas mas não nos termos independentes e uma terceira equação que não apresenta proporcionalidade em relação as outras duas, configurando um sistema impossível.

Três estudantes escreveram a mesma justificativa do sistema anterior ao verificar que também tratava-se de um SI, no entanto, desconsideraram a posição relativa entre os planos pois conforme estudado durante a sequência didática, são quatro possibilidades de posições relativas entre os planos que caracterizam um SI.

Quatro estudantes realizaram a atividade de modo correto, um estudante deixou em branco e um estudante escreveu o sistema linear no registro algébrico de modo correto, mas não justificou corretamente.

Em relação a classificação, dois estudantes deixaram em branco e os demais classificaram e escreveram a solução corretamente.

Pontua-se ainda que na avaliação o professor colocou, em algumas situações, equações cuja razão não consistia em um número inteiro, isso foi feito propositalmente a fim de verificar se os estudantes perceberiam que a razão nem sempre precisa ser expressa por um número inteiro.

Constatou se ainda que conforme apontado por Jordão (2011) a abordagem visual facilita a interpretação das posições relativas dos planos, o que não implica a eliminação do tratamento algébrico, especialmente nos sistemas possíveis e indeterminados.

Ainda de acordo com esta autora constatou-se também "que o registro gráfico auxilia o aluno na compreensão do significado do sistema possível e indeterminado, entretanto, isso não ocorre para a determinação do seu conjunto solução" (Jordão, 2011, p. 109).

Pontua-se ainda que independentemente dos resultados obtidos pelos estudantes, foi importante submetê-los a atividades de conversão e de coordenação de diferentes registros visando a apreensão conceitual.

> Não somente a mudança de registros levanta obstáculos que são independentes da complexidade conceitual do campo conceitual no qual se trabalha, mas, além disso, a ausência de coordenação entre diferentes registros cria muito frequentemente uma deficiência para as aprendizagens conceituais (DUVAL, 2009, p. 63).

Enfim por meio da observação dos critérios previamente estabelecidos no início da pesquisa, constatou-se que os estudantes evoluíram na compreensão dos aspectos relacionados ao objeto matemático sistemas lineares, realizando de maneira satisfatória os tratamentos, conversões e a articulação entre os diferentes registros para solucionar e classificar os sistemas lineares.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao buscar responder a questão problema deste trabalho "quais as contribuições de uma sequência didática elaborada sob a perspectiva da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval na aprendizagem do objeto matemático sistemas lineares no Ensino Médio" chegou-se as seguintes considerações:

a) A teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval que embasou essa pesquisa mostrou-se pertinente e de acordo com os objetivos propostos. Esta pesquisa contribuiu para que os estudantes do 2º ano do Ensino Médio compreendessem a resolução e a classificação de sistemas lineares e interpretassem os resultados obtidos em uma abordagem que favoreceu o tratamento, a conversão e a coordenação entre os diferentes registros de representação.

b) A análise do livro didático usado no IFC – Campus Ibirama permitiu compreender o que geralmente é proposto na abordagem dos sistemas lineares (predomínio do registro algébrico) e reformular algumas atividades com o objetivo de atender aos pressupostos da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval.

c) Em relação às conversões convém destacar que, dentre as possibilidades da realidade da sala de aula, propôs-se atividades de conversão de registros sempre nos dois sentidos, porque caracterizam situações diferentes a serem exploradas e ainda contendo conversões congruentes e não congruentes.

d) Ocorreram dificuldades em organizar situações em língua materna, pois ao pesquisar em livros didáticos, exames nacionais e vestibulares predominam os sistemas possíveis e determinados, no entanto a intenção era trabalhar com os três tipos de sistemas lineares.

e) Os estudantes apresentaram dificuldades na leitura e interpretação dos enunciados de algumas atividades. Essas dificuldades foram mais acentuadas quando os registros eram em língua materna, dado seu caráter geralmente não congruente conforme apontado por Duval (2009).

f) Constatou-se ainda dificuldades nos tratamentos algébricos nos sistemas lineares 2 x 2, mas de modo mais enfático nos sistemas lineares 3 x 3, especialmente erros envolvendo a manipulação algébrica e operações envolvendo os números inteiros, especialmente os números negativos.

g) Em relação aos métodos de resolução, nos sistemas 2 x 2 o professor apresentou os métodos da adição, da substituição e da comparação e nos sistemas lineares 3 x 3 abordou os métodos da adição, de escalonamento e a Regra de Cramer. Os estudantes tiveram a possibilidade de escolher o método que usariam na resolução do sistema, exceto as que tinham por objetivo sistematizar o uso de um determinado método.

h) Verificou-se que o método da adição foi o prioritariamente usado, tanto nos sistemas 2 x 2 quanto 3 x 3, embora ocorressem alguns erros nos tratamentos algébricos. O método da substituição foi usado de modo discreto nos sistemas 2 x 2 e a Regra de Cramer em algumas resoluções dos sistemas 3 x 3. Constatou-se que nenhum estudante usou o método do escalonamento nas atividades envolvendo os sistemas lineares 3 x 3, exceto quando o enunciado indicava que deveria ser usado. Essa constatação não condiz com a orientação contida na BNCC de usar o método de escalonamento, no entanto este documento não justifica a opção por este método de resolução.

i) Uma das dificuldades pontuais de todos os estudantes foi a escrita da solução geral de sistemas possíveis e indeterminados 3 x 3, pois há casos em que há apenas uma variável livre e outros em que são duas as variáveis livres e isso não foi plenamente compreendido pelos estudantes. Essa constatação também ocorreu no trabalho de Jordão (2011).

j) Ao abordar os sistemas lineares 3 x 3 uma dificuldade inicial ocorreu devido aos estudantes transferirem os conhecimentos adquiridos no estudo de sistemas lineares 2 x 2 e aplicarem de forma idêntica na classificação dos sistemas lineares 3 x 3. Por exemplo, nos sistemas lineares 2 x 2 um sistema impossível sempre implicava em duas retas paralelas, o que não necessariamente ocorre nos sistemas lineares 3 x 3, além de três planos paralelos, existem outras três possibilidades para classificar um sistema 3 x 3 como impossível.

k) O *software* GeoGebra foi uma importante ferramenta que possibilitou a compreensão do significado dos resultados obtidos no tratamento algébrico. No entanto, conforme apontado pela Teoria de Duval a compreensão e a interpretação dos resultados obtidos só foi possível através da articulação entre os diferentes registros de representação com atividades intencionalmente planejadas pelo professor.

l) Ainda em relação ao uso do GeoGebra constatou-se que na representação gráfica de sistemas lineares 3 x 3 ocorreu certa dificuldade de visualização quando os três planos eram concorrentes, não permitindo classificá-los de maneira confiável. Foi necessário fazer uso dos de recursos disponíveis no GeoGebra, o que limita a representação destes gráficos sem o auxilio de um *software*.

m) Ressalta-se ainda que o uso de um *software* permitiu um maior número de alterações dos valores das equações representadas algebricamente e a discriminação das variáveis visuais pertinentes apontadas pela Teoria de Duval.

n) Ao analisar a compreensão dos estudantes acerca de um objeto matemático é necessário ainda considerar os pontos de vista psicológico e pedagógico. Em relação ao ponto de vista psicológico verificou-se que ao final da aplicação da sequência didática os estudantes davam respostas relativamente espontâneas o que segundo Duval (2012a) está vinculado ao mecanismo de compreensão, além disso, identificou-se na avaliação individual final que conseguiram aplicar em outros contextos o que foi aprendido durante a sequência didática.

o) Em relação ao ponto de vista pedagógico constatou-se que demonstraram interesse pelas atividades propostas, e isso ficou cada vez mais evidente no decorrer da sequência, conforme interagiam com os outros estudantes e começaram a desenvolver certa autonomia intelectual, ou seja, a confiança na própria capacidade de aprender.

p) Foram 38 aulas dedicadas à exploração desse conteúdo de forma completa e integrando os diferentes registros de representação, no entanto, esse pode ser um dos entraves, pois em algumas redes de ensino os estudantes do Ensino Médio têm apenas três aulas semanais de Matemática e há toda uma gama de conteúdos a serem trabalhados além das outras atividades que a escola geralmente desenvolve durante o ano letivo.

q) A disponibilidade de laboratórios de Informática é outro fator agravante. Em diferentes momentos havia a necessidade de uso dos laboratórios ou então de notebooks para que as representações fossem tratadas conjuntamente, mas a indisponibilidade destes equipamentos não permitiu.

Enfim a aplicação desta sequência didática pode ser considerada satisfatória, pois a classe apresentava dificuldades em conteúdos básicos de Matemática, mas com exceção de um estudante, todos obtiveram avanços consideráveis no desenvolver das atividades como pode ser atestado também pelos resultados obtidos ao final da sequência didática por meio da avaliação individual.

Assim conclui-se que o estudante "não tem simplesmente sucesso, mas modificação da qualidade das produções. Esse salto qualitativo no desenvolvimento das competências e das performances aparece ligado à coordenação de sistemas semióticas nos alunos" (DUVAL, 2009, p. 19). E isso foi gradativamente evidenciado durante a aplicação da sequencia didática.

Ressalta-se ainda que a sequência didática descrita sofreu alterações visando melhor adequação a realidade da sala de aula e buscando promover de forma mais clara os objetivos propostos e que farão parte do produto educacional.

Espera-se que este material contribua com a prática do professor, por meio da leitura reflexão e adaptação servindo de base a novos encaminhamentos metodológicos. E que sirva ainda de subsídio aos cursos de formação inicial e continuada de professores, pois a Teoria de

Registros de Representação Semiótica de Duval constitui um importante suporte teórico/metodológico para que professores compreendam o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOLOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007. 218 p.

BATTAGLIOLI, Carla dos Santos Moreno. **Sistemas Lineares na 2ª série do Ensino Médio:** um olhar sobre os livros didáticos. 2008. 113 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.

BOEMO, Marinela da Silveira. **Registros de representação semiótica mobilizados no estudo de sistemas lineares no Ensino Médio**. 2015. 165 f. Dissertação (Mestrado) Curso de Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, 2015.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução a teoria e aos métodos. Porto: Porto, 1994. 335 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática ensino fundamental**. Brasília, 1998.

______. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática ensino médio**. Brasília, 2000.

______. Ministério da Educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2002.

______. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. v. 02. Brasília, 2006.

______. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos:** PNLD, 2015. Matemática: ensino médio. Brasília, 2014.

______. Ministério da Educação. **Projeto Pedagógico do Curso** Técnico em Vestuário Integrado ao Ensino Médio Campus Ibirama. Ibirama, 2015.

______.CAPES. **Documento de área 2013**. Disponível em http://www.avaliacaotrienal2013.capes.gov.br/documento-de-area-e-comissao. Acesso em: 10 mar 2015.

______. **Brasil no PISA 2015**: análises dos estudantes brasileiros. Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE). São Paulo: Fundação Santillana, 2016.

______. Ministério da Educação (MEC). **Base Nacional Comum Curricular.** 2016. 2ª versão. Disponível em: <http://historiadabncc.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf> Acesso em 31 mai 2017.

______. Ministério da Educação (MEC). **Base Nacional Comum Curricular**. 2017. 3ª versão. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 15 fev 2018.

BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. O cenário da pesquisa no Campo da Educação Matemática à Luz da Teoria de Registros de Representação Semiótica. **Perspectivas em Educação Matemática**, Campo Grande, v. 07, n. 13, p. 22-37, 2014.

CAMPOS, José Roberto Teixeira de. **Sistemas lineares**: uma proposta envolvendo álgebra e geometria. 2013. 90 f. Dissertação (Mestrado.) – Curso de Mestrado Profissional em Rede Matemática – PROFMAT, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013.

CATTO, Glória Garrido. **Registros de representação e o número racional:** uma abordagem nos livros didáticos. 2000. 168 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

COLOMBO, Janecler Aparecida Amorin. **Representações Semióticas no ensino:** contribuições para reflexões acerca dos currículos de matemática escolar. 2008. 253 f. Tese (Doutorado) – Curso de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

______, Janecler Aparecida Amorin; FLORES, Claudia Regina; MORETTI, Méricles Thadeu. Registros de Representação Semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **Zetetiké,** Campinas, v. 16, n. 29, p. 41-72, 2008. Disponível em: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2397>. Acesso em: 20 maio 2016.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto & aplicações. 2 ed. São Paulo: Ática, 2013. 320 p.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 11- 33.

_____. Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. **La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española**, Madrid, v. 09, n. 01, p. 143-168, 2006. Disponível em: <http://gaceta.rsme.es/index.php>. Acesso em: 19 abr. 2016.

______, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. 119 p.

______, Raymond. **Ver e ensinar Matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica. Organização Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011a. 160 p.

______, Raymond. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **Revemat**. Tradução de Méricles Thadeu. Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011b. Moretti. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96>. Acesso em: 10 jul. 2017.

_______, Raymond. **Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino de Matemática**. Tradução de Luciana Oliveira. Ponta Grossa: Práxis Educativa, 2012a, v. 7, nº02, p. 305-330, jul/dez 2012.

______, Raymond. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. Florianópolis: REVEMAT, 2012b, v.7, nº 02, p. 266-297,

FREITAS, Nilza Aparecida de. **Sistemas de Equações Lineares:** Uma proposta de atividades com abordagem de diferentes Registros de Representação Semiótica. 2013. 180 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

JORDÃO, Ana Lucia Infantozzi. **Um Estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3 x 3 no 2º ano do Ensino Médio.** 2011. 193 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: E.P.U, 1986. 99 p.

MAGGIO, Deise Pedroso; NEHRING, Cátia Maria. **Mapeamento de pesquisas que utilizam o referencial de registros de representação semiótica – RRS:** a produção em periódicos brasileiros. In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, São Paulo, 2016, p. 1-12.

NEMAN, Leonardo Silvestre. **Sistemas de equações lineares e suas interpretações.** 2013. 70 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2013.

PANTOJA, Lígia Françoise Lemos. **A conversão de registros de representações semióticas no estudo de sistemas de equações algébricas lineares.** 2008. 105 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

QUEIROZ, Carlos Antônio; RAMOS, Elenita Eliete de Lima; SIPLE, Ivanete Zuchi. **Tópicos Especiais em Ciências I:** representação semiótica, tecnologias educacionais e atividades experimentais. Florianópolis. Publicações do IF-SC, 2011. 105 p.

RUFATO, Sônia Aparecida Carreira. **Sistemas lineares, aplicações e uma sequência didática.** 2014. 55 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

APÊNDICE A – Formulário de solicitação e autorização para o desenvolvimento da pesquisa

FURB

www.furb.br

UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU

PROPEX - PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO, EXTENSÃO E CULTURA
COMITÊ DE ÉTICA NA PESQUISA EM SERES HUMANOS - CEPH

FORMULÁRIO DE SOLICITAÇÃO E AUTORIZAÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO DE PESQUISA

Este formulário deve ser preenchido (por todo acadêmico de Graduação ou Pós-Graduação que deseja realizar a pesquisa) como instrumento de solicitação e autorização do local da pesquisa.

Para ser preenchido pelo Pesquisador:

Título:	As contribuições da Teoria de Registros de Representação Semiótica na aprendizagem dos sistemas lineares no 2º ano do Ensino Médio
Pesquisador Responsável:	Eduardo Brandl
Acadêmicos:	Eduardo Brandl
Tipo de trabalho:	( ) TCC ( ) IC (x) Dissertação ( ) Monografia ( ) Outros Qual?
Objetivos:	Analisar as contribuições de uma sequência didática elaborada tendo por base a teoria de registros de representação semiótica de Duval na aprendizagem dos sistemas lineares por estudantes do 2º ano do Ensino Médio.
Metodologia:	A metodologia de pesquisa adotada será do tipo qualitativo, caracterizando-se como um estudo de caso, pois segundo Yin (2010) trata-se de uma importante estratégia metodológica que permite ao pesquisador aprofundar a análise em relação ao fenômeno estudado, e observar características e possibilidades nem sempre apontados em outros tipos de pesquisa. "Um estudo de caso é uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos." (YIN, 2010, p.39). A metodologia de ensino adotada será a aplicação de uma sequência didática, tendo por base situações contextualizadas e problematizadas e a análise será realizada de acordo com a Engenharia Didática de Artigue. As etapas da pesquisa estão resumidamente descritas a seguir: Estado da arte – pesquisa em diferentes bases de dados: Biblioteca Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), Portal da Capes, Scielo, Google Acadêmico e os Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), utilizando as palavras chave representação semiótica e sistemas lineares. Selecionar os trabalhos considerados mais significativos e que contribuam com este projeto de pesquisa. Análise do livro didático de Matemática do 2º ano do Ensino Médio usado na rede de ensino em que será aplicada a sequência didática, tendo como foco a análise das atividades propostos sob a ótica da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval.

	Elaboração da sequência didática – fundamentando-se na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, selecionar atividades em livros, dissertações, dentre outros, que possibilitem tratamentos, conversões e a transição entre os diferentes tipos de registros dos números racionais. Definição dos instrumentos de coleta de dados - para a coleta de dados todas as aulas serão gravadas em áudio e as produções dos alunos serão digitalizadas. Definição das categorias de análise – serão definidas categorias de análise de cada atividade proposta de acordo com a Teoria de Duval, sempre buscando identificar se os alunos conseguem transitar entre pelo menos duas representações do objeto matemático estudado e se consegue explorá-lo de forma correta. Aplicação da sequência e análise dos resultados- após a elaboração será feita a aplicação e análise dos resultados obtidos de acordo com os critérios elencados anteriormente. Elaboração do produto educacional – após a análise serão feitos, se necessário, ajustes e adequações na sequência didática, culminando com o produto educacional. Perpassando todas estas etapas, será realizada a pesquisa bibliográfica que fundamentará este trabalho.

Data da solicitação: 02/08/2017

Para ser preenchido pelo local onde será realizada a pesquisa:

INSTITUIÇÃO: Instituto Federal Catarinense

ÓRGÃO/DEPTO: Campus Ibirama / Coordenação Geral de Ensino

Responsável:	**Nome:**	Fernando José Taques
	Cargo:	Diretor Geral Pró Tempore
	Assinatura e carimbo:	Prof. Dr. Fernando J. Taques Diretor Geral Pró Tempore Portaria nº 1399/2014 - DOU 25/06/2014 IFC - Campus Ibirama

Data da aprovação: 02/08/2017

APÊNDICE B – Termo de consentimento livre e esclarecido assinado pelos pais e/ou responsáveis

1. Identificação do Projeto de Pesquisa	
Título do projeto: As contribuições da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval na aprendizagem de sistemas lineares no Ensino Médio	
Área do conhecimento: Matemática	
Curso: Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática	
Número de participantes no centro: 35	Número total de participantes: 35
Patrocinador da pesquisa: Universidade Regional de Blumenau – FURB	
Instituição onde será realizada: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense – Campus Ibirama	
Nome dos pesquisadores e colaboradores: Eduardo Brandl	

A pessoa abaixo-identificada, que está sob sua responsabilidade, é convidada a participar do projeto de pesquisa acima identificado. Este documento contém todas as informações necessárias sobre a pesquisa que estamos fazendo. Sua colaboração neste estudo será de muita importância para nós, mas se você ou a pessoa sob sua responsabilidade desistirem a qualquer momento, isso não lhes causará nenhum prejuízo.

2. Identificação do Participante da Pesquisa e do Responsável		
Nome do participante da pesquisa:		Data de nascimento:
Nome do responsável:		Data de nascimento:
Vínculo do responsável com o participante da pesquisa:		
Profissão:		Nacionalidade:
Estado civil:	CPF/MF:	RG ou RNE:
Endereço:		
Telefone:	E-mail:	

3. Identificação do Pesquisador Responsável	
Nome: Eduardo Brandl	
Profissão: Professor	Número do registro no Conselho:
Endereço: Rua João Ramos, 97 – Trombudo Central – SC	
Telefone: (47)3357-6200	E-mail: eduardo.brandl@ifc.edu.br

Eu, responsável pelo menor acima identificado, autorizo sua participação, como voluntário, no presente projeto de pesquisa. Discuti com o pesquisador responsável sobre a minha decisão em autorizar a sua participação e estou ciente de que:

1. Esta pesquisa visa analisar as possíveis contribuições da Teoria de Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Raymond Duval na elaboração e aplicação de uma sequência de atividades referentes ao conteúdo matemático sistemas lineares, previsto para ser trabalhado no 2º ano do Ensino Médio.
2. O **procedimento** para a coleta de dados será a gravação das aulas em áudio e a digitalização das atividades desenvolvidas pelos estudantes.
3. O(s) **benefício(s)** esperado(s) são: aprender de forma integrada e aprofundada o conteúdo sistemas lineares, através de uma sequência de atividades intencionalmente planejada usando os diferentes registros: em língua materna, algébrico e gráfico.
4. O **desconforto** e/ou o **risco** esperado é o eventual constrangimento em participar da pesquisa.
5. A **participação do meu filho** (ou do menor sob minha responsabilidade) neste projeto contribuirá para o aprimoramento das práticas de sala de aula, especificamente no desenvolvimento do conteúdo sistemas lineares.

6. A **participação do meu filho** (ou do menor sob minha responsabilidade) é isenta de despesas, entretanto tenho ciência de que ele não será remunerado pela sua participação na pesquisa.
7. Meu filho (ou o menor sob minha responsabilidade) tem **direito** a auxílio do professor no caso de não compreender o conteúdo decorrente da sua participação na presente pesquisa e tem o **direito** a indenização e assistência por eventuais danos decorrentes da pesquisa.
8. Eu e o participante da pesquisa temos a liberdade de desistir ou de interromper a colaboração do meu filho (ou do menor sob minha responsabilidade) nesta pesquisa a qualquer momento/no momento que desejarmos, sem necessidade de qualquer explicação.
9. Nossa **desistência** não causará nenhum prejuízo à saúde ou bem-estar físico, social, psicológico, emocional, espiritual e cultural do meu filho (ou do menor sob minha responsabilidade). Nossa desistência não interferirá nas aulas regulares na escola.
10. Os dados pessoais do participante da pesquisa serão mantidos em sigilo, mas concordo que sejam divulgados os resultados da pesquisa em publicações científicas, desde que seus dados pessoais não sejam mencionados.
11. Poderei consultar o **pesquisador responsável** (acima identificado) sempre que entender necessário obter informações ou esclarecimentos sobre o projeto de pesquisa e a participação do meu filho (ou do menor sob minha responsabilidade) na pesquisa.
12. Tenho a garantia de tomar conhecimento, pessoalmente, do(s) resultado(s) parcial(is) e final(is) desta pesquisa.
13. Autorizo a **gravação** em áudio do conteúdo das aulas.
14. Esta pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética na Pesquisa em Seres Humanos da FURB (telefone 47 3321-0122).

Declaro que obtive todas as informações necessárias e esclarecimentos quanto às dúvidas por mim apresentadas e, por estar de acordo, assino o presente documento em duas vias de igual teor (conteúdo) e forma, ficando uma delas em minha posse.

____, _____ de ____________ de ______.

____ ____

Participante da pesquisa **Responsável pelo participante da pesquisa**

____

Nome do pesquisador responsável pela obtenção do consentimento

Testemunhas:

____________________________________ ____

Nome:
RG ou RNE:
CPF/MF:
Telefone:

Nome:
RG ou RNE:
CPF/MF:
Telefone:

Testemunhas serão exigidas caso o voluntário não possa, por algum motivo, assinar o termo.

APÊNDICE C – Termo de assentimento assinado pelos estudantes

Você é convidado(a) a participar da pesquisa intitulada " As contribuições da Teoria de Registros de Representação Semiótica na aprendizagem dos sistemas lineares no 2º ano do Ensino Médio", sob a responsabilidade do(s) pesquisador(es) Eduardo Brandl.

Nesta pesquisa nós buscamos analisar as contribuições da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval em uma sequência de atividades envolvendo o conteúdo sistemas lineares, previsto, para ser trabalhado no 2º ano do Ensino Médio.

Na sua participação você responderá a uma sequência de atividades desenvolvidas nas aulas de Matemática. As aulas serão gravadas em áudio e as produções de cada estudante serão digitalizadas para análise posterior.

Em nenhum momento você será identificado(a). Os resultados da pesquisa serão publicados, mas a sua identidade será preservada.

Você não terá nenhum gasto nem ganho financeiro por participar na pesquisa.

Os riscos consistem em eventual constrangimento em participar da pesquisa. Os benefícios serão: aprender de modo integrado e aprofundado o conteúdo sistemas lineares, além de ter a compreensão deste conteúdo através de diferentes registros: em língua materna, algébrica e graficamente, o que nem sempre ocorre na abordagem deste conteúdo.

Mesmo que seu responsável legal tenha concordado com a sua participação na pesquisa, você não é obrigado a participar se não desejar. E você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

Uma via original deste Termo de Assentimento ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: Eduardo Brandl, professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense - Rua: Dr. Getúlio Vargas, 3006 - Bela Vista, Ibirama - SC, 89140-000, fone (47) 3357-6200

Poderá também entrar em contato com o Comitê de Ética na Pesquisa em Seres Humanos/FURB, na Universidade Regional de Blumenau – Rua Antônio da Veiga, 140, Bairro Víctor Konder, Blumenau (SC), CEP 89030-903, fone (47) 3321 0122.

Blumenau, 30 de agosto de 2017.

____

Assinatura do pesquisador

Eu, ____, aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido(a).

____

Participante da pesquisa