UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES

DIENIFER TAINARA CARDOSO

JOINVILLE, SC
2018

DIENIFER TAINARA CARDOSO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, da Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas – CCT, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Dra Ivanete Zuchi Siple

Coorientadora: Dra Elisandra Bar de Figueiredo

JOINVILLE, SC

2018

Cardoso, Dienifer Tainara
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES / Dienifer Tainara Cardoso. - Joinville , 2018.
155 p.

Orientadora: Ivanete Zuchi Siple
Co-orientadora: Elisandra Bar de Figueiredo
Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, Joinville, 2018.

1. Máximos e Mínimos de Funções. 2. Cálculo. 3. Derivada. 4. Ensino Médio. 5. GeoGebra. I. Siple, Ivanete Zuchi. II. Figueiredo, Elisandra Bar de. , .III. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias. IV. Título.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES

por

Dienifer Tainara Cardoso

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS

Área de concentração em "Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias"
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Ivanete Zuchi Siple
CCT/UDESC (Orientadora/Presidente)

Rogério de Aguiar

Prof. Dr. Rogério de Aguiar
CCT/UDESC

Profa. Dra. Adriana Helena Borssoi
UTFPR (participação por Skype)

Joinville, 04 de julho de 2018.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por ser significado de minha existência e por estar sempre iluminando meu caminho.

Aos meus pais, Sérgio e Célia, e meu irmão Júnior, por todo amor, carinho, apoio e compreensão. Amo vocês!

Ao meu noivo Alexandre, pelo amor, carinho, amizade, paciência e constante apoio.

A minha vó Maria, que com toda sua simplicidade sempre me apoiou.

A minha orientadora Professora Dra. Ivanete Zuchi Siple e minha coorientadora Professora Dra. Elisandra Bar de Figueiredo, por toda dedicação, paciência, compreensão, amizade e os momentos de aprendizagem proporcionados. Aprendi muito com vocês!

Aos professores que possibilitaram realizar a experimentação com suas turmas. Obrigada pelas contribuições ao trabalho.

A minha amiga Jéssica Sabatke, por estar sempre presente compartilhando experiências, me apoiando nos momentos de angústia, e por ter me auxiliado em uma das experimentações.

A todos os alunos que participaram desse trabalho, o meu muito obrigada.

A UNIEDU pelo auxílio financeiro.

“Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade continua misterioso diante de meus olhos”.

Issac Newton

RESUMO

A presente dissertação aborda um estudo sobre Máximos e Mínimos de Funções utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas (ONUCHIC et al., 2014) mediada pelo software GeoGebra. Nas pesquisas realizadas constatamos diversos problemas relacionados ao ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, principalmente relacionados a máximos e mínimos. Um dos problemas recorrentes é a dificuldade em transitar entre diferentes registros de representação de um mesmo objeto, devido à ênfase na exploração da representação algébrica. Ademais, temos a dificuldade dos (futuros) professores relacionarem os conceitos do Ensino Superior com o Ensino Médio. Nesse viés, desenvolvemos um Caderno Didático, resultado do Produto Educacional, com algumas sequências didáticas e aplicativos desenvolvidos no GeoGebra que podem contribuir com o ensino e aprendizagem de Máximos e Mínimos de Funções Polinomiais, Racionais e Trigonométricas. O Caderno Didático, desenvolvido utilizando a ferramenta GeoGebraBook on-line, explora alguns conceitos nessa linha de pesquisa de uma maneira dinâmica, e permite ser utilizado de modo interativo, no qual o usuário pode responder questões e manusear objetos. Duas das sequências propostas foram experimentadas em três turmas em diferentes níveis de ensino, sendo uma do Ensino Médio, uma de graduação, e outra de Mestrado. Os resultados das experimentações foram analisados utilizando a metodologia qualitativa interpretativa. A análise possibilitou algumas melhorias nas sequências didáticas, que em seguida foram implementadas no caderno, dando forma as demais sequências. Acreditamos que este trabalho possa colaborar com o ensino e aprendizagem de Máximos e Mínimos de Funções tanto no Ensino Superior, quanto no Ensino Médio. Inclusive, auxiliar na conexão entre esse conteúdo nos dois níveis de ensino.

Palavras-chaves: Máximos e Mínimos de Funções. Cálculo. Derivada. Ensino Médio. GeoGebra.

ABSTRACT

This dissertation deals with a study on the maxima and minima of functions using the methodology of teaching-learning-assessment through problem solving (ONUCHIC et al., 2014) using GeoGebra software. In the research carried out, we found several problems related to the teaching and learning of differential and integral calculus, mainly related to maxima and minima. One of the recurring problems is the difficulty in passing between different registers of representation of the same object, due to the emphasis on the exploration of the algebraic representation. In addition, there is the difficulty of (future) teachers in relating the concepts of higher education to those of secondary education. With that in mind, we developed a didactic booklet (the educational product), with some didactic sequences and applications developed in GeoGebra that can contribute to the teaching and learning of the maxima and minima of polynomial, rational and trigonometric functions. The didactic booklet, developed using the GeoGebraBook online tool, explores some concepts in this line of research in a dynamic way. It can also be used interactively, where the user can answer questions and manipulate objects. Two of the proposed sequences were tested in three pilot classes, one in high school, one in an undergraduate program, and another in a Master's program. The results of the experiments were analyzed using the interpretive qualitative methodology. The analysis led to some improvements in the didactic sequences, which were then implemented in the didactic booklet, giving rise to other sequences. We believe that this research can help with the teaching and learning of the maxima and minima of functions both in higher education and secondary education, in addition to helping in the connection of this content in both levels of education.

Keywords: Maxima and Minima of Functions. Calculus. Derivatives. High school. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS E TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Iniciei minha Graduação em Licenciatura em Matemática no ano de 2013 na Universidade do Estado de Santa Catarina – Centro de Ciências Tecnológicas (UDESC - CCT) e concluí no primeiro semestre de 2016. No segundo semestre de faculdade iniciei a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 (CDI-I)[1], na qual o professor tinha como práxis o uso do software GeoGebra. Mesmo sem ter manuseado o software até naquele momento, percebia o quanto facilitava minha compreensão em determinados conceitos dessa disciplina. Continuei utilizando o software em outras disciplinas do curso, mas pude melhor explorar suas ferramentas com o incentivo da minha orientadora e coorientadora de Trabalho de Conclusão de Curso e Iniciação Científica. Fascinada pelas potencialidades desse software e tendo vivenciado as dificuldades de colegas com a(s) disciplina(s) de Cálculo, buscando dar continuidade aos meus estudos e procurando aperfeiçoamento profissional, ingressei no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias (PPGECMT) no segundo semestre de 2016, também na UDESC - CCT.

As dificuldades de ensino e aprendizagem encontradas por professores e alunos na disciplina de Cálculo é o principal motivo das pesquisas e publicações nessa área. Segundo os pesquisadores Marin e Penteado (2011), Rezende (2003) e Oliveira e Raad (2012), uma delas está atrelada ao pouco conhecimento do professor sobre novas metodologias. Isso colabora para que as aulas sejam direcionadas ao formalismo, que segundo Richit et al. (2012), é quando os alunos apenas memorizam de maneira mecânica os exercícios, os conceitos e as demonstrações, impedindo muitas vezes que os alunos atribuam um significado mais amplo, que vão além de aspectos algébricos, como o geométrico que pode ser explorado com o auxílio de softwares de geometria dinâmica.

Sobre o ensino e aprendizagem da derivada, conteúdo estudado na disciplina de Cálculo, e algumas de suas aplicações, estudamos os trabalhos de Cabral (2015), Pereira (2014), Silva (2005) e Tall (1992).

Na dissertação de Cabral (2015), a autora relata que algumas dificuldades dos estudantes em relação a derivada estão em compreender seus conceitos, como inclinação e taxa de variação, bem como, interpretar resultados de problemas contextualizados, como David Tall já afirmava em 1992.

[1] Vale ressaltar que o nome da disciplina varia entre as instituições de ensino, sendo chamada de Cálculo Diferencial e Integral 1, Cálculo A, Cálculo I, etc. Neste trabalho utilizaremos principalmente o nome Cálculo ou CDI.

Entretanto, acredita-se que a origem dessas dificuldades esteja na mecanização e ênfase dos procedimentos analíticos da derivada. A mecanização impede, na maioria das vezes, que os alunos desenvolvam a prática do raciocínio, o que por sua vez, dificulta a interpretação de problemas práticos (PEREIRA, 2014).

Na resolução e interpretação de problemas há a necessidade, na maioria das vezes, de transitarmos entre diferentes registros de representação semiótica, teoria desenvolvida por Raymond Duval. Como já dito, os professores de Cálculo, enquanto lecionam o conteúdo de derivadas, ficam muitas vezes presos a representação analítica da derivada, limitando o conhecimento e aprendizagem do estudante. E segundo Duval (2009), para que haja compreensão de um conceito matemático, o aluno deve conseguir transitar entre ao menos duas das diferentes representações (gráfica, analítica, figura, linguagem natural, etc).

Os conceitos presentes na disciplina de Cálculo, neste caso, em especial o conteúdo de derivada, são base para compreender os conceitos e as aplicações presentes no Ensino Médio (SBEM, 2013). Diante disso, essa disciplina é essencial na formação de professores de Matemática, e além disso, é fundamental que os (futuros) professores percebam a relação entre os conceitos estudados no Ensino Superior com os do Ensino Médio.

Nesse trabalho fornecemos indicações de como o (futuro) professor de Matemática pode relacionar conceitos do nível superior com o do Ensino Médio (no qual, muito provavelmente dará aula, ao menos durante seu Estágio Curricular), e além disso, apresentamos uma breve abordagem dos conceitos intuitivos do Cálculo no Ensino Médio. Para isso, nos baseamos principalmente nos trabalhos de Ávila (1991), Almeida e Viseu (2002) e no Boletim da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM (2013).

Problemas matemáticos estão presentes no Ensino Médio, Ensino Superior, e principalmente na vida das pessoas e empresas. Vários desses problemas buscam a otimização de decisões. Por conta disso, o foco deste trabalho será uma das aplicações da derivada: Otimização (ou Máximos e Mínimos) de Funções.

No curso de Cálculo são estudadas funções polinomiais, racionais, exponenciais, logarítmica, trigonométricas, entre outras. Neste trabalho focaremos nas funções polinomiais, racionais e trigonométricas

A Otimização de Funções[2] está presente em diversas situações-problemas, e não necessariamente restritas a área de Matemática, sendo assim muitas vezes apresentadas na forma da linguagem natural.

---

[2] Utilizaremos a expressão ‘Otimização de Funções’ ou ‘Máximos e Mínimos de Funções’ para nos referenciar a ‘Otimização de Funções Polinomiais, Racionais ou Trigonométricas’.

A resolução de problemas vem sendo estudada na Matemática a bastante tempo, e ganhou mais força com os trabalhos de George Polya. Esse matemático buscava que os estudantes fossem cada vez melhores solucionadores de problemas[3]. Para isso, desenvolveu uma técnica com quatro importantes etapas para se resolver um problema: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano, e retrospecto.

Essa técnica foi muito difundida e assim decorreram novos delineamentos, como por exemplo, vista como uma metodologia de ensino. Onuchic (2013) diz que, como metodologia, a resolução de problemas tem como objetivo que o ensino e a aprendizagem ocorram juntos durante a construção do conhecimento, “tendo o professor como guia e os alunos como coconstrutores desse conhecimento” (ONUCHIC, 2013, p.101). Nessa metodologia, o aluno é incentivado a buscar estratégias de resolução de um dado problema pautadas na construção do seu conhecimento e não apenas em mera mecanização de procedimentos, estabelecendo etapas para a condução da aula.

A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas foi desenvolvida pelo Grupo de Trabalho e Resolução de Problemas (GTERP)[4]. Essa metodologia foi adaptada dos procedimentos de Polya (1995) propondo as seguintes etapas para a condução de uma aula: preparação do problema, leitura individual, leitura em conjunto, resolução do problema, observar e incentivar, registro das resoluções na lousa, plenária, busca do consenso, formalização do conteúdo e, proposição e resolução de novos problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Para estudos mais aprofundados sobre a resolução de problemas usamos livros, artigos, teses e dissertações que pudessem colaborar com esse trabalho (ONUCHIC et al., 2014; ONUCHIC, 2013; ONUCHIC; MORAIS, 2013; ONUCHIC; ALLEVATO, 2011; ONUCHIC, 1999; POLYA, 1995; SCHOROEDER; LESTER,1989).

A tecnologia[5] vem ganhando destaque no ensino e aprendizagem da Matemática. Estudos afirmam que o uso da tecnologia na aprendizagem de conceitos matemáticos favorece a compreensão, já que possibilita diferentes representações do objeto (RICHIT, 2010; PJANIC; LIDAN; KURTANOVIC, 2015).

---

[3] Neste trabalho usaremos a definição de problema sendo "[...] é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver". (ONUCHIC, 1999, p. 215).

[4] O GTERP desenvolve suas atividades no Departamento de Matemática da UNESP – Rio Claro. Foi formado em 1992, embora já se reunisse semanalmente desde 1989. Endereço da página on-line do grupo: http://igce.rc.unesp.br/#!/departamentos/educacao-matematica/gterp/item-2/

[5] A tecnologia que nos referenciamos é principalmente a tecnologia eletrônica, como: softwares de geometria dinâmica, internet, projetor, etc.

Outra vantagem atrelada ao uso da tecnologia é a possibilidade de visualizar conceitos e simular e conjecturar estratégias (RICHIT, 2010, DUVAL, 2013).

Em problemas de Máximos e Mínimos de Funções, a tecnologia permite explorar parâmetros da função a ser otimizada e sua representação gráfica, facilitando a interpretação e construção de estratégias de resolução (SILVA, 2010).

Numer e Justo (2015) desenvolveram um trabalho correlato ao nosso, o qual aborda o ensino de Otimização de Funções a partir das etapas de resolução de problemas de Polya com o software GeoGebra, para o nível Técnico em Eletrônica. Nesse curso os alunos aprendem conceitos introdutórios sobre limites, derivadas e integrais. O problema utilizado foi chamado de "Problema da Caixa" e tinha como principal objetivo que os alunos desenvolvessem a função volume da caixa mediados pela tecnologia. Os autores relatam resultados positivos com a experimentação:

> Com este trabalho observou-se a evolução no entendimento dos alunos quanto ao problema de máximo e mínimo; também que o conhecimento de derivada foi aplicado corretamente quando foi necessário calcular o valor máximo da função e quando foi solicitado a análise de crescimento da função (NUMER; JUSTO, 2015, p. 26).

Na concepção dos pesquisadores, a resolução de problemas foi relevante na aprendizagem dos alunos, visto que, com ela e a tecnologia, eles puderam pensar criticamente sobre o problema, estabelecer estratégias e solucioná-lo.

Cabral (2015), da universidade de Lisboa – Portugal, aborda a resolução de problemas no contexto de 'Taxa de Variação e Derivada' com foco em problemas de otimização utilizando o GeoGebra em uma turma de nível Secundário (equivalente ao Ensino Médio no Brasil) do curso de Ciências Socioeconômicas. O trabalho é formado por uma sequência didática, que é iniciada com o conteúdo de taxa média de variação e concluída com diferentes problemas de Otimização. Segundo a autora os resultados revelam que o uso do processo de resolução de problemas auxiliou os alunos na forma como tratar e resolver um problema. Os alunos no final do trabalho apresentaram muito mais atenção e preocupação com os procedimentos e com o contexto de cada problema. Além disso, a autora afirma que o uso da tecnologia teve uma influência positiva na compreensão de conceitos do Cálculo.

Onuchic e Morais (2013) desenvolveram, com uma turma do curso de Licenciatura em Matemática, um trabalho no qual os alunos tiveram como tarefa encontrar/adaptar um problema que pudesse ser utilizado como ponto de partida para o ensino da Matemática através da metodologia ensino-aprendizagem-avaliação e, por fim preparar e aplicar uma aula com essa metodologia. Um dos trabalhos que recebeu destaque e foi explorado nesse artigo foi o de

Otimização. O problema aplicado consistia em determinar a área máxima de um retângulo inscrito em um triângulo, mediado pelo software Graph[6].

Os trabalhos correlatos aqui apresentados podem contribuir com o nosso pelas perguntas norteadoras, contribuições advindas dos participantes e considerações feitas pelos autores.

Nesse contexto, insere-se nosso interesse de explorar a metodologia ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra no ensino e aprendizagem de Otimização de Funções. E ainda, a partir de um conjunto de dados, referenciais e sugestões, o desenvolvimento de um caderno didático como um Produto Educacional que possa ser utilizado por professores e estudantes de Cálculo Diferencial e Integral, no Ensino Superior, e professores de Matemática e estudantes do Ensino Médio.

Nessa perspectiva, temos como hipótese que a metodologia de ensino citada, mediada pelas potencialidades da tecnologia possa colaborar com o ensino e aprendizagem de Otimização de Funções. Com isso, surge a problemática: como trabalhar a resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra de modo que colabore com o ensino e aprendizagem de Otimização de Funções?

O GeoGebra é um software de geometria dinâmica com importantes ferramentas que colaboram com o ensino e a aprendizagem da Matemática. O software comporta ferramentas de construção de gráficos, análise dinâmica de representações geométricas e funções, planilha, entre outras potencialidades que serão citadas ao longo do trabalho. Optamos por trabalhar com o GeoGebra, também, por ser um software gratuito e de fácil manipulação.

Nosso trabalho será focado ao mesmo tempo na formação inicial de professores de Matemática, bem como em aplicações que possam ser exploradas no ensino da Matemática em nível de Ensino Médio. Porém, é importante ressaltar que o trabalho pode ser utilizado com turmas de Cálculo de outros cursos.

Nossa pesquisa é caracterizada como qualitativa e interpretativa (BOGDAN, BIKLEN, 1994), e tem como objetivo principal desenvolver sequências didáticas que colaborem com o ensino e aprendizagem de problemas de Otimização de Funções, mediadas pela resolução de problemas e recursos dinâmicos do software GeoGebra. Os objetivos específicos são:

- Explorar Máximos e Mínimos de Funções na formação de professores e alunos do Ensino Médio;
- Utilizar as potencialidades da geometria dinâmica para trabalhar com os diferentes registros de representação das aplicações de derivadas;

[6] Graph é uma ferramenta simples que ajuda nas construções de gráficos de funções e a fazer diferentes edições no gráfico plotado.

- Implementar o Produto Educacional - um Caderno Didático - utilizando a ferramenta GeoGebraBook disponibilizada pelo software a partir dos problemas criados/adaptados;
- Disponibilizar o Produto Educacional no ambiente on-line do software GeoGebra para que possa ser utilizando tanto por docentes quanto discentes.

Este trabalho é composto por mais cinco capítulos além deste.

No capítulo 2 dissertamos sobre o referencial teórico deste trabalho. Iniciamos com uma reflexão sobre o ensino de Cálculo e a formação de professores. Dando continuidade, apresentamos brevemente a teoria de Raymond Duval sobre registros de representação semiótica, e sua importância neste trabalho. No tópico seguinte, tratamos sobre a resolução de problemas, principalmente como metodologia de ensino. Por fim, abordamos o motivo de utilizar software de geometria dinâmica no ensino e aprendizagem de Matemática, tratando também sobre as vantagens em utilizar a resolução de problemas e a tecnologia simultaneamente.

No capítulo 3 discorremos sobre a metodologia de investigação qualitativa e interpretativa de Bogdan e Biklen (1994). Nesse, descrevemos os procedimentos tomados para o desenvolvimento das atividades, experimentações e análise dos resultados.

Dando forma ao capítulo 4, descrevemos as sequências didáticas experimentadas em turmas de Ensino Médio e Formação de Professores. Sendo assim, esse capítulo apresenta o contexto, os resultados e análise das experimentações.

No capítulo 5, descrevemos o Produto Educacional deste trabalho. Resumidamente, o Produto Educacional trata-se de um caderno didático desenvolvido com a ferramenta GeoGebraBook, disponibilizada on-line e gratuitamente pelo software GeoGebra. Esse caderno didático comporta principalmente problemas de Otimização de Funções e um roteiro de aula para o professor. Poderá ser utilizado por professores e alunos de Cálculo e/ou do Ensino Médio.

Por fim, no capítulo 6, faremos algumas considerações sobre os resultados obtidos em confronto com nossos referenciais, além de destacar dificuldades encontradas e perspectivas futuras.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Otimizar é uma atividade presente na vida social, pessoal, profissional e em contextos naturais/biológicos. Podemos maximizar lucros e minimizar custos; otimizar espaços; otimizar taxas de transporte; minimizar filas de caixas de supermercados, etc. Hoffmann e Bradley (2002), abordam diversas outras aplicações de otimização de funções, variando entre diferentes áreas.

A temática de otimização de funções está presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM – PCN_{+}) no conteúdo de Funções Polinomiais do Segundo Grau, em que afirmam que os alunos devem "Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações; por exemplo, utilizar funções ou gráficos para modelar situações envolvendo cálculos de lucro máximo ou prejuízo mínimo" (BRASIL, 2000, p. 117). No Ensino Superior, está presente na grade curricular do curso de Cálculo Diferencial e Integral 1 (CDI-I) de diversas universidades, por exemplo: USP (2017), UDESC (2014), UNESP (2011), sendo uma das aplicações da derivada. Alguns cursos de nível superior apresentam a Otimização utilizando outros conteúdos matemáticos além de Funções, por conta disso, existem outras disciplinas que suportam a Otimização, como por exemplo, a disciplina de Pesquisa Operacional (PO), bastante frequente na grade de cursos como Engenharia de Produção (UDESC, 2002), que visa buscar a melhor decisão para resolver um problema entre as mais diferentes situações (transporte, esporte, governo, manufatura, cadeia de suprimentos). Sendo o mundo da Otimização bastante vasto, concentraremos este trabalho na Otimização de Funções Polinomiais, Racionais e Trigonométricas, com foco na disciplina de CDI-I.

2.1 ENSINO DE CÁLCULO

O conteúdo de Cálculo já esteve presente na grade curricular do Ensino Médio, mas foi extinto durante a Reforma da Matemática Moderna no final da década de 50. Isso ocorreu, pois, os reformistas defendiam a necessidade do rigor e formalismo matemático, e assim, devido à grande quantidade de conteúdo e o curto tempo para lecioná-lo, optaram por retirar o Cálculo (ÁVILA, 1991).

Apesar disso, o Cálculo poderia voltar a ser ensinado no Ensino Médio, não como disciplina ou conteúdo específico, mas sim de maneira intuitiva. Para Machado (1990), as ideias do Cálculo devem ser tratadas desde o Ensino Básico. O conteúdo de derivada não precisa ser lecionado com rigor nesse nível de ensino, mas de modo que evidencie sua ideia de variação e proporção (MACHADO, 1990).

Pereira (2009), realizou a aplicação de uma proposta sobre a inserção de conceitos intuitivos do Cálculo para ensinar o conteúdo de Funções no Ensino Médio. O autor tinha como objetivo não apenas preparar os alunos para uma compreensão facilitada do Cálculo formal quando ingressassem em uma Graduação, mas principalmente que eles compreendessem Funções do ponto de vista da variabilidade usando conceitos do Cálculo. Segundo o autor, essa prática de ensino apresentou excelentes resultados com a turma piloto.

A introdução do Cálculo no Ensino Médio acarreta um aperfeiçoamento nos instrumentos algébricos, capaz de melhorar as habilidades em análise de gráficos de funções polinomiais. Diante disso, Smole e Diniz (2013, p. 370), afirmam que o objetivo de introduzir o Cálculo no Ensino Médio é “que os alunos utilizem a noção de derivada para aprimorar a análise das funções polinomiais, especialmente na resolução de problemas de crescimento e de determinação de pontos de máximo ou mínimo”.

Conceitos do Cálculo já estão presentes em diversos conteúdos lecionados no Ensino Médio, como por exemplo, taxa de variação, proporcionalidade, áreas de figuras planas, problemas de máximos e mínimos, crescimento e decrescimento de funções, entre outros (MACHADO, 2008). Porém, muitos (futuros) professores têm dificuldades em verificar e compreender a relação entre a Matemática do Ensino Médio com o CDI. “O curso de Cálculo Diferencial irá ajudar a aprofundar o estudo de funções, mas o licenciado deve ter clareza de que parte desse aprofundamento pode ser levado ao Ensino Médio.” (SBEM, 2013, p. 20).

Em relação aos problemas de Máximos e Mínimos de Funções, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM, 2013), afirma que o tratamento utilizado no nível superior nesse conteúdo é fundamental para o (futuro) professor compreender o tratamento que deve ser utilizado sobre esse conteúdo no Ensino Médio. Por exemplo, o (futuro) professor de Matemática sabe que para uma função do segundo grau, dada analiticamente por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais dados e $a \neq 0$, quando o coeficiente a é maior do que zero a parábola terá concavidade para cima, e assim, um ponto de mínimo. Porém, esse mesmo professor deve compreender que isso é obtido a partir do teste da segunda derivada.

Alguns autores de livros de Ensino Médio escritos após a Reforma da Matemática Moderna continuaram explorando o conteúdo de Cálculo, às vezes intuitivamente ou explicitamente (DANTE, 2005; DANTE, 2004; PAIVA, 2005; SMOLE; DINIZ, 2013). O Exemplo 1 a seguir apresenta o Cálculo de uma maneira intuitiva. Com esse, o professor pode explorar os conteúdos de taxa de variação de uma função quadrática, ponto de máximo e conceitos da Física sobre movimento uniformemente variado.

Exemplo 1: Uma partícula é colocada em movimento sobre um eixo a partir do ponto -12, com velocidade inicial de 7m/s e aceleração de -2m/s^2. Em quanto tempo a trajetória mudará de sentido? (Adaptado de DANTE, 2004, p. 167).

Uma das maneiras de se resolver esse problema é supondo a trajetória da partícula sendo dada por uma função quadrática em relação ao tempo, na qual o ponto máximo refere-se ao ponto em que a trajetória muda de sentido. Ainda, podemos considerar que quando a trajetória muda de sentido, a velocidade é zero nesse ponto.

Mesmo os livros que não apresentam uma seção especificamente sobre Cálculo, podem apresentar problemas dessa teoria dentro de tópicos como aplicações de funções. Porém, se esses problemas forem apresentados em uma seção específica, eles podem ser ignorados, pois não fazem parte da grade curricular do Ensino Médio como um conteúdo específico. Ademais, um professor de Matemática quando se depara com um livro que aborda o Cálculo explicitamente, e que por sua vez, não teve ou não compreendeu durante sua formação a relação entre essas 'matemáticas', provavelmente irá questionar a necessidade do livro abordar esse conteúdo e, além disso, talvez opte por não apresentar em seu Plano de Ensino. Isso, por talvez imaginar que os alunos não são capazes de compreender, ou, pela sua formação não ter apresentado essa conexão com o Ensino Médio.

Nos livros citados do Ensino Médio, o Cálculo é abordado a partir de aplicações ou apenas como uma ferramenta, ensinando técnicas de Cálculo. Os problemas aplicados são geralmente relacionados a taxa instantânea e a limite de função.

Almeida e Viseu (2002) afirmam que o estudo das funções, voltado ao CDI, deve se dar inicialmente utilizando uma abordagem gráfica e intuitiva, de modo a relacionar as abordagens gráficas e analíticas. Um estudo realizado por esses autores em uma escola de nível secundário de Portugal (Ensino Médio no Brasil), mostrou que as dificuldades dos alunos em aprender o Cálculo conceitualmente, estavam relacionadas a: uma capacidade visual demasiadamente pobre, que dificultava identificar a função dado seu gráfico; incapacidade de interligar múltiplas condições em um mesmo problema; e a falta de capacidade de relacionar a informação gráfica aos conhecimentos analíticos. Os autores tiraram suas conclusões principalmente a partir dos resultados ligados ao ensino da derivada, em que professores geralmente partiam de uma definição gráfica da reta tangente, e depois utilizavam com maior ênfase o processo analítico para apresentar a derivada de uma função.

Nas aulas de Cálculo, geralmente, há uma predominância pelo ensino analítico, assim, muitas vezes os alunos não transitam entre as representações gráficas e analíticas na resolução de um determinado problema.

Almeida e Viseu (2002), defendem que os professores devem abordar em sua prática de ensino conceitos de Cálculo que integrem simultaneamente abordagens gráficas e analíticas.

As ideias de Almeida e Viseu (2002) estão de acordo com o que dizia Tall (1991), que uma das dificuldades dos alunos na compreensão do CDI está relacionada à insuficiente habilidade de visualização, e que diante disso, isso deve ser melhor explorado nas aulas de Cálculo.

A visualização pode ser um forte aliado para o aluno ter intuição sobre conceitos do Cálculo. Vale aqui ressaltar que a visualização na Matemática nem sempre é abordada apenas com o sentido de 'enxergar'. Quando utilizamos representações gráficas na Matemática, a visualização é um meio para chegar à compreensão (ALMEIDA; VISEU, 2002).

Nesse viés, temos que no ensino de Cálculo:

> Ao introduzir adequadamente visualizações de ideias matemáticas complicadas é possível dar uma imagem muito mais ampla das possíveis maneiras em que os conceitos podem ser realizados, dando assim intuições muito mais poderosas do que em uma abordagem tradicional. (TALL, 1991, p. 20, tradução nossa).

Além da conexão gráfica e analítica, outras representações são importantes no ensino de Cálculo. A teoria sobre Registro de Representação Semiótica desenvolvida por Duval (2009), aponta a importância do aluno saber transitar entre diferentes representações de um mesmo objeto, como por exemplo, a representação em forma de figura, gráfico, símbolo, linguagem natural, etc. Segundo o autor, isso possibilita ampliar o conhecimento do aluno e facilitar sua compreensão.

Silva (2005), enfatiza a necessidade dos professores de CDI articularem o ensino entre as diversas representações possíveis, pois, assim, o professor não estará priorizando apenas a representação analítica no ensino da derivada e conceitos afins. Com foco na Otimização, Dall'anese (2000), afirma que uma das dificuldades do aluno na compreensão do cálculo de Máximos e Mínimos de Funções é por não buscar compreender e interpretar o conceito gráfico da derivada, ou seja, a posição da reta tangente ao gráfico. Pereira (2014) e Silva (2005), dizem que outra dificuldade, e uma das principais em Otimização, é a transição da linguagem natural para outros registros de representação.

Na resolução de problemas de Máximos e Mínimos de Funções, os estudantes demonstram ter uma barreira que os limitam 'enxergar' as variáveis envolvidas e a relação funcional existente entre elas (CABRAL, 1998).

Embora existam diversos outros motivos que possam influenciar no ensino e aprendizagem de CDI e sobre o alto índice de reprovação nessa disciplina, não iremos nos aprofundar nisso. Porém, buscamos com esse trabalho colaborar com o ensino e aprendizagem de Cálculo, mais especificamente Máximos e Mínimos de Funções, utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

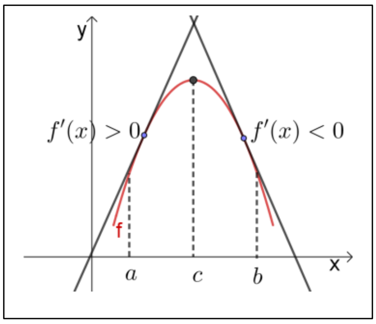
Além dessa abordagem, nos basearemos na teoria de representação semiótica como um meio de favorecer a compreensão do aluno, como será apresentado a seguir.

2.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

O conteúdo matemático muitas vezes é estudado de maneira procedimental, de modo que o objetivo seja utilizar a Matemática sem compreendê-la conceitualmente. Dessa forma, o aluno talvez consiga utilizar a Matemática como uma ferramenta na resolução de exercícios e aplicações, todavia, não se pode afirmar que houve compreensão sobre o conteúdo. Para que ocorra a compreensão em conteúdos matemáticos, Duval (2009) afirma que o aluno deve conseguir transitar no mínimo entre duas diferentes representações.

A Teoria sobre Representações Semióticas desenvolvida por Raymond Duval, nos mostra a relevância em um professor utilizar diferentes representações semióticas nos conteúdos matemáticos, e assim, possibilitar que os estudantes tenham acesso e conhecimento sobre elas. Segundo Duval (2009), alguns exemplos de representações semióticas são o emprego da língua natural, símbolo, gráfico, figura e diagrama. O Quadro 1 apresenta exemplos de alguns desses registros. As diferentes representações do Quadro 1 referem-se ao conceito de máximo local (relativo) de uma função $f(x)$ contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), exceto possivelmente em um ponto crítico c contido nesse intervalo.

Quadro 1 – Representações do Máximo local de uma função.

Registro de Representação e Máximo Local		
Registro na Língua Natural	Registro Simbólico	Registro Gráfico
Dizemos que uma função tem máximo relativo em um ponto crítico, se o sinal da primeira derivada dessa função mudar de positivo para negativo nesse ponto crítico.	Dizemos que o ponto crítico $(c, f(c))$ é um máximo relativo se $f'(x) > 0$ para $a < x < c$ e $f'(x) < 0$ para $c < x < b$.	

Fonte: a autora

Para que haja compreensão de um conteúdo, Duval (2009) diz que além de transitar pelo menos entre dois registros distintos de representação, não se deve confundir o objeto matemático com a sua representação. Isso, porque um mesmo objeto pode ter diferentes representações. Objetos matemáticos são, por exemplo, os números, as funções e as retas. As representações seriam as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos e os traçados de figuras, por exemplo. Outro exemplo de objeto matemático é o máximo relativo, o qual pode ser representado de diferentes formas como apresenta o Quadro 1. Assim, confundir o objeto com sua representação é limitar o conhecimento. “Toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão. Os conhecimentos adquiridos tornam-se então rapidamente inutilizáveis fora de seus contextos de aprendizagem”. (DUVAL, 2009, p. 14).

Na resolução de problemas um registro pode estar destacado, mas sempre deverá existir a possibilidade de passar de um registro a outro (DUVAL, 2013). Existem duas possíveis transformações de representações semióticas: os tratamentos e as conversões. Tratamento são transformações realizadas dentro de um mesmo registro. Já a conversão é uma transformação de um registro a outro.

Resolveremos o Exemplo 2 a seguir, evidenciando os tratamentos e conversões necessárias.

*Exemplo 2: Uma loja tem vendido 100 aparelhos de televisão por semana a R$ 1.250,00 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada R$ 10,00 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a função demanda (função preço) e a função receita. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para maximizar sua receita? (*Adaptado de STEWART, 2011, p. 306*).*

Solução. Iniciamos realizando a conversão entre a linguagem natural do problema e a representação simbólica e algébrica. Consideramos x (representação simbólica) o número de aparelhos de televisão vendidos por semana, então o aumento semanal nas vendas será de $x - 100$ *(representação algébrica). Sabemos pelo enunciado que para cada R$ 10,00 de desconto, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Assim, para cada unidade adicional vendida, o decréscimo no preço será* $\frac{1}{20}$ x 10 *e a função preço será:*

$$p(x) = 1250 - \frac{10}{20}(x - 100)$$

Realizando uma simplificação (tratamento), temos:

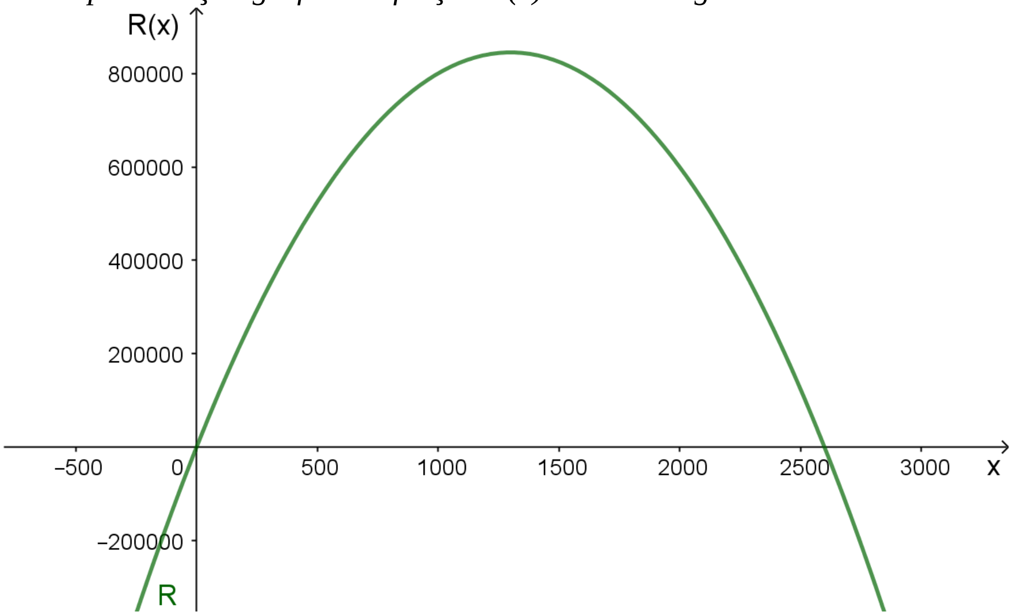
$$p(x) = 1300 - \frac{x}{2}$$

Sabendo que a receita é dada pelo produto de x unidades vendidas pelo preço de cada unidade, a função receita é:

$$R(x) = x \cdot p(x) = 1300x - \frac{x^2}{2}$$

Representando graficamente a função receita R(x) obtemos o gráfico da Figura 1. Ao passarmos da representação analítica de função para sua representação gráfica realizamos uma conversão (mudança de registro).

Figura 1 – Representação gráfica da função R(x) sem restringir o domínio



Fonte: a autora

Percebe-se que analisando a função graficamente, não faz sentido os valores negativos de x, afinal não se pode vender uma quantidade negativa de aparelhos de televisão. Diante disso, é necessário restringirmos o domínio da função receita. Para isso realizamos, mesmo que intuitivamente, a conversão entre a linguagem natural e a algébrica, ou ainda, da linguagem gráfica para a algébrica, pois precisamos pensar a definição de receita no contexto de sua aplicação e representá-la matematicamente. Assim, a função receita só faz sentido para $x \geq 0$ *e* $R(x) \geq 0$*, o que significa que*

$$D(R) = \{x \in \mathbb{R} |\ 0 \leq x \leq 2600\}.$$

Feito isso, usamos regras de derivação para calcular a derivada da função receita. É importante que o estudante compreenda que a derivada da função receita representa a taxa de variação da receita em relação ao número de unidades vendidas. Já que continuaremos no mesmo registro de representação (algébrico), para calcular a derivada iremos realizar um tratamento.

$$R'(x) = 1300 - x.$$

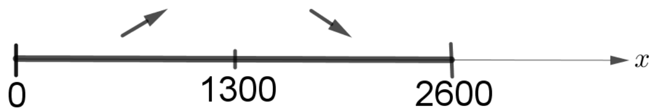
Após isso, igualamos $R'(x)$ *a zero para determinar o ponto crítico. Espera-se que o estudante compreenda todos os conceitos subjacentes a esse tratamento.*

$$R'(x) = 1300 - x = 0$$

$$x = 1300.$$

Assim, $x = 1300$ *é a única solução de* $R'(x) = 0$ *em seu domínio, portanto o único número crítico. Utilizando o teste da primeira derivada, existem dois intervalos a considerar:* $0 < x < 1300$ *e* $1300 < x < 2600$. *Nesse momento, é interessante observar que transitamos entre as representações algébrica, gráfica e o diagrama, o que chamamos de conversão, já que estamos transitando entre outros registros de representação. Calculando o valor de* $R'(x)$ *para pontos de teste nos dois intervalos (*$x = 1200$ *e* $x = 1400$*, por exemplo), podemos representar o diagrama de setas que aparece na Figura 2, indicando o crescimento e decrescimento da função* $R(x)$.

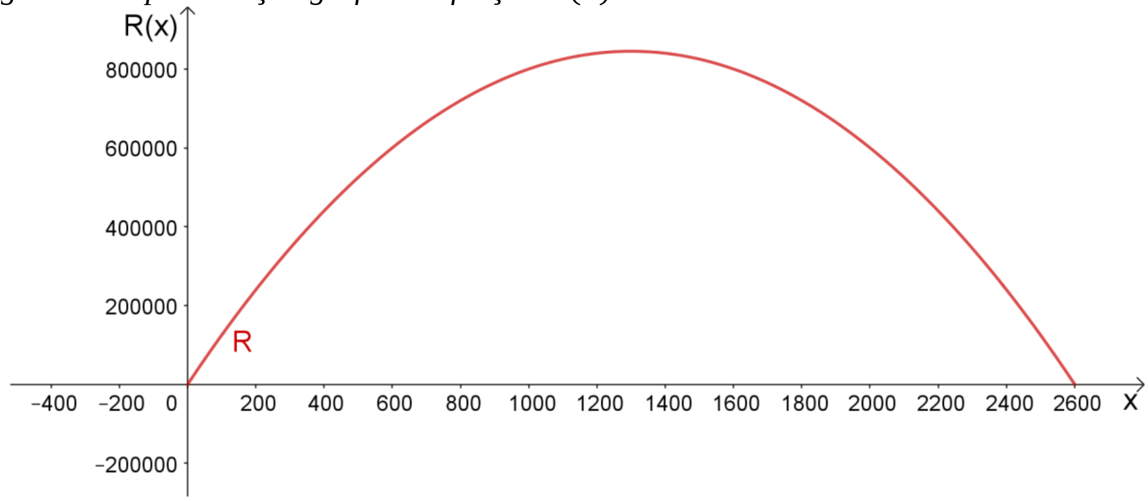
Figura 2 – Representação do crescimento e decrescimento da função R(x) a partir do teste da primeira derivada



Fonte: a autora

De acordo com o diagrama de setas baseado no teste da primeira derivada, a receita passa por um máximo em $x = 1300$ *(poderíamos também ter simplesmente observado que o gráfico de R(x) é uma parábola com concavidade para baixo). Agora, considerando os tratamentos e conversões realizados, o gráfico da* $R(x)$ *pode ser representado como mostra a Figura 3. Percebe-se que antes de realizar esses tratamentos e conversões, o gráfico da R(x) não seria representado dessa forma, mas sim como apresentado na Figura 2.*

Figura 3 - Representação gráfica da função $R(x)$



Fonte: a autora

Feito isso, devemos calcular qual deve ser o preço de cada unidade para obter essa receita e o valor do desconto. Sabemos que 1300 unidades devem ser vendidas para obter a receita máxima, logo, o preço de cada unidade pode ser obtido através do tratamento da função p(x), quando $x = 1300$*:*

$$p(1300) = 1300 - \frac{1300}{2} = 650\ (reais)$$

e o desconto é 1250 – 650 = 600 (reais). Portanto, nessas condições, para maximizar a receita, a loja deveria oferecer um desconto de R$ 600,00.

A transformação da linguagem natural para a algébrica, para muitos estudantes se torna um abismo (DUVAL, 2012a). A partir da prática docente e trabalhos como o de Vaz e Gomes (2014), constatamos que na resolução de problemas contextualizados, em que há a necessidade de conversão, os alunos se sentem desafiados e é evidente a dificuldade de interpretar e resolver.

Deste modo, "a conversão das representações semióticas constitui menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos" (DUVAL, 2009, p. 63). Além disso, vale ressaltar que a ordem das conversões também pode alterar o nível de complexidade para o estudante. "Com efeito, quando a conversão se efetua no sentido escritura algébrica de uma equação → gráfico, nenhuma dificuldade específica parece surgir. Mas, tudo muda quando é preciso tomar a conversão inversa, mesmo depois de um ensino sobre funções lineares." (DUVAL, 2009, p. 78).

A conversão, segundo Duval (2013), na maioria das vezes é necessária principalmente para escolher o registro no qual os tratamentos elementares são mais "fáceis". E, além disso, a conversão é o que conduz aos mecanismos ocultos à compreensão.

Duval (2012b) em sua teoria explica que existem duas atividades semelhantes a conversão, e que não devem ser confundidas: a interpretação e a codificação. Interpretação, segundo a teoria, refere-se a mudança de quadro teórico ou a uma mudança de contexto (isso não implica em mudança de registro). A codificação refere-se à transcrição de um registro de representação a outro. A fundamental diferença entre a ação de codificar e a de converter, é que apesar de ambas mudarem o registro de representação, quando codificamos uma representação estamos utilizando regras de codificação, o que não é realizado na conversão. Por exemplo, quando busca-se construir o gráfico de uma função, ou seja, passar do registro algébrico para o gráfico, pode-se usar a regra de codificação que a um ponto do gráfico corresponde uma dupla de números, porém, isso não é suficiente para mudar de registro. Segundo o trabalho de Duval (2012b), alguns estudantes podem realizar perfeitamente a regra de codificação ponto a ponto, mas se recusam a ligar os pontos obtidos para obter uma reta ou uma curva.

A conceitualização na teoria de Duval, refere-se ao momento em que o estudante consegue mobilizar vários registros de representação, afinal, realizar tratamentos e conversões é uma atividade necessária para a compreensão de objetos matemáticos (DUVAL, 2016). Caso o estudante não consiga transitar entre diferentes registros, dizemos que não ocorre a conceitualização. Silva (2005, p. 8) descreve um exemplo:

> Fazendo um paralelo com Máximos e Mínimos de Funções, seria o mesmo que o sujeito perceber, em um determinado gráfico de uma função derivável, os valores extremos, mas não perceber que a derivada de primeira ordem naqueles extremos vale zero (admitindo que a função seja derivável nesses pontos), já que a reta tangente a esses pontos seria paralela ao eixo das abscissas, ou também, perceber que o sujeito não seria capaz de articular os testes da derivada primeira e da derivada segunda para confirmar esses extremos.

Durante a resolução de um problema matemático surge, na maioria das vezes, a necessidade de transitar pelo menos entre a representação da linguagem natural para a algébrica. A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas, parte da estratégia de iniciar o ensino e a aprendizagem de um conteúdo a partir da resolução de um problema pelo próprio aluno. Isso possibilita que ele utilize seus conhecimentos prévios e teste diferentes estratégias de resolução, o que por sua vez pode necessitar da utilização de diferentes registros de representação.

Como afirmado na teoria de Duval, é importante que o estudante saiba transitar entre diferentes representações para que haja a compreensão. E uma maneira de possibilitar que o aluno desenvolva isso na otimização, talvez seja a partir da exploração de resolução de problemas. Com isso, buscamos nesse trabalho o desenvolvimento de um Produto Educacional que comporte problemas de otimização que possibilitem o estudante transitar entre os diferentes registros de representação semiótica durante sua resolução.

Na seção seguinte exploramos a resolução de problemas como um meio possível para o ensino e aprendizagem de Máximos e Mínimos de Funções.

2.3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

No início do século XX a sociedade exigia que as pessoas soubessem mais Matemática, mas uma Matemática que deveria ser usada para a vida. Edward Lee Thorndike, publicou em 1921, teorias que se direcionavam a isso, desenvolvendo um livro chamado “Os Novos Métodos da Aritmética”. Para Thorndike (1921, *apud* MORAIS; ONUCHIC, 2014), os problemas deveriam ser pensados de modo que as perguntas feitas tivessem um sentido real para vida.

Segundo Morais e Onuchic (2014), teorias subsequentes passaram a orientar o cenário da educação. Uma delas que recebeu destaque e é referência nos dias atuais, é a técnica desenvolvida por George Polya, publicada em seu livro ‘A Arte de Resolver Problemas’[7](1995). Polya era matemático, nascido na Hungria, desenvolveu artigos, cursos, livros e palestras sobre resolução de problemas.

No livro ‘A Arte de Resolver Problemas’, Polya defende quatro etapas que devem ser seguidas para resolver um problema, e ainda, afirma que uso frequente dessas etapas torna o indivíduo cada vez melhor em resolver problemas, ou seja, um bom solucionador de problemas (POLYA, 1995).

As etapas propostas por Polya (1995, p. xii), são: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Nas duas primeiras etapas o autor evidencia a importância da descoberta, ressaltando-a em identificar padrões e analisar trabalhos correlatos mais simples para se fazer Matemática. Nas duas últimas etapas, o foco é dado à execução e garantia de que a solução encontrada está correta. A seguir são descritas as etapas sucintamente.

A primeira etapa – compreensão do problema, é a etapa em que o estudante deve ler o enunciado para compreender o problema proposto. Além disso, o estudante deve buscar responder as seguintes perguntas para ajudar na compreensão: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? Trace uma figura e adote uma notação adequada.

Na segunda etapa - estabelecimento de um plano, é o momento em que o estudante deve buscar uma conexão entre os dados e a incógnita. Se não puder resolver o problema proposto,

[7] Título em inglês: *How to solve it: a new aspect of mathematical method (1945).*

deve procurar antes resolver algum problema correlato. Alguns questionamentos podem ajudar a obter um plano de resolução: já viu o problema antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Mesmo que, por algum tempo, não ocorra qualquer nova ideia apreciável, o estudante deverá ficar agradecido se a sua concepção do problema se tornar mais completa, coerente, homogênea ou equilibrada.

A terceira etapa – execução do plano, o estudante deve executar o seu plano. Realizar detalhadamente todas as operações algébricas e geométricas que já verificou serem viáveis. Ao executar o seu plano de resolução, o aluno deve verificar cada passo.

Na quarta etapa – retrospecto, o estudante deve considerar os detalhes da resolução e procurar torná-los tão simples quanto possível; examinar as partes mais amplas da resolução e procurar abreviá-las; perceber toda a resolução num relance.

Polya (1995), afirma que enquanto procuramos a solução variamos continuamente nosso ponto de vista de como encarar o problema, ou seja, a cada passo nos encontramos mais próximos da solução com êxito. "É provável que a nossa concepção do problema seja muito incompleta no princípio; a nossa perspectiva é outra depois de feito algum progresso; ela é ainda mais diferente quando estamos quase a chegar à solução" (POLYA, 1995, p. 3).

Conforme Morais e Onuchic (2014), a resolução de problemas a partir do livro 'A Arte de Resolver Problemas' ganhou força primeiramente nos Estados Unidos, e mais tarde em outros países. Na década de 80 foram desenvolvidos recursos em resolução de problemas na forma de listas, sugestões de atividades, coleção de problemas, entre outros, com objetivo que colaborar com o ensino da Matemática. Uma importante referência publicada em 1980 nos Estados Unidos foi o livro 'A Resolução de Problemas na Matemática Escolar' (*Probling solving in schoool mathematics*), do 'Conselho Nacional de Professores de Matemática' (*National Council of Teachers of Mathematics* - NCTM). Pelo NCTM de 1980 também foi publicado 'Uma Agenda para Ação' (*An Agend for Action*), que propusera que a resolução de problemas fosse o foco do currículo escolar da Matemática (MORAIS, ONUCHIC, 2014).

Porém, muitos professores ainda tinham dúvidas de como implementar a resolução de problemas em sala de aula. Isso ocorria devido as diferentes concepções que se tinha do que é resolver problemas com foco na Matemática escolar (SCHROEDER; LESTER, 1989). Os mesmos autores apresentaram três abordagens de resolução de problemas que auxiliam na compreensão de diferentes perspectivas: ensinar *sobre* resolução de problemas; ensinar *para* resolver problemas; ensinar *através* da resolução de problemas.

Ensinar *sobre* resolução de problemas é quando o professor ensina aos estudantes principalmente como os problemas são resolvidos. Assim, o professor está apoiado no processo de resolução de problemas de Polya (1995), que é estruturado nas quatro fases de resolução. Algumas das estratégias ensinadas aos estudantes para escolherem/usarem ao inventarem estratégias para resolverem os problemas incluem: olhar para padrões, resolver um problema mais simples e rever o trabalho.

Quando o professor ensina *para* resolver problemas, significa que o professor visa a resolução para mostrar aos alunos a aplicabilidade da Matemática, seja em problemas rotineiros ou não rotineiros[8] (SCHROEDER; LESTER, 1989). Essa abordagem é semelhante a utilizada por parte dos professores de Matemática nos últimos tempos, visto que, usa-se primeiro lecionar o conteúdo e depois resolver problemas, mostrando aos alunos que diante dessa abordagem ele é capaz de usar os conceitos aprendidos.

Por fim, temos o ensino da Matemática *através* da resolução de problemas. Nessa abordagem, o objetivo é iniciar o ensino de um tópico a partir de uma situação-problema, a qual gere questionamentos/dúvidas e a necessidade de desenvolver técnicas e conceitos matemáticos como resposta ao problema. Na aprendizagem de Matemática *através* da resolução de problemas temos um caminho que sai do concreto (um problema prático) em direção ao abstrato (simbologias e técnicas matemáticas). Nesse contexto se encaixa a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas desenvolvida pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), como será descrita a seguir.

Onuchic (2013), relata em seu trabalho que o estudo sobre a resolução de problemas como metodologia, surgiu no final da década de 80 quando a autora recebeu o documento *Setting a research agenda – a research agenda for mathematics education*, do NCTM. Ela ficou durante anos na State University of San Diego (Susd) na Califórnia (USA), e a partir disso, a resolução de problemas passou a ser sua principal área de estudo.

Assim, sendo a professora pesquisadora brasileira Lourdes de la Rosa Onuchic, a principal idealizadora da resolução de problemas como metodologia, criou em 1990 o GTERP. Desde então, atividades de aperfeiçoamento, de investigação e de produção científica na linha de resolução de problemas são desenvolvidos no seu grupo de pesquisa. Uma das primeiras publicações e a que possibilitou aos professores conhecerem a resolução de problemas como

[8] Os problemas rotineiros são os problemas padrões que aparecem, geralmente, nos livros. Esse tipo de problema é resolvido utilizando a aplicação direta de um algoritmo. Não desafiam os alunos e não necessitam de uma estratégia de resolução. Já os problemas não rotineiros, necessitam de alguma estratégia, e não são resolvidos utilizando um algoritmo (GONÇALVES, 2006).

metodologia foi o artigo Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas (ONUCHIC, 1999).

Inicialmente a metodologia não abordava a avaliação como parte integrante da metodologia, mas atualmente defendem que o ensino, aprendizagem e a avaliação de Matemática, apesar de serem elementos distintos, devem ocorrer simultaneamente nas situações de sala de aula (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014). Por essa razão, o GTERP, passou a "empregar a expressão ensino-aprendizagem-avaliação, dentro de uma dinâmica que integra a avaliação às atividades de sala de aula" (ALLEVATO, ONUCHIC, 2014, p. 43) e apoiados na perspectiva de ensinar *através* da resolução de problemas, o GTERP compreende essa expressão como metodologia, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Utilizando a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação, tem-se o objetivo de que enquanto o professor ensina, o aluno, como ser ativo, aprende, e a avaliação deve ser realizada por ambos (ONUCHIC, ALLEVATO, 2011).

Onuchic e Allevato (2011, p. 80) defendem que:

> Nessa concepção, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo. Esse é o ponto central de interesse dos trabalhos que temos desenvolvido atualmente, isto é, o trabalho com matemática através da resolução de problemas. Esse trabalho se apoia na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino-aprendizagem é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro das atividades feitas em cada unidade temática e de que o ensino pode ser feito por meio da resolução de problemas.

As mesmas autoras relatam que essa metodologia tem princípios diferentes de outras que enfatizam regras de "como fazer". Elas abordam um trabalho em que uma situação-problema é ponto de partida e caminho para a aprendizagem, e a construção do conhecimento se dá pela sua resolução. Professor e aluno trabalham juntos e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo.

A seguir serão apresentadas e descritas as etapas da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas (Tabela 1), mas antes, vale ressaltar que a definição de problema utilizada por Onuchic (1999, p. 215), e a que usamos neste trabalho, é que um problema "[...] é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver". Essa apresentação foi adaptada, pela autora deste trabalho, ao contexto da pesquisa sobre otimização e tecnologia. A descrição original das etapas pode ser consultada em Allevato e Onuchic (2014, p. 44).

Tabela 1- Etapas da resolução de problemas de Onuchic adaptadas ao contexto da pesquisa

1 – Preparação do problema	▪ Selecionar um problema visando à construção do conceito de otimização. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático de Máximos e Mínimos necessário para a resolução do problema não tenha ainda sido trabalhado em sala de aula.
2 – Leitura individual	▪ Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura individualmente.
3 – Leitura em conjunto	▪ Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos. Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo-lhes o problema. Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, a tecnologia pode ser uma boa aliada.
4 – Resolução do problema	▪ De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da "Matemática nova" que se quer abordar, nesse caso a Otimização, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. Por exemplo, se estivermos no contexto Ensino Médio, espera-se que o problema conduza os alunos a definição da abscissa do vértice da parábola como o ponto médio entre as raízes, ou ainda, ao uso intuitivo da derivada (inclinação da reta tangente) em um ponto. Espera-se ainda que durante a resolução do problema os alunos criem conjecturas, as quais podem ser auxiliadas pela tecnologia, como será visto no tópico 2.4.
5 – Observar e incentivar	▪ Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles e o uso da tecnologia.

	▪ O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios, possivelmente relacionados a funções, e técnicas operatórias já conhecidas e necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem natural para a linguagem matemática (conversão); conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.
6 - Registro das resoluções na lousa[9]	▪ Representantes dos grupos são convidados a expor, usando diferentes recursos, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.
7 – Plenária	▪ Para esta etapa são convidados todos os alunos para discutirem as diferentes resoluções expostas pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem, e também um momento forte para a avaliação.
8 – Busca pelo consenso	▪ Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.
9 – Formalização do conteúdo	▪ Neste momento, denominado “formalização”, o professor registra uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos sobre Otimização construídos através da resolução do problema, enfatizando conceitos,

[9] Pela descrição das etapas por Allevato e Onuchic (2014), é destacado o registro da lousa, mas nada impede que o registro seja realizado de outra maneira.

		definições, teoremas e propriedades pertinentes na solução do problema.
10 – Proposição e resolução de novos problemas	▪	Por fim, novos problemas de otimização são propostos aos alunos, com intuito de averiguar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo do problema gerador e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores.

Fonte: Adaptado de Allevato e Onuchic (2014)

Onuchic (2013) diz que essa metodologia não é uma tarefa simples de ser aplicada em sala, mas enfatiza a recompensa dessa prática:

> Pode-se observar que não é tarefa fácil a de desenvolver o ensino-aprendizagem-avaliação de matemática por meio da resolução de problemas. Tal metodologia demanda professores bem preparados para o seu uso, pois precisam selecionar cuidadosamente os problemas; observar os alunos na busca de soluções para esses problemas, incentivá-los e ouvi-los, mantendo-os confiantes na própria capacidade para resolvê-los. Nas salas de aula onde essa metodologia foi adotada, os alunos se sentiram aptos a dar sentido à matemática que constroem. Professor e alunos, depois dessa experiência, não querem voltar a trabalhar com o método de ensino tradicional. (ONUCHIC, 2013, p.103).

Van de Walle (2009), afirma que a resolução de problemas deve ser vista como uma das principais metodologias de ensino, mesmo que seja uma tarefa difícil para professor e aluno. É gratificante para o professor ver o aluno desenvolver a compreensão por seu próprio raciocínio, e o aluno se sente motivado pelos problemas desafiadores que tornam o conteúdo mais relevante. Nos problemas de otimização, essa metodologia pode ser um instrumento eficaz, visto que as etapas podem colaborar com a compreensão do conteúdo de funções.

Segundo Onuchic (2013) e Nunes (2010), nessa metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas, o professor não tem apenas um papel, mas sim vários, sendo: mediador, observador, organizador, consultor, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem. Enquanto que o aluno, em um processo ativo, é o construtor de seu próprio conhecimento matemático. Assim, ambos trabalham juntos de modo que o ensino e a aprendizagem possam ocorrer simultaneamente.

Essa metodologia defendida pelo GTERP, não exclui as demais concepções de resolução de problemas. Quando o professor utiliza essa metodologia, os alunos podem aprender tanto *sobre* resolução de problemas, quanto aprender Matemática *para* resolver novos problemas, enquanto aprendem Matemática *através* da resolução de problemas (ALLEVATO, 2005).

Com isso, vê-se a possibilidade do uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação para a aprendizagem do conteúdo de Otimização de Funções. Espera-se que o estudante de nível superior passe a compreender os procedimentos realizados nos testes da primeira e da segunda derivada conceitualmente. Por exemplo, compreender o porquê se iguala a zero para determinar um ponto crítico, e não apenas o fazer. E os que forem estudantes de Licenciatura em Matemática, além disso, consigam relacionar os conceitos da Graduação com sua prática no Ensino Médio. Já os estudantes do Ensino Médio, espera-se que sejam capazes de compreender os conceitos que embasam as técnicas utilizadas na resolução de problemas de otimização de funções quadráticas, principalmente.

Abdelmalack (2011) constatou a positividade da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas quando aplicada explorando o conteúdo de derivadas. O trabalho da autora permite averiguar a teoria na prática. Andrea Abdelmalack desenvolveu sua pesquisa de Mestrado com alguns alunos do curso de Graduação em Engenharia em uma universidade de São Paulo. Utilizando problemas geradores, a autora desenvolveu com os alunos o conteúdo de derivadas presente na grade curricular da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

> Nesse contexto, os alunos mostraram-se questionadores, com iniciativas próprias, mais independentes do professor e participativos, promovendo uma mudança de comportamento. Conseguiram aprender os conteúdos de forma significativa, estabelecendo relações entre diversos aspectos importantes para esse estudo. Os dados coletados evidenciaram a importância da utilização de questões abertas e problemas de aplicação em sala de aula. Esse tipo de atividade levou os nossos alunos a formularem hipóteses, interpretarem os dados, estabelecerem estratégias de resolução de problemas e relações entre diversos conhecimentos. Os alunos discutiram processos de resolução e resultados obtidos, construíram relevante conhecimento sobre derivadas e sobre outros conteúdos relativos a conhecimentos previamente adquiridos anteriormente. Tornaram-se mais seguros e confiantes, vivenciando experiências produtivas e agradáveis de aprendizagem da Matemática. (ABDELMALACK, 2011, p. 138).

Com sua experiência, a autora propõe que os professores utilizem essa metodologia com mais frequência.

Para que essa metodologia seja aplicada em sala de aula de diferentes níveis, precisamos que os estudantes de Licenciatura em Matemática (futuros professores) estejam preparados em relação aos conteúdos matemáticos e conheçam essa metodologia. Trabalhos nacionais realizados com alunos de Licenciatura em Matemática (PROENÇA, 2012; AZEVEDO, 2014, BEZERRA, 2017) já relatam resultados positivos com o uso dessa metodologia na formação de professores.

Bezerra (2017), em seu trabalho, analisa as compreensões e dificuldades sobre o conteúdo de funções através de uma oficina, e constata que os alunos foram ativos, procuraram refletir sobre sua prática e a resolução de problemas. Além de que a resolução de problemas aplicada a turma da licenciatura, auxiliou na compreensão do conteúdo de funções.

Com base em um curso sobre a metodologia de resolução de problemas e a partir da prática possibilitada pela disciplina de Estágio Curricular Supervisionado, Proença (2012) investigou questões relacionadas à formação inicial de professores sobre essa metodologia. Os resultados mostram que alguns alunos ficaram preparados para utilizar a metodologia em sua prática profissional (PROENÇA, 2012).

Assim como Proença (2012), Azevedo (2014) utilizou disciplinas da Educação Matemática para trabalhar com aspectos práticos e teóricos da resolução de problemas com alunos da licenciatura. Os resultados mostraram que a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas pode ser um forte aliado para preparar o (futuro) professor de Matemática. E além disso, possibilita averiguar fragilidades no conhecimento de (futuros) professores.

A resolução de problemas permite, em determinadas situações, trabalhar um mesmo problema sob diferentes contextos e níveis de resolução. Na formação de professores de Matemática é essencial que o (futuro) professor saiba e consiga constatar as relações conceituais dos conteúdos matemáticos entre o Ensino Superior e o Ensino Médio, de modo, que faça sentido a sua formação superior quando aplicada nas aulas do Ensino Médio. Onuchic e Morais (2013) afirmam em seu trabalho, sobre resolução de problemas de otimização na formação de professores, que o aluno pode passar a inter-relacionar os conteúdos da sua formação com sua prática docente, quando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através de resolução de problemas é estudada e apresentada como uma possibilidade de trabalho. Pois, considerando que problemas permitem algumas vezes diferentes níveis de resoluções, o aluno pode verificar que sua formação está presente em conteúdos do Ensino Médio, principalmente relacionados ao conteúdo de Cálculo, ao qual é exemplificado no trabalho das autoras. Além disso, aquilo que é aprendido na sua formação, tem maiores chances de serem incorporadas à sua prática, pois teve relação direta com o que iria ensinar (ONUCHIC; MORAIS, 2013).

Enquanto Ensino Médio, a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mostra uma possível estratégia de verificação de dificuldades na aprendizagem. O trabalho de Pagani (2016), desenvolvido com alunos do Ensino Médio integrado ao Técnico em Eletrônica, no ensino e aprendizagem de derivadas, permitiu que professor e alunos percebessem dificuldades no aprendizado do conteúdo, e que diante disso, possibilitasse o professor mudar estratégias de ensino. A autora ratifica que a avaliação é parte integrante do ensino de Matemática através da resolução de problemas. A avaliação serve como um processo que busca compreender o significado dos erros e dos acertos, para então permitir que o professor crie estratégias de ensino que possam ampliar a aprendizagem do estudante (PAGANI, 2016).

Além dos resultados de trabalhos aplicados em diferentes níveis de ensino, outros trabalhos favorecem nosso estudo pela apresentação de atividades e problemas que possam ser utilizados por professores de nível básico e/ou superior. Esses são os casos dos trabalhos de Travassos et al. (2014) e Menino e Onuchic (2017), que apresentam propostas de atividades, algumas já aplicadas outras não.

Assim, esses trabalhos citados serviram de inspiração para o desenvolvimento do Produto Educacional desta dissertação. As atividades sobre funções foram adaptadas de modo que adentrem ao objetivo do nosso trabalho. Elas auxiliaram na escrita de problemas geradores sobre o conteúdo de Máximos e Mínimos.

Para concluir, retomamos o trabalho de Abdelmalack (2011), quando a autora afirma em seu trabalho que a tecnologia poderia ter colaborado positivamente com os resultados da sua experimentação. Acredita que talvez com a tecnologia poderia proporcionar um melhor aproveitamento das atividades, ajudando os alunos na construção de gráficos em relação a flexibilidade e precisão, além de uma melhor visualização das funções. Sugere, por fim, que as atividades sejam reformuladas com o uso da tecnologia.

Sendo assim, isso nos proporciona uma maior confiança em utilizar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pela tecnologia, para explorar o conteúdo de Otimização de Funções.

2.4 MATEMÁTICA DINÂMICA

Na década de oitenta, mais precisamente, em 1985, na França, foi criado o software Cabri-Géomètre, e nos Estados Unidos, o The Geometer’s Sketchpad, que são ferramentas computacionais que possibilitam abordar a Geometria de maneira dinâmica (BRAVIANO; RODRIGUES, 2002). Com o passar dos anos esses foram evoluindo, e surgindo outros softwares de geometria dinâmica, como por exemplo, Winplot, Cinderella e GeoGebra.

A expressão ‘geometria dinâmica’, refere-se a Geometria implementada no computador, a qual possibilita manipular objetos matemáticos. Esse nome pode ser melhor compreendido como sendo oposto a geometria tradicional de régua, compasso, etc, que é ‘estática’. (BRANDÃO; ISOTANI, 2003).

No ensino da Matemática o uso da tecnologia vem ganhando força. São diversos os trabalhos (BORBA; PENTEADO, 2007; TALL; SMITH; PIEZ, 2008; RICHIT, 2010; SILVA, 2010) que relatam resultados positivos com essa estratégia de ensino.

Silva (2010, p. 63), afirma que o uso da tecnologia, além de valorizar conteúdos e construções, ajuda a "desenvolver algumas importantes características como experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e demonstrar."

Vale ressaltar que visualizar em Matemática vai além do sentido de 'ver', é a capacidade de criar imagens mentais que o estudante possa manipular em sua mente (HITT ESPINOSA, 1997).

Pjanic, Lidan e Kurtanovic (2015), afirmam que o uso de softwares no ensino e aprendizagem da Matemática, pode ser benéfico para os alunos, já que, as manipulações algébricas e geométricas possibilitadas pelos softwares de geometria dinâmica prendem a atenção deles, auxiliando em uma maior concentração nos conceitos explorados.

As manipulações de objetos físicos, além de colaborar com a concentração, é um dos fatores que possibilita ao estudante ter uma intuição sobre a resolução do problema (VALE, 2017). Segundo a mesma autora, na resolução de problemas a intuição é bastante importante, pois, estabelece o momento em que o caminho para a resposta ao problema talvez tenha sido encontrado, e deixa assim a situação parecer mais simples.

A tecnologia com seu potencial em explorar conteúdos abstratos e deixá-los um pouco mais "concretos", fornece um conhecimento intuitivo sobre determinados conceitos, que poderá servir como base para uma compreensão mais formal (CABRAL, 2015). Por exemplo, o estudante pode primeiramente estudar apenas o sinal da derivada, para depois ser apresentado a definição do teste da primeira derivada.

Além da Geometria, softwares de geometria dinâmica vem se destacando como estratégia de ensino sobre os conteúdos de Funções. No livro de Borba e Penteado (2007), os autores apresentam algumas experiências realizadas com alunos do nível básico sobre esse conteúdo. Os resultados provenientes dessa experimentação e das experiências dos autores com o uso da tecnologia, mostram as vantagens em trabalhar com a tecnologia no ensino da Matemática. Segundo eles a tecnologia permite que o estudante faça experimentações e crie conjecturas.

O uso de softwares de geometria dinâmica pode ainda colaborar com o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral, o qual trabalha com funções de maneira dinâmica, explorando principalmente a dependência funcional.

Tall, Smith e Piez (2008, p. 6), relatam sobre o desenvolvimento do ensino de Cálculo após as tecnologias digitais:

> O cálculo tradicional, antes da chegada da tecnologia, se concentrou na construção de técnicas simbólicas de diferenciação, integração e solução de equações diferenciais, complementando-as, quando apropriado, por imagens estáticas de gráficos para ilustrar os fenômenos envolvidos. A tecnologia fornece imagens dinâmicas sob o controle do usuário que podem dar novos insights sobre conceitos. Por exemplo, através da ampliação de um gráfico, a imagem resultante pode revelar que o gráfico é 'localmente uma reta.' Então, ao olhar ao longo do gráfico para inspecionar a mudança de inclinação, ou traçando uma linha em movimento através de dois pontos próximos ao longo do gráfico, o aluno pode visualizar a mudança de inclinação como uma função global. (TALL; SMITH; PIEZ, 2008, p. 6, tradução nossa).

Nesse trabalho sobre o Cálculo Diferencial, a maioria dos estudantes que usaram a tecnologia demonstram compreender melhor a mudança na inclinação do gráfico e esboçá-lo com muito mais discernimento do que um estudante que usava apenas lápis e papel (TALL; SMITH; PIEZ, 2008).

Geralmente os professores destacam aspectos algébricos no ensino de Cálculo, mas devemos resgatar a natureza dinâmica dessa disciplina (RICHIT, 2010). Os softwares de geometria dinâmica, possibilitam manipular, simular e visualizar aspectos conceituais do Cálculo. Para Richit (2010), ao utilizarmos a tecnologia como estratégia de ensino do Cálculo, o foco não se resume apenas nos procedimentos e técnicas utilizados para resolver um problema, "mas, também, na aprendizagem, visto que a utilização dos recursos das tecnologias digitais pode conduzir os estudantes a modos diferentes de pensar e produzir conhecimentos." (p. 30). Ademais, segundo a autora, os softwares favorecem os aspectos como aprofundamento do pensamento matemático, conjecturas e validações por partes dos estudantes.

Menk (2005), destaca as potencialidades do ensino de Máximos e Mínimos de Funções, quando trabalhado a partir de problemas e o uso de softwares de geometria dinâmica. Com base nos resultados observados, a autora acredita que esse procedimento possa criar condições que possibilitam facilitar a interpretação, a observação, a análise e a resolução dos problemas considerados. Para a autora os softwares viabilizam as diferentes representações dos conceitos abordados em um problema de otimização, e com isso criam uma abordagem para que ocorra a compreensão.

Corroborando com essa ideia, Borba e Penteado (2007), enfatizam que a tecnologia anseia a experimentação e a coordenação de forma dinâmica das diferentes representações de um objeto. Ou seja, a tecnologia pode ajudar na compreensão do Cálculo explorando as múltiplas representações, tais como, gráficas, algébricas, geométricas, planilhas, etc.

Desta forma, considerando as características da teoria de Raymond Duval, o uso da tecnologia, em especial os softwares de geometria dinâmica, podem favorecer a compreensão dos conceitos de Otimização. Não é conveniente ficarmos preso a apenas um tipo de representação, afinal, segundo a teoria, um indivíduo só compreende determinado conceito, propriedade ou definição quando consegue transitar entre as diferentes representações.

Isso posto, os softwares de geometria dinâmica têm um papel importante nessa transição, visto que:

> [...] constituem um meio de transformações de todas as representações produzidas na tela. Em outras palavras, eles não são somente um instrumento de cálculo cuja potência cresce de modo ilimitado, mas eles cumprem uma função de simulação e de modelagem que ultrapassa tudo o que podemos imaginar 'mentalmente' ou realizar de modo gráfico-manual. (DUVAL, 2013, p. 32).

O trabalho desenvolvido por Menk, Póla e Barbosa (2005), com alunos de Cálculo no nível superior usando problemas de otimização, mostrou que além das diferentes representações de conceitos do Cálculo possibilitados pela tecnologia, durante as entrevistas os alunos destacaram diferentes preferências entre as representações. Enquanto alguns preferiam gráficas e tabelas, outros preferiam gráficas e geométricas, por exemplo (MENK; PÓLA; BARBOSA, 2005). Esse é um outro motivo pelo qual o professor deve transitar entre as diferentes representações, e a tecnologia pode facilitar essa prática.

Tendo destacado as potencialidades da tecnologia quanto a manipulação e apresentação das diferentes representações de objetos matemáticos, entre outras, temos o pressuposto que diante disso, os resultados oriundos da prática do uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pela tecnologia, pode ser alavancada.

Com foco na aprendizagem da Otimização de Funções, Silva (2010) afirma que softwares de geometria dinâmica auxiliam o aluno a obter uma visão mais ampla do problema, podendo explorar os parâmetros da função que poderá ser maximizada ou minimizada. Para mais, em relação as potencialidades das tecnologias na resolução de problemas presentes na disciplina de Cálculo, Allevato, Jahn e Onuchic (2017, 249), afirmam que:

> o computador privilegia o pensamento visual sem, contudo, implicar na eliminação do algébrico. No Cálculo, pode-se empregar informações gráficas para resolver questões que também podem ser abordadas algebricamente e relacioná-las. É o caso da representação gráfica da função derivada que possibilita interessantes análises sobre o comportamento e os extremos das funções. Além disso, a abordagem visual tem demonstrado facilitar a formulação de conjecturas, refutações, explicações de resultados e sobre o comportamento dos objetos, dando espaço, portanto, à reflexão.

Com isso, acredita-se que o uso da tecnologia como mediador na resolução de problemas de otimização de funções, pode ser um importante meio para a aprendizagem.

A resolução de problemas mediada pela tecnologia estimula habilidades cognitivas, bem como, auxiliam o aluno na forma como reorganizar o pensamento, interpretar e interagir com o problema (RICHIT, 2016). A autora ainda afirma que:

> a incorporação das tecnologias digitais nas atividades de resolução de problemas pode ampliar as investigações matemáticas, favorecer a elaboração e verificação de novas conjecturas, facilitar e otimizar o processo de execução das estratégias de solução pré-definidas, bem como promover a verificação dos resultados. Portanto, a articulação entre a resolução de problemas e as tecnologias digitais propicia abordagens/metodologias/pedagogias diferenciadas em Matemática. (RICHIT, 2016, p. 118).

Para mais, Onuchic e Allevato (2012, p.245) afirmam também, que a tecnologia se torna um grande recurso quando associado à resolução de problemas, pois:

> A exploração das possibilidade de representação algébrica, numérica e gráfica que, por exemplo, o computador oferece, a coordenação dessas representações e a compreensão das relações que as vinculam permitem ao aluno conectar conhecimentos que, de outra forma, permaneceriam separados; porém, se conectados, geram compreensões Matemáticas mais amplas e completas [...] Ao utilizar o computador na Resolução de Problemas que visam à introdução de um novo conceito, o processo subsequente de formalização dos conteúdos matemáticos, conforme tem sido mostrado nas pesquisas atuais, apresenta-se amplamente facilitado devido a esta abordagem empírica e experimental que o computador possibilita. O significado de um conceito matemático é interiorizado pelo aluno, tornando o processo de formalização Matemática mais fácil e natural.

E ainda, ao utilizar essa abordagem (resolução de problemas e tecnologias), alunos e professores podem apresentar, comparar e refletir sobre os problemas e suas soluções (CABRAL, 2015).

Destacando o ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas de otimização de funções, Onuchic e Morais (2013), constatam na prática a importância da utilização de diferentes representações de um mesmo objetivo e o uso da tecnologia nessa temática. No trabalho das autoras, essa abordagem colaborou com a resolução do problema, visto que a ferramenta tecnológica e as diferentes representações potencializaram a visualização e quebra de conjecturas, permitindo que o estudante conseguisse formular uma resposta ao problema.

Os alunos participantes da pesquisa de Numer e Justo (2015) relatam que se sentiram mais confiantes quando visualizaram uma representação gráfica interativa de um problema de otimização de funções polinomiais aplicado a turma. Afirmam ainda, que não sabem se conseguiriam resolver o problema sem o aplicativo do software de geometria dinâmica, pois o mesmo permitiu visualizar e compreender o problema.

São vários os softwares de geometria dinâmica (Cinderela, Cabri-Geometry, GeoGebra, etc.) existentes no mundo da tecnologia digital referente a Matemática. Neste trabalho exploraremos o software GeoGebra, que é um software livre para ser trabalhado on-line, como aplicativo instalado no computador ou em smartphone, com grandes potencialidades dinâmicas que colaboram com o ensino e aprendizagem da Matemática. O software GeoGebra possibilita o uso de um sistema de geometria dinâmica, paralelo ao sistema de álgebra computacional, permitindo que o estudante trabalhe em um ambiente com duas (ou mais) representações diferentes de determinados objetos ao mesmo tempo. Esse software disponibiliza uma enorme variedade de ferramentas, como por exemplo: planilha eletrônica, álgebra, estatística, gráficos, cálculo, geometria, entre outros. Além disso, o site do software possui uma comunidade de professores e alunos que colaboram com a divulgação de materiais para diversos níveis de ensino. Os materiais podem ser disponibilizados para serem utilizados e/ou adaptados por professores e alunos. Outras informações técnicas sobre o software GeoGebra podem ser consultadas em Lemke (2017).

Conforme afirma Dikovic (2009), o GeoGebra permite que os alunos percebam as conexões entre representações simbólicas e visuais, levando-o a aprendizagem matemática. Ademais, cita várias outras vantagens em o professor utilizar esse software em sala, sendo algumas delas: a fácil manipulação das ferramentas, aprendizagem por descoberta experimental e, fácil manipulação de variáveis e análise de suas dependências.

Além disso,

> GeoGebra é um software de geometria dinâmica que suporta construções com pontos, linhas e todas as seções cônicas. Ele também fornece recursos típicos para um sistema de álgebra computacional, como encontrar pontos importantes de funções (raízes, extremos locais e pontos de inflexão de funções), entrada direta de equações e coordenadas, encontrar derivadas e integrais das funções inseridas. Isso é a razão pela qual o GeoGebra é uma boa escolha para múltiplas apresentações de objetos matemáticos. (DIKOVIC, 2009, p. 192, tradução nossa).

Araújo e Nóbriga (2008) apontam alguns aspectos, que evidenciam a importância da utilização do software GeoGebra no estudo de conceitos matemáticos. Dentre esses aspectos, os autores abordam que a construção auxilia o aluno a visualizar e manipular, de diferentes formas, o comportamento geométrico dos elementos envolvidos; permite que o aluno crie conjecturas na resolução de problemas; permite variar entre o material e o abstrato; e permite representações precisas de funções matemáticas.

Além desses motivos, o software GeoGebra foi escolhido para complementar este trabalho, pois a autora tem mais familiaridade. Visto que o utilizou em seu Trabalho de Conclusão de Curso (CARDOSO, 2016) e, costuma usar na sua prática pedagógica.

Apesar dos aspectos positivos citados, não podemos deixar de considerar que usando a tecnologia estamos sujeitos a riscos de imprevistos (BORBA; PENTEADO, 2007), como por exemplo, aparelho tecnológico não funcionar por falhas técnicas, softwares não executarem corretamente os aplicativos, etc.

Contudo, esperamos que as dificuldades em utilizar a tecnologia sejam menores do que as vantagens. Logo, apostamos que o GeoGebra associado a resolução de problemas, pode colaborar com o ensino e aprendizagem de Otimização de Funções, visto que essa tecnologia, além de facilitar a visualização, exploração, conjecturação, também auxilia nas habilidades de interpretação e argumentação sobre o (a) problema (solução) (DOMÈNECH, 2009), minimizando o tempo gasto com as etapas de compreensão do problema, e estimulando a aprendizagem.

A otimização trabalha com um objetivo presente em várias áreas – otimizar (custos, processos, tempo, produtividade, etc). Com esse viés, ela tem uma aplicabilidade que pode estar no cotidiano das pessoas, bem como, no de grandes empresas. Considerando os referenciais abordados, podemos dizer que quando um indivíduo se depara com um problema, sua compreensão sobre o mesmo pode ser aprimorada quando o problema, de alguma forma, pode ser visualizado, como por exemplo, Jornais e Revistas que apresentam imagens/gráficos com o objetivo de facilitar a compreensão de alguns dados, ou simplesmente para prender a atenção. Em um problema de otimização a visualização pode fomentar a compreensão, e quando abordado usando softwares de geometria dinâmica, as estratégias de resolução podem aparecer mais rapidamente, e utilizando a mesma tecnologia, o indivíduo pode experimentar e/ou refutar essas estratégias. Com isso, a aprendizagem matemática começa a surgir, com mais ou menos facilidade que para outros indivíduos, visto que, enquanto resolvemos problemas, é inevitável a utilização de nossos conhecimentos prévios.

Assim, com base no referencial teórico apresentado percebemos que a tecnologia é um recurso que pode auxiliar positivamente na resolução de problemas de otimização de funções, desde sua interpretação, até a compreensão dos conceitos necessários para resolução e formalização.

Logo, apoiados nas ideias e afirmações apresentadas, acreditamos na possibilidade de colaborar com o ensino e aprendizagem de Otimização de Funções, trabalhando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

3 METODOLOGIA

A metodologia de pesquisa deste projeto é classificada como qualitativa e interpretativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Essa metodologia tem um caráter que concilia com a investigação em sala de aula. Segundo Bogdan e Biklen (1994) ela possui cinco caraterísticas comuns entre as pesquisas de sala de aula, as quais serão descritas a seguir.

Temos inicialmente que na investigação qualitativa e interpretativa a fonte direta de dados é o *ambiente natural*. Muitos investigadores têm utilizado como ferramenta para recolhimento de dados o vídeo ou o áudio, porém, muitos se limitam exclusivamente a utilizar um bloco de anotações e um lápis. Assim, essas informações são complementadas ao decorrer do trabalho com as informações obtidas através do contato direto do observador com o ambiente. Segundo os autores, Bogdan e Biklen (1994), investigadores qualitativos tendem a frequentar seus ambientes de estudo, pois se preocupam com o contexto, visto que ações podem ser melhor compreendidas quando observadas no ambiente real do evento, como por exemplo, a sala de aula. Assim, seja qual for a forma escolhida para recolhimento dos dados, o investigador qualitativo deve saber o quanto o comportamento humano é influenciado pelo contexto em que ocorre, frequentando-o sempre que possível.

Uma segunda característica é que a investigação qualitativa é *descritiva*. Os dados obtidos devem ser em forma de palavras ou imagens, mas não de números. Assim, "os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais." (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 48).

A terceira nos diz que "investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 49). Os autores afirmam que o objetivo do investigador é saber como as coisas acontecem, desenvolvem? Como é que determinadas noções começaram a fazer parte daquilo que consideramos ser o "senso comum"? Podemos pensar nessa característica com foco na educação, se questionando como os alunos desenvolvem a aprendizagem? Por que determinadas ações são tomadas?

A quarta característica afirma que investigadores qualitativos tendem a analisar os dados obtidos de forma *indutiva*. Dessa forma, os investigadores recolhem os dados e começam a construir abstrações conforme os dados particulares vão se agrupando, isso, sem antes terem criado hipóteses (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

E por fim, temos que o "significado é de importância vital na abordagem qualitativa" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 50). Investigadores em educação questionam os sujeitos investigados com o objetivo de perceber como eles interpretam as suas experiências. O processo de condução de investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos.

Assim, a metodologia de pesquisa utilizada nesse trabalho para o recolhimento e análise dos dados foi a qualitativa e interpretativa. Guiados pelas características citadas acima, essas análises foram oriundas das experimentações de sequências didáticas em algumas salas de aula do Ensino Médio, Ensino Superior e Pós-Graduação, visando o ensino e aprendizagem de Máximos e Mínimos de Funções, bem como, colaborar com a formação de (futuros) professores. A seguir serão descritos os procedimentos metodológicos.

Etapa 1 - Escolha do universo da experimentação: Escolhemos o universo para experimentação de modo que estivesse relacionado com nossa pesquisa, sendo eles: Ensino Médio, Ensino Superior e Mestrado.

Etapa 2 - Entrevista pré-experimentação com o professor: Iniciamos com uma entrevista com o professor responsável pela turma piloto, com o objetivo de colher informações sobre a turma (Apêndice A e B). O áudio da entrevista foi gravado. Essas informações foram importantes para que o pesquisador pudesse escolher/adaptar o problema de Otimização mais adequado ao estilo da turma, visto que a escolha do problema é essencial para aguçar o interesse do aluno em resolvê-lo (POLYA, 1995; ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Etapa 3 - Elaboração da sequência: Elaboramos a sequência didática tendo como base as características do universo de experimentação. Assim, foi selecionado o(s) problema(s) e descritas as etapas a serem realizadas.

Etapa 4 - Experimentação: Aplicamos a sequência em dia, local e horário agendado com o professor responsável pela turma.

Etapa 5 - Coleta dos dados: Primeiramente foram solicitadas as assinaturas nos termos de consentimento[10] e Carta de Anuência (Apêndice D). Após o recolhimento das assinaturas, os dados foram coletados a partir de anotações do(s) observador(es)[11], resolução dos alunos, gravação de áudio (utilizando *tablets*) e das considerações do professor que aplicou.

Etapa 6 - Entrevista pós-experimentação com o professor: A entrevista visou obter as contribuições do professor da turma sobre a experimentação realizada (Apêndice C). O áudio da entrevista foi gravado para posterior análise.

---

[10] Termo de Consentimento dos alunos do Ensino Médio (Apêndice E), Termo de Consentimento dos pais dos alunos do Ensino Médio menores de idade (Apêndice F), Termo de Consentimento para os alunos do Mestrado (Apêndice H) e Termo de Consentimento para os alunos da Graduação (Apêndice J).

[11] A autora deste trabalho se denominará como professora, quando estiver por atuando como professora e observadora nas experimentações.

Etapa 7 - Análise dos dados: Com os dados oriundos das experimentações sobre a abordagem de resolução de problemas utilizada, foi analisado se a proposta da atividade alcançou os objetivos em relação ao ensino e aprendizagem de Otimização com auxílio da tecnologia, conforme referencial teórico (ONUCHIC et al., 2014; DUVAL, 2009; RICHIT, 2016).

Etapa 8 - Produto educacional: Com os resultados dessas experimentações as sequências didáticas foram atualizadas e então implementadas no GeoGebraBook – uma ferramenta on-line disponibilizada pelo software GeoGebra, que permite criar um livro digital (que chamaremos de Caderno Didático) usando as potencialidades do software. Além das sequências aplicadas, esse Caderno Didático apresenta outras sequências didáticas compostas com problemas de Otimização. Os problemas serão adaptados de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral ou do Ensino Médio, teses, dissertações e artigos correlatos.

Por fim, vale ressaltar que o tratamento dos dados foi realizado utilizando essa metodologia de pesquisa qualitativa e interpretativa de Bogdan e Biklen (1994), que possibilitam essa abordagem.

Nessa perspectiva, criamos um caderno didático, utilizando o GeoGebraBook, que apresenta sequências didáticas para o ensino e a aprendizagem de Otimização, mediadas pela resolução de problemas e recursos do software GeoGebra, conforme apresentado no capítulo seguinte.

4 EXPERIMENTAÇÕES E ANÁLISE DOS RESULTADOS DE ALGUMAS ATIVIDADES

Neste capítulo apresentamos as experimentações de algumas atividades do Produto Educacional, Máximos e Mínimos: situações-problema com recursos dinâmicos, que será descrito no Capítulo 5. Realizamos as experimentações de problema(s) de Otimização de Funções em três turmas de diferentes níveis: Primeiro ano do Ensino Médio, Cálculo Diferencial e Integral I (Superior) e, Fundamentos da Matemática (Mestrado). A ordem das experimentações ocorreu conforme serão apresentadas, sendo primeiro a turma do Ensino Médio, seguido da Pós-Graduação, e por fim, a Graduação. A ordem de experimentações se deve ao cronograma de aulas dos professores regentes dessas turmas.

A experimentação na turma do Ensino Médio ocorreu com o objetivo de introduzir o conteúdo de Máximos e Mínimos de Funções. Enquanto que a escolha pelas turmas de nível superior e Pós-Graduação foi para que pudéssemos, além de introduzir o conteúdo, oportunizar que o (futuro) professor relacionasse a Matemática da sua formação, com sua prática pedagógica.

A análise das experimentações se deu com foco na teoria de representação semiótica e a tecnologia utilizadas durante a resolução de situações-problema.

A apresentação de cada experimentação iniciará pelo contexto, em seguida os resultados sobre as estratégias de resolução, depois as observações da plenária, busca pelo consenso e formalização, e por fim, algumas considerações, isso em consonância com a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas.

4.1 CONTEXTO DA EXPERIMENTAÇÃO NA TURMA DO ENSINO MÉDIO

A experimentação ocorreu na turma do primeiro ano do curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio no Instituto Federal Catarinense – *Campus Araquari*, na disciplina de Matemática. Essa disciplina tinha como objetivo que o estudante lesse, compreendesse e aplicasse conceitos e fundamentos matemáticos relacionados ao estudo de funções, do primeiro ano do Ensino Médio, relacionando-a com situações do cotidiano e que poderão ser úteis ao longo de sua vida profissional e social.

A professora regente da turma era a própria autora deste trabalho, sendo assim, não houve a entrevista pré-experimentação, nem pós-experimentação, porém as informações referentes a turma e a prática do professor serão relatadas de acordo com o viés da minha prática docente.

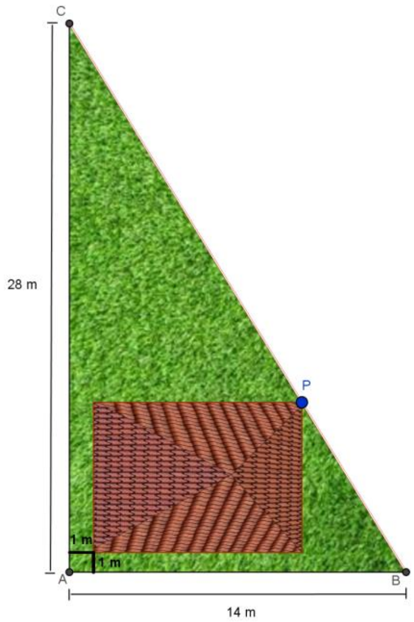
Após as autorizações concedidas pela instituição, a professora regente preparou a atividade a ser aplicada, conforme apresentada no Quadro 2. Ela tem como objetivo introduzir o conteúdo de Máximos e Mínimos de uma Função Polinomial do Segundo Grau utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pela tecnologia.

Quadro 2 – Atividade aplicada a turma do Ensino Médio – Problema 1 Área da Casa

Problema 1 – Área máxima da casa

José ganhou como herança um terreno triangular, conforme Figura 1, e deseja construir uma casa retangular com a maior área possível. Entretanto, ele precisa respeitar algumas restrições impostas pelo Plano Diretor de sua cidade para a construção. Algumas das restrições são que o canto indicado pelo ponto P fique sobre a lateral BC do terreno e, que fique a 1m de distância das laterais AB e AC.

Figura 1 – Construção de uma casa em um terreno triangular



Fonte: Adaptada de Cardoso (2016)

Ajude José encontrar as medidas da casa, que deverá construir, para que a área dela seja máxima.

Fonte: a autora

Vale ressaltar que antes da experimentação os alunos já utilizaram o software GeoGebra nas aulas de Matemática com a professora regente e o conteúdo de Funções Quadráticas, que antecede Máximos e Mínimos, também havia sido lecionado. Uma das questões de uma avaliação que antecedeu a experimentação, necessitava de estratégias que podem ser utilizadas e aprimoradas pelos alunos na resolução dessa situação-problema.

A experimentação ocorreu em 07 aulas de 45 minutos, sendo 05 aulas em um primeiro dia e 02 aulas em outro dia.

No primeiro dia de experimentação foram realizadas todas as etapas até a busca pelo consentimento, conforme serão descritas a seguir. Nesse dia a experimentação ocorreu em um laboratório de informática na mesma instituição de ensino. No segundo dia, foi possível concluir a formalização e proposição de novos problemas, conforme também serão descritos na ordem. Nesse segundo dia a experimentação ocorreu na sala de aula regular da turma, contendo quadro branco e TV, que favoreceram a formalização utilizando em alguns momentos a tecnologia.

A turma tinha um total de 36 alunos, e no primeiro dia de experimentação compareceram 32. Nesse dia a turma se dividiu em grupos, conforme propõe a metodologia, e dois desses grupos, escolhidos aleatoriamente, tiveram o áudio gravado durante a discussão. Além disso, foram recolhidos os registros de resoluções feitos pelos grupos [12].

A professora ainda não havia utilizado a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através de resolução de problemas durante sua experiência profissional, mas tinha como práxis a utilização do software GeoGebra.

A atividade foi entregue aos alunos e então solicitado que fosse realizada a leitura individualmente. Feito isso, os alunos se reuniram em grupos de três a cinco pessoas, formando oito grupos que serão chamados de G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7 e G8 e os integrantes de cada grupo serão chamados de G1_A1, G1_A2, ..., G2_A1, etc. Foram gravados e transcritos os áudios dos grupos G2 e G5.

Enquanto os alunos buscavam compreender o problema em grupo, a professora enviou o aplicativo do GeoGebra[13] para o e-mail da turma. Infelizmente os computadores do laboratório não executaram corretamente o aplicativo, devido a incompatibilidade de sistemas operacionais, impossibilitando que os alunos o manuseassem dinamicamente. Porém, muitos alunos haviam trazido seu notebook particular o que possibilitou que alguns grupos manuseassem o aplicativo.

Após discutirem suas estratégias, a professora solicitou que apresentassem a resolução, em uma folha A0. Feito isso, em plenária os grupos apresentaram suas resoluções e concluíram uma possível estratégia de solução para o problema.

[12] Para todos os registros escritos e áudios gravados a autora teve o consentimento dos pais.
[13] Link do aplicativo: https://ggbm.at/BerFzxRZ

No segundo dia de experimentação ocorreu a formalização e proposição de novos problemas. Os problemas foram resolvidos em sala no decorrer das aulas. Para formalização a professora utilizou o livro didático e o software GeoGebra.

Diante desse contexto, a seguir serão relatados os resultados obtidos na experimentação da atividade apresentada no Quadro 2.

4.1.1 Resultados – Ensino Médio

Vários grupos buscaram inicialmente resolver o problema utilizando conceitos da Trigonometria, como cálculo de área de um triângulo, relações trigonométricas e perímetro. Assim calcularam, principalmente, a hipotenusa e área do terreno (triângulo ABC). Outra estratégia utilizada por quase todos os grupos na resolução do problema foram conceitos de Função Polinomial, tanto geometricamente, como algebricamente, baseados no que havia sido visto em sala, como por exemplo, dependência entre as variáveis, estudo dos coeficientes de uma função afim, análise gráfica de função afim e análise gráfica de função quadrática.

Um grupo resolveu o problema utilizando apenas uma estratégia, e foi utilizando os conceitos de função. Todos os demais demonstraram discutir outras ideias. Essas informações foram coletadas pelos registros da professora e dos alunos.

Somente um dos grupos não concluiu a função área da casa algebricamente. Os demais grupos observaram a função área da casa utilizando os conceitos de Trigonometria e/ou Função Polinomial, citados anteriormente. A função área encontrada será apresentada a seguir durante o relato detalhado sobre as estratégias de alguns grupos.

Após os grupos encontrarem a função área da casa, precisavam calcular a medida de uma lateral da casa (largura da casa) para a qual se obtinha a maior área da casa. Para isso, os grupos G5 e G7 utilizaram algumas fórmulas estudadas no Ensino Médio que resultam nesses valores. Suponha uma função quadrática,

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

e coeficientes a, b e c números reais. Considerando que a função quadrática tenha um vértice, ponto em que atinge seu valor de máximo ou mínimo, a abscissa e ordenada desse ponto (vértice) podem ser obtidas através das fórmulas x do vértice (x_v) e y do vértice (y_v), apresentadas a seguir, respectivamente:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad\qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Esses dois grupos não deduziram a fórmula, apenas utilizaram pesquisas na internet e o livro didático da disciplina de Matemática do primeiro ano do Ensino Médio.

Os grupos G1, G2, G4 e G6, não utilizaram as fórmulas x_v e y_v já deduzidas, partiram da ideia que a abscissa do vértice fica no ponto médio do segmento com extremos nas raízes da parábola, ou seja, a média aritmética entre as raízes. Essa ideia pode ter sido obtida como uma conversão do registro gráfico para o algébrico. E para calcular a ordenada no vértice, apenas substituíram na função área o valor encontrado como abscissa do vértice, que são as ideias utilizadas para demonstrar essas fórmulas.

O grupo G8 conseguiu observar a função área algebricamente, porém, não realizou cálculos para verificar o valor máximo da área da casa, apenas plotou a função no software GeoGebra e constatou, pelo gráfico, qual era o valor máximo. O G3 não conseguiu encontrar a função área, nem o respectivo valor da área máxima.

Sendo assim, no contexto da questão, alguns grupos utilizaram a fórmula do x_v, ou apenas a média entre as raízes da função área encontrada, para calcular a medida da base da casa (largura da casa). Enquanto que para encontrar a área máxima da casa, alguns grupos utilizaram a fórmula y_v, ou substituíram o valor da base da casa (x_v) na função área, ou ainda, apenas consultaram o resultado da área máxima da casa plotando e visualizando a função área no software GeoGebra.

O Quadro 3 apresenta um apanhado das estratégias utilizadas pelos grupos do Ensino Médio.

Quadro 3 - Estratégias utilizadas pelos grupos do Ensino Médio na resolução do Problema 1 – Área da casa

Estratégias		**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**	**G6**	**G7**	**G8**
Trigonometria	Cálculo de área		X	X	X	X			
	Relações trigonométricas		X						
	Perímetro					X			
Funções	Dependência entre as variáveis	X	X			X	X		X
	Coeficientes das funções	X	X	X	X	X	X	X	X
	Análise de gráfico de função		X	X	X	X		X	X
	Vértice de parábola (x_v e y_v)					X		X	
	Ponto médio entre as raízes da função quadrática	X	X		X		X		
	Cálculo da área máxima substituindo a abscissa do vértice	X	X		X		X		
	Ferramentas do GeoGebra para encontrar o máximo da função					X			X

Problema solucionado:	Parcialmente								X
	Completamente	X	X		X	X	X	X	
Problema não solucionado				X					

Fonte: a autora

Por observação da professora e áudios transcritos, constatou-se que os alunos utilizaram a internet em vários momentos, por exemplo, para conferir fórmulas de cálculo de área de figuras planas, relações trigonométricas, teorema de Tales, coeficientes das funções afim e quadrática e as fórmulas das coordenadas do vértice da parábola, durante suas estratégias de resolução.

Visto que a professora estava na qualidade de professora e observadora, será dado ênfase aos resultados obtidos pelos grupos G2 e G5 que tiveram os áudios gravados e transcritos.

O grupo G5 usou como estratégia inicial conceitos de função e Trigonometria. Parte da hipótese que a área máxima da casa podia ser obtida como um ponto de máximo de uma função quadrática. Assim, eles criaram a conjectura que esse ponto máximo seria obtido quando o ponto P for o ponto médio do segmento BC, conforme mostra a transcrição do áudio, no momento em que o grupo já estava com acesso ao aplicativo do problema:

G5_A3: Abre o arquivo. Aí, tu pode mexer ele ali.
[...]
G5_A1: A gente sabe que o ponto P aqui é móvel.
G5_A3: Uhum.
G5_A1: E a gente quer saber só o P. A gente quer saber que... a gente quer saber o ponto de máximo. Ponto de máximo dessa função.
G5_A4: Ou seja, se for uma parábola é exatamente aquele ponto em que ele faz a curva. Certo? Concorda comigo? Se ele estiver aqui em cima ele está em uma extremidade da parábola.
G5_A1: Sim.
G5_A4: Ou seja, quando ele está aqui, no comecinho ele vai fazer toda essa volta e vai vir para cá na parábola. Concorda comigo que a metade de B e C vai ser o ponto máximo? Vai ser exatamente no meio. Se esse ponto P ficar exatamente no meio dessa reta, o máximo da minha parábola, obviamente vai ser o ponto.
G5_A1: Mas, e daí, da onde tu tirou isso?
G5_A4: É lógico.
G5_A3: Humm, talvez.

Nesse momento o grupo realizou uma conversão entre uma representação figural do ponto máximo com o gráfico de uma função. Partindo dessa hipótese, antes de tentar encontrar a função, o grupo tentou encontrar a medida da reta BC fazendo alguns tratamentos de informação. Porém, o grupo utilizou outros caminhos, ao invés de utilizar diretamente o Teorema de Pitágoras, como mostra a transcrição do áudio:

G5_A4: Assim, eu estava vendo... Isso aqui é um triângulo retângulo, certo? Ou seja, se eu pegar e multiplicar esse valor aqui, e colocar ele aqui, e virasse ao contrário, teria um retângulo perfeito. Que vai ter 28 metros assim, 28 assim, 14 aqui e 14 aqui. Aí eu posso calcular uma área total do retângulo e dividir por 2; aí vai dar igual a só essa área aqui... Essa eu acho que é até a fórmula.
G5_A1: Pegar assim?
G5_A4: Isso, isso.
G5_A1: Daí tu teria: 28...
G5_A4: Isso... 28 vezes 2, mais 14 vezes 2...
[...]
G5_A4: Sim, poh. Olha a lógica aparecendo aqui de novo. Eu tenho esse lado aqui, 28 vezes 2, vai dar...Tá, vamos fazer tudo de novo. 28 vezes 2 é igual a 56, mais 14 vezes 2, igual a 140. Assim eu descobri o perímetro de um retângulo... Tenta entender minha lógica. Tudo isso aqui vai dar 140. A soma desse lado com esse lado, com esse lado e esse lado da 140. Certo? Então, se eu dividir por 2, eu vou ter o perímetro desse triângulo aqui, certo?
[...]
G5_A3: Se o perímetro é a soma dos lados, então tu pega 28 e o 14 e diminui do 70?
G5_A4: Eh. 28 mais 14 é? 42. Agora, 70 menos... Deu 28. Ou seja, eu sei que esse aqui é 28. Eu sei que daqui até aqui eu tenho 28 metros também.
G5_A3: Agora tu descobriu esse lado então? ... eh?
G5_A4: Esse lado aqui não pode ser igual a esse...
G5_A3: É verdade, esse lado aqui é bem maior. Então, você chegou a conclusão que está errado...

Essa discussão é bastante relevante. O grupo se equivocou em afirmar que se a metade da área de um retângulo de lados a e b é equivalente a área de um triângulo de catetos a e b, isso também vale para as relações entre os perímetros. O que faz os próprios alunos refutarem a ideia é quando o valor da hipotenusa resulta na mesma medida do cateto AC, o que visualmente possibilita os alunos percebem que a afirmação era falsa.

Mesmo que G5 tenha partido da hipótese de que a área máxima pode ser obtida através de uma função, ele só inicia a resolução do problema utilizando essa estratégia quando o G6 pergunta a professora se é possível afirmar que a reta BC é uma função afim, e assim, admite uma lei de formação. Os alunos nesse momento conseguem fazer uma conversão do registro geométrico para o algébrico, conhecendo que a reta é uma representação geométrica de uma função afim. Utilizando uma estratégia prévia G5 encontra a função que descreve a área da casa:

G5_A1: Isso aqui é uma função do primeiro grau. Aqui é x menos 1. Aqui é a base. A altura tá em função da função ax+b. Então a altura, que eu não sei, está em função disso... E isso *aqui, calma aí...Esse intervalo aqui, entre a base e aqui, é P. Então a altura é P, [Inaudível]... Vezes a base,... não... vezes a base que é x-1. P(x). Porque aqui é uma função do primeiro grau. Então ficaria assim, x-1, que a base da minha casa, vezes P(x), porque a altura varia de acordo com aqui oh... de acordo com o que eu aumento. Porque P é móvel. Então, (x-1) vezes (P(x))... ax+b. Até aí eu cheguei.*

Feito isso, o grupo chama a professora, que os auxilia, utilizando o aplicativo do GeoGebra, a perceber que a altura da casa (comprimento) não é a distância de 0 até $y(P)$, devido as restrições impostas pelo Plano Diretor. E que diante disso, a altura é dada pela função afim menos 1 metro. Com isso, o grupo calcula os coeficientes da função afim. Para calcular esses coeficientes pelo áudio é possível perceber que o grupo precisou fazer uma rápida consulta no caderno.

Enquanto encontrava os pontos para calcular os coeficientes, o G5 chama a professora, e pelo áudio é possível perceber que houve um equívoco entre a fala do aluno com a da professora. Enquanto o aluno se referenciava ao ponto B como vértice do triângulo, a professora falava sobre o coeficiente *b* da lei de formação da função afim. De todo modo, o grupo consegue encontrar a lei de formação da função altura (comprimento) da casa.

G5_A1: Eu cheguei em um valor aqui. Professora, eu tentei, tentei descobrir os pontos, tentei, mas não sei se tá certo...
Professora: Base x-1 e a altura é f(x)-1, ok. Agora, quem é f(x)?
G5_A1: Eu tentei descobrir. Eu sei que B pode ser 14 e 0, certo?
Professora: Teu b é o valor que corta o eixo y, então teu b é igual a 28.
G5_A1: 28? Então tem alguma coisa de errado aqui.
Professora: Para quando x igual a 0, a tua função vai valer 28. Para quando x igual a 14, quanto que vai valer tua função?
G5_A1: zero. É o contrário.
Professora: E esses dois pontos tu substitui aí.
G5_A1: Eu quero descobrir uma função afim?
Professora: Tu quer descobrir quem é a altura da tua casa, não quer?
G5_A1: Sim.
Professora: Então, um começo é calcular essa função afim.
G5_A1: Vê aí quanto é 28 dividido por 14. a igual a -2. Descobri a lei de formação.
G5_A3: Descobriu?!
G5_A1: Da altura. Agora é isso aqui menos 1. Descobri a altura da casa. A altura é f(x)-1. A altura seria isso então: -2x+28 -1. Eu encontrei a altura. O problema agora é que...

Apesar do grupo conseguir encontrar a função base da casa (largura da casa) e a função altura da casa (comprimento da casa) algebricamente, percebe-se uma falha no conceito de função por um dos membros do grupo, que após discussão pareceu ser sanada. O grupo discutiu sobre a dependência funcional que relaciona a variável *x* da base da casa (largura), com o respectivo valor da altura da casa (comprimento) que está em função de *x*. Para um dos membros do grupo não há relação entre esses valores, ou seja, o aluno não consegue perceber a relação entre a variável dependente e a variável independente em uma função Polinomial, como mostra o áudio:

G5_A4: A minha altura está em função da minha base.
G5_A1: Não, não tá em função de nada. Nenhum está em função de nenhum.
G5_A4: Mas esse x não o mesmo que esse?
G5_A1: Vai ser, mas não quer dizer que está em função disso. Tu tem que só é o mesmo.
G5_A4: Mas suponha que x vale 4, aqui vai ficar 4-1...

Após encontrar a função área, o grupo se depara com a necessidade de aprender algo novo, que seria como calcular o ponto máximo ou mínimo de uma função quadrática. Visto que os grupos estavam livres para utilizar os meios de pesquisa disponíveis da sala, como livro didático e internet, os mesmos pareceram, pela transcrição do áudio, optar pela internet antes mesmo de tentar compreender uma maneira de calcular esse valor sozinhos.

G5_A4: Como faço para descobrir o ponto de máximo? Aplicativo?
G5_A1: Não sei, porque isso a gente não aprendeu ainda. Escreve lá, 'como descobrir ponto de máximo de uma função?'.

O grupo encontra as fórmulas do y do vértice e x do vértice. Sem dificuldade aplicam essas fórmulas no problema e encontram o valor da área máxima. Para conferir os resultados encontrados, o grupo utiliza o GeoGebra. Na transcrição do áudio é possível perceber a alegria dos alunos em concluir a resolução.

G5_A1: Encontrei o máximo da função. É o que eu acho, pelo menos.
G5_A4: 78?
G5_A1: Eu acho que faz sentido.
G5_A4: 78m²?
G5_A1: Pelo tamanho do terreno eu acho que faz sentido. Só que... Calma aí, deixa eu tentar pensar um pouco. Tu sabe como que joga lá no GeoGebra? Joga lá no GeoGebra a função.
[...]
G5_A4: Como eu faço o quadrado aqui mesmo? É um chapeuzinho para cima eu acho.
G5_A1: Ah é, um chapéu para cima e 2. -2x^2+29x-27. Vê o ponto de máximo dela. Não é que é 78 mesmo. Olha lá, 78 certinho. 78,12 o que deu no resultado.

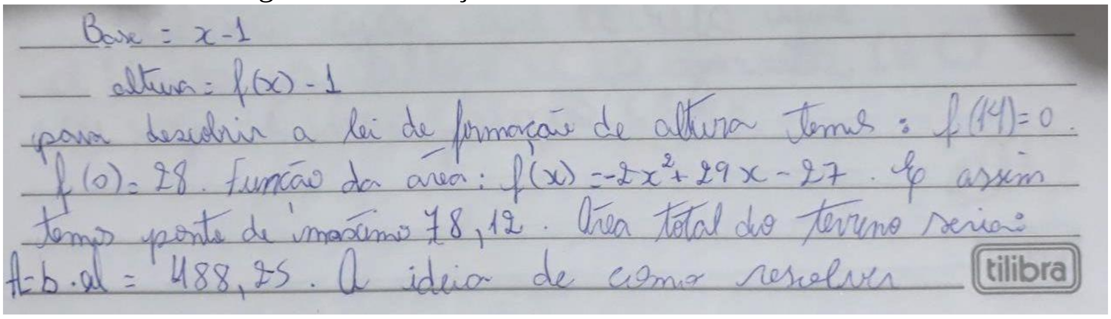
Todavia, pela resolução entregue à professora, transcrição do áudio e a folha de apresentação utilizada na plenária, é possível perceber que talvez o grupo não tenha compreendido corretamente o resultado encontrado como ponto de área máximo pela fórmula do y do vértice. O grupo utiliza no final o valor máximo da função área como altura do terreno.

Assim, realizando o produto entre os valores x_v e y_v encontrados, acredita obter a área total do terreno:

G5_A1: Não. Coloca assim, 78,12. Então tá, ponto. Área total do terreno, seria, dois pontos daí, área igual a base vezes altura, igual a 6,25 vezes 78,12, que é igual a 488,25. Acabou.

A Figura 4 apresenta um extrato do registro da resolução do grupo G5 entregue à professora.

Figura 4 – Extrato do registro da resolução do G5



Base = x-1
altura: f(x) - 1
para descobrir a lei de formação de altura temos: f(14)=0.
f(0)= 28. Função da área: f(x) = $-2x^2+29x-27$. E assim
temos ponto de máximo 78,12. Área total do terreno seria:
A=b.al = 488,25. A ideia de como resolver

Fonte: grupo G5

A seguir iremos relatar os resultados obtidos pelo grupo G2, o qual também teve o áudio gravado.

Pela transcrição do áudio do G2, percebe-se que a representação escrita do enunciado do problema influencia o grupo a testar estratégias de resolução utilizando principalmente os conceitos de Trigonometria. Durante a leitura do problema, percebe-se que um dos membros do grupo dá ênfase as palavras “terreno TRIANGULAR”, “casa RETANGULAR”. Porém, as tentativas dos alunos são inconsistentes, percebe-se uma confusão de informações inicialmente, a qual o grupo não sabe como e o que usar. Eles acreditam que uma estratégia pode ser conceitos da Trigonometria, mas lhes faltam conhecimentos sólidos sobre o que haviam aprendido no Ensino Fundamental, como por exemplo, quais as características do triângulo ABC, quais são os catetos, os ângulos formados pelos catetos e como calcular sua área. Para essas informações o grupo precisou pesquisar na internet para relembrar e então verificar que pouco os ajudariam a iniciar a resolução do problema. De qualquer forma, a pesquisa na internet sobre conteúdos de Trigonometria permitiu ao grupo retomar conceitos já aprendidos. Inclusive, durante a pesquisa, um dos membros do grupo se depara com a representação gráfica da demonstração sobre a área de triângulo, parecendo compreendê-la, semelhante ao que ocorreu com o G5:

G2_A1: Isso aqui é exatamente a metade da área de um retângulo.

A conversão do registro figural para o algébrico, permitiu compreender a fórmula da área. Outro conhecimento desenvolvido por um dos membros do grupo G2 é que a hipotenusa de um triângulo retângulo é sempre o maior lado:

G2_A2: Isso vai descobrir o outro lado. Aqui tem 28, aqui tem 14, e aqui tem quantos?
G2_A1: 28 também.
G2_A3: Isso é um triângulo retângulo.
G2_A2: Se tem 28, então como tentar enfiar essa reta aqui. Tu acha que essa aqui vai cobrir tudo isso aqui?
G2_A1: Eu acho!
G2_A2: Tá eu quero uma régua pra eu poder medir.
G2_A1: Coloca ali: medimos com a régua... deu exatamente 11 cm.... Deu mais, deu 13.

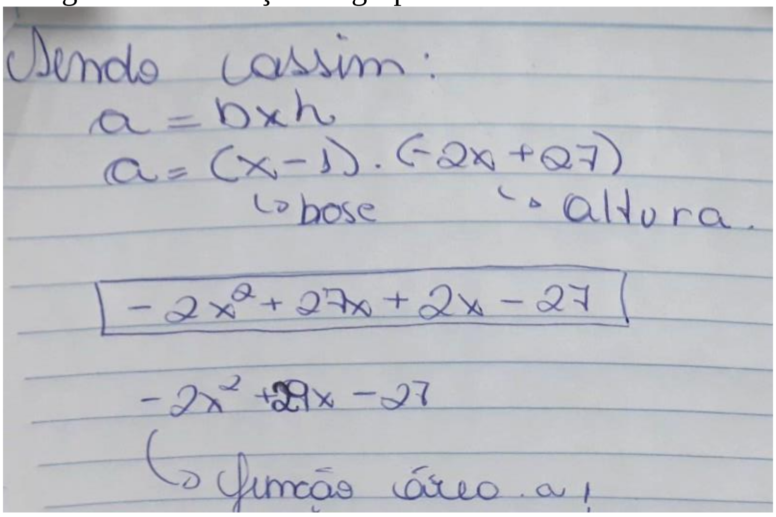
Uma estratégia utilizada pelo grupo é encontrar a função área da casa, a qual será menor do que a área do terreno. O grupo pergunta a professora se a função área pode ser obtida semelhante a resolução de uma questão da avaliação de funções, a professora responde que sim, e a partir disso, iniciam os cálculos para encontrar a função área, assim como G5. A transcrição mostra o momento que a professora auxilia o grupo a compreender a reta BC além de uma hipotenusa, mas como a representação do gráfico de uma função afim:

G2_A2: A gente conseguiu fazer a área... e a gente tem a base, aqui é x-1. Então a altura é y-1.
Professora: Sim. Se y é a variável dependente, então ele está variando em relação a quem?
G2_A2: x.
Professora: Isso. Mas quem é então a função que determina isso aqui?
G2_A2: A altura do triângulo?
Professora: Não é a altura do triângulo. É a altura da casa. Mas a altura da casa está limitada por quem?
G2_A2: Pelo tamanho dessa linha aqui, né?!
Professora: Oh, ela tá limitada porque ela não pode passar disso aqui. Mas quem é essa linha?
G2_A1: A hipotenusa.
G2_A2: A hipotenusa.
Professora: Sim, é. Mas além disso, quem ela pode ser? Imaginem isso aqui sendo um gráfico.
G2_A1: Esse aqui é o eixo x e esse o eixo y.
Professora: Exatamente.
G2_A1: E isso aqui é uma reta.
Professora: E uma reta representa o que?
G2_A2: Que o a é igual a zero?
G2_A1: Uma função decrescente.
Professora: Uma função decrescente e o que mais? Qual gráfico representa uma reta em função de x?
G2_A2: A função afim.
G2_A1: ax+b.

Professora: Quem é essa função aqui? Quem é ‘a’ e quem é ‘b’? Fazendo isso, vocês vão saber quem é esse y aqui.

Encontrada a função afim definida pelo segmento BC, que determina a altura (comprimento) da casa, o grupo utiliza o GeoGebra como fonte de verificação. Percebendo que a função altura (comprimento) da casa e função base (largura) da casa estão corretas, o grupo substitui elas na função área e realiza distributiva, obtendo uma função polinomial do segundo grau, como mostra parte do registro entregue a professora (Figura 5):

Figura 5 – Parte do registro de resolução do grupo G2



Fonte: grupo G2

Feito isso, o grupo continua sua estratégia utilizando inequação:

G2_A2: -2x²+29x-27.
G2_A1: Ah eh... a gente conseguiu. Chegamos na função área. Agora a gente tem que fazer isso ser inequação. Será?
G2_A3: Isso.
G2_A2: Essa função tem que dar uma área menor que 196 metros quadrados.
G2_A3: Pesquisa inequação do segundo grau.
G2_A1: Isso tem que ser menor ou igual a 196.

Não conseguindo prosseguir com a ideia, o grupo chama a professora, que tenta mostrar ao grupo que a área máxima é a maior imagem que a função pode obter:

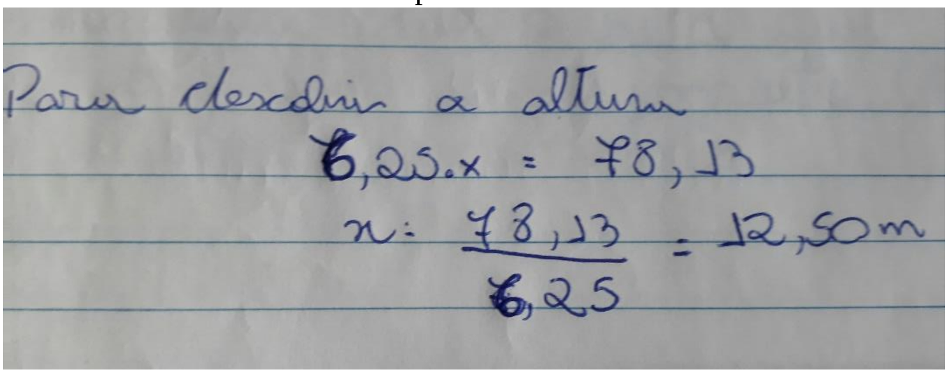
Professora: Vocês querem encontrar o ponto de máximo. Essa função vai ter concavidade para onde?
G2_A2: Vai ter concavidade para baixo.
Professora: Então ela vai ter um ponto de...?

G2_A2: Máximo.
G2_A1: Aham.
Professora: Vocês têm que encontrar esse valor.

O grupo, assim como G5, utiliza a internet e encontra as fórmulas para calcular o máximo ou mínimo de uma função.

Utilizando a fórmula do y do vértice encontram a área máxima. E utilizam a definição que o vértice da parábola está equidistante das raízes para calcular o valor da base da casa (largura). Essa definição foi dita pela professora durante as aulas anteriores, e o grupo mostra se recordar apenas após lê-la na internet. E para encontrar a altura da casa (comprimento), G2 utiliza a fórmula da área, como mostra a Figura 6.

Figura 6 – Cálculo da altura da casa realizado por G2



Fonte: estratégias do grupo G2

Em nenhum momento da transcrição ou observação o G2 mostra saber que também poderiam ter utilizado a função altura (comprimento) da casa definida no início da resolução, ou seja, utilizar a função $h(x)$ para calcular a altura:

$$h(x) = -2x + 27$$

Após todos os grupos apresentados terem realizado suas estratégias de resolução, eles as escreveram resumidamente em uma folha A0, e então, iniciamos as etapas seguintes da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas, que serão relatas a seguir.

4.1.2 Plenária, busca pelo consenso e formalização – Ensino Médio

Durante a plenária os grupos confirmaram que a questão da avaliação auxiliou a iniciar a resolução do problema. Inclusive, afirmaram que o GeoGebra sendo utilizado com frequência nas aulas de Matemática, permitiu que houvesse a compreensão sobre o enunciado do problema antes mesmo de manusearem o aplicativo. Mas o mesmo também foi bastante útil para confrontar as hipóteses.

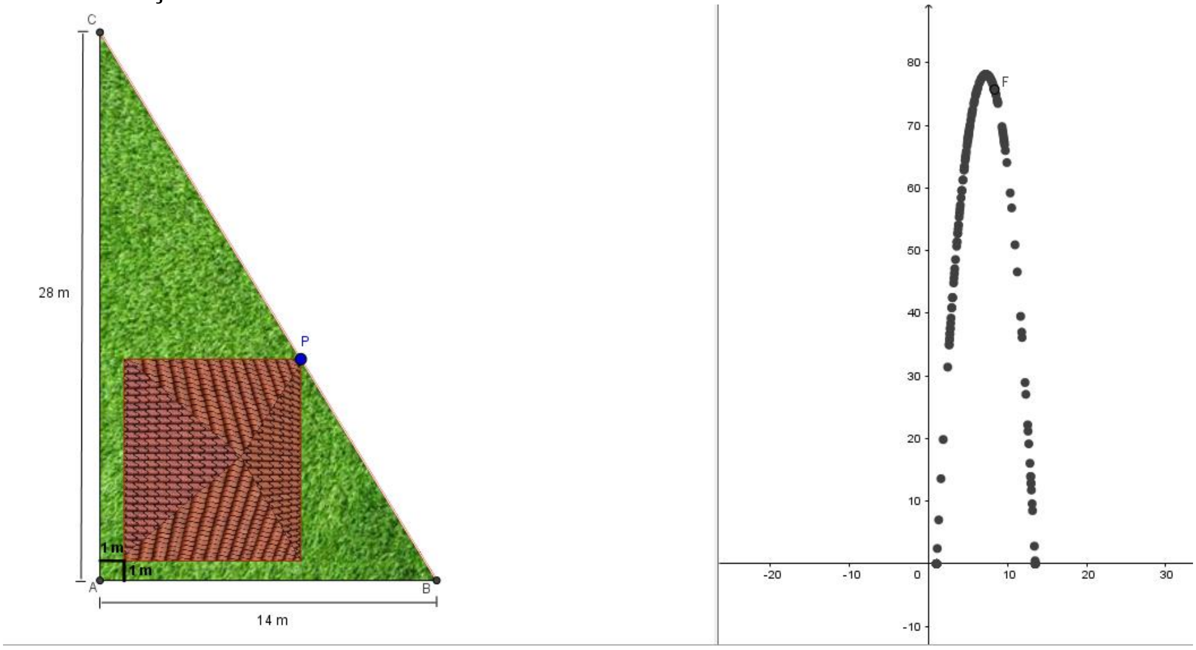
Um dos grupos durante a plenária afirmou não ter compreendido as fórmulas do x do vértice e y do vértice, apenas utilizaram. Os demais grupos que demonstraram entender, explicaram e apresentaram seus resultados justificando-os pela definição de vértice de parábola como ponto equidistante das raízes. Como quase todos os grupos resolveram utilizando a mesma estratégia através de funções, alguns grupos em plenária confirmavam terem realizado os mesmos cálculos, mas terem tentado também por 'tentativa e erro', trigonometria, e até mesmo utilizando a régua. O G5 relata ter percebido seu erro sobre ter multiplicado os resultados em busca da área do terreno enquanto os demais grupos apresentaram.

No segundo dia de experimentação a professora formalizou o conteúdo utilizando o livro Conexões com a Matemática (2013), utilizado pela escola, bem como, o de Dante (2004). Tomando esses livros como base, a professora desenvolveu o segundo material de aula (Apêndice G) que foi impresso e entregue aos alunos. O GeoGebra foi utilizado para apresentar o aplicativo 'Vértice da parábola e eixo de simetria'[14], enquanto a professora definia e demonstrava as fórmulas da abscissa e ordenada do vértice. Além disso, foi utilizado o aplicativo contendo a resposta do problema da casa[15]. Não foi formalizado utilizando o conteúdo de Derivadas, pois nenhum grupo utilizou como estratégia.

Foi retomada a resolução do problema usando o aplicativo do GeoGebra que apresenta o gráfico da função área, conforme Figura 7. Como apenas um grupo não havia resolvido o problema, a resolução foi feita rapidamente.

[14] Link do aplicativo: https://ggbm.at/yYthTvQg
[15] Link do aplicativo: https://ggbm.at/M4tV5J6p

Figura 7 – Ilustração do aplicativo utilizado para colaborar com a resolução do problema usando Funções



Fonte: a autora

Os problemas propostos à turma após a experimentação já não fazem mais parte dessa dissertação, visto que até naquele momento usávamos como referência as etapas da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas apresentadas no artigo de Allevato e Onuchic (2008), o qual comporta apenas nove etapas.

Como citado anteriormente, para fazer a análise dos grupos e relatar na presente dissertação, utilizamos os áudios, os registros de estratégias entregues a professora regente, anotações da professora a partir da sua observação, bem como, o registro em folha A0 utilizado durante a plenária. No sistema de avaliação do Ensino Básico brasileiro necessitamos avaliar o aluno quantitativamente, desta forma, os registros entregues para professora em folha A0, as estratégias de resolução e os registros feitos pela professora enquanto observava, compuseram a nota da atividade.

4.1.3 Considerações sobre os resultados - Ensino Médio

Assim como citado por Borba e Penteado (2001), podemos nos deparar com imprevistos quando usamos a tecnologia, e foi o que ocorreu logo no início da experimentação, pois, houve incompatibilidade entre os sistemas operacionais na execução do aplicativo do GeoGebra, visto que isso não tinha sido checado previamente. De todo modo, a professora havia solicitado que os alunos que pudessem, trouxessem seus notebooks para a aula, o que permitiu que os alunos manipulassem o aplicativo e explorassem outras formas de representação da situação-problema.

Quase todos os grupos utilizaram conceitos de geometria como estratégia para tentar resolver o problema. Isso pode ter ocorrido pela representação figural do problema remeter a conceitos da Geometria, como o triângulo ABC e a representação da casa retangular. Vale ressaltar que mesmo que nenhum dos grupos tenha concluído a resolução utilizando Geometria, e esse não ser o objetivo da experimentação, o problema também admite como estratégia de resolução conceitos desse conteúdo. Podemos ver isso como um ponto positivo, pois essa impressão inicial que o problema remete ao conteúdo de Geometria possibilitou que os alunos pesquisassem e revisassem conceitos do Ensino Fundamental já esquecidos. Isso vai ao encontro do que afirma Polya (1995) e Allevato e Onuchic (2014), em relação ao aluno buscar conhecimentos prévios e problemas semelhantes já resolvidos anteriormente, para ampliar suas estratégias de resolução.

Além disso, fica claro que a tentativa de resolução por geometria possibilitou a esses grupos a compreensão intuitiva da fórmula da área de um triângulo, como sendo a metade da área de um retângulo. Essa compreensão intuitiva construída pelos alunos, principalmente no grupo G5, direciona o aluno a ser construtor de seu próprio conhecimento (ONUCHIC, 2013).

Essa conjectura obtida pelo G5, gerou um equívoco durante as estratégias de resolução, no momento em que o grupo afirma que se a área de um triângulo é a metade da área do retângulo, o mesmo deve ocorrer com o perímetro deles. A representação figural do problema possibilitou ao grupo romper com essa conjectura (DUVAL, 2009).

Ainda nos referenciando ao G5, percebemos que o GeoGebra foi fundamental para que o grupo pudesse visualizar, conjecturar, criar intuições sobre a resolução do problema e articular entre as diferentes representações do problema (ALLEVATO; JAHN; ONUCHIC, 2017). Logo no início da resolução do problema o G5 conjecturou a ideia que a resolução do problema poderia ser obtida através de uma função quadrática, pois essa função apresenta um valor de máximo, que nesse caso seria a área máxima da casa.

O conhecimento prévio obtido numa avaliação sobre função quadrática, serviu como base para que os grupos encontrassem as funções base (largura) e altura (comprimento) da casa (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Durante as conversões e tratamentos realizados pelos grupos, conferimos que a ordem das conversões aumenta a dificuldade do aluno, conforme afirmado por Duval (2009). Isso pode ser constatado pela observação e transcrição dos áudios. Os alunos, mesmo que já tivessem estudado o conteúdo de função afim, apresentaram dificuldades em transitar da representação gráfica para a algébrica da função afim.

A discussão entre os grupos permitiu um trabalho colaborativo (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014). Os alunos compartilhavam suas ideias sem ter medo de estar errado, e em grupo eles puderam discutir as ideias e concluir sua validade ou não.

Durante a observação, percebemos muitos grupos utilizando o GeoGebra para confirmar o resultado da resolução do problema (RICHIT, 2016; SILVA, 2010). Após encontrarem a função área, quase todos os grupos escreveram a função na caixa de entrada do software, e visualizaram a representação gráfica da função. Percebendo que o valor obtido algebricamente, correspondia com o valor do vértice da função encontrado manualmente, os alunos comemoravam dizendo que haviam concluído a resolução corretamente. Um grupo, durante a plenária, disse que antes de calcular algebricamente, optou por verificar o valor máximo no GeoGebra e depois utilizar as fórmulas da abscissa e ordenada do vértice para determinar o valor previamente dado pelo sistema.

Além disso a professora em sua prática utilizou o aplicativo para demonstrar gráfica e algebricamente a dependência funcional entre a função base (largura) e altura (comprimento) da casa (DIKOVIC, 2009).

Mesmo a maioria dos grupos tendo resolvido o problema corretamente, não houve muita formalidade na escrita matemática dos grupos. Nenhum dos grupos se preocupou em analisar o domínio das funções. A pouca formalidade matemática tem um impacto na representação gráfica da função área, sendo que não faz sentido algum a representação negativa da função área. Alguns grupos plotaram a função no GeoGebra, realizando a conversão entre esses registros, mas não se atentaram a essa importância.

A plenária possibilitou avaliar o desenvolvimento dos grupos (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014). Apenas um grupo não resolveu o problema, e demonstrou durante a experimentação muita dificuldade e pouca habilidade com conceitos matemáticos. Os demais grupos demonstraram compreender Máximos de Funções Quadráticas como sendo o maior e único valor que a função pode obter. Sendo as coordenadas desse ponto $P(x_v, y_v)$, os grupos explicaram que x_v é o valor médio entre as raízes. y_v foi explicado como sendo a imagem da função em relação a abscissa x_v, ou obtido através da fórmula:

$$y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Os grupos que utilizaram a fórmula, afirmaram simplesmente terem substituído os valores, sem compreender sua origem, ou seja, os grupos não compreenderam a demonstração dessa fórmula.

Antes de aplicarmos a sequência em outra turma, com os resultados obtidos sentimos a necessidade de melhorar o aplicativo e a escrita do problema. Durante a experimentação percebemos que houve um equívoco entre a fala da professora e a do aluno ao se referenciarem sobre os coeficientes da função afim 'a' e 'b'; e sobre os vértices do triângulo 'A' e 'B'. Por conta disso, nas experimentações seguintes o triângulo será chamado de OMN. Diante disso, a professora afirma que sua maior dificuldade em aplicar essa metodologia nesse contexto foi acompanhar e atender todos os grupos, já que os alunos a chamavam a todo momento apresentando estratégias diferentes.

Além disso, durante a transcrição do áudio de G2, percebemos que fez falta apresentar no GeoGebra os valores de área, base e altura da casa variando conforme o aluno move o ponto P:

G2_A2: Por que a gente não descobre a área nesse exato momento dele, primeiro? Porque depois a gente pode comparar. Entendeu?

Não podemos deixar de relatar que mesmo a turma tendo apresentado cansaço após a primeira hora e meia de atividade, os grupos que concluíram a resolução do problema demonstraram grande satisfação ao concluírem a resolução. Assim como relatado por Van de Walle (2009), a resolução de problemas desafia aluno e apresenta o conteúdo de forma mais relevante para ele.

G2_A2: Eu tô com dor de cabeça de ficar pensando já.
G2_A1: Mas tá passando rápido até. Eu tô gostando. Tô achando muito legal.... Esse negócio de ficar pensando e descobrir por si só...

Durante a formalização, a professora buscou articular as representações algébrica, gráfica, figuras e desenhos. O uso do aplicativo 'Vértice da parábola e eixo de simetria' possibilitou que os alunos confirmassem o conceito de vértice sendo equidistante das raízes, conforme utilizaram durante a resolução do problema. Antes de demonstrar a fórmula da ordenada do vértice (y_v), a professora tentou explicar de modo que os alunos a compreendesse como a imagem do x médio entre as raízes (x_v), para isso, foram utilizados desenhos feitos no quadro, o software GeoGebra e figuras (do livro) que exemplificassem funções quadráticas quaisquer, destacando essas coordenadas. Explorado essa ideia, a professora fez a demonstração do y_v passa-a-passo no quadro, substituindo x_v, obtido a partir do ponto médio entre as raízes, em uma função quadrática $f(x)$ da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\
= \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \\
= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\
= \frac{2ab^2}{8a^2} - \frac{4ab^2}{8a^2} + c \\
= -\frac{2ab^2}{8a^2} + c \\
= -\frac{b^2}{4a} + c \\
= -\frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\
= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\
= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \\
= -\frac{\Delta}{4a}.
\end{aligned}
$$

Assim, o vértice $V(x_v, y_v)$ é dado por $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

A retomada a resolução do problema possibilitou aos alunos verificar o domínio das funções e utilizar o conteúdo de Máximos e Mínimos, agora formalizado, para encontrar a área máxima da casa. O GeoGebra nesse momento possibilitou analisar as dependências (DIKOVIC, 2009) e o comportamento da representação gráfica dos objetos matemáticos (ALLEVATO; JAHN; ONUCHIC, 2017).

4.2 CONTEXTO DA EXPERIMENTAÇÃO NA TURMA DE MESTRADO

A experimentação ocorreu na turma de Fundamentos da Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias no segundo semestre do ano de 2017. Antes da experimentação em sala de aula, já tínhamos elementos sobre algumas características da turma, oriundos da entrevista (Apêndice A) com o professor regente. Antes de relatá-los, vale dizer que a autora, na qualidade de investigadora, participou como ouvinte e em alguns momentos como professora na experimentação, além do professor regente da disciplina. Na entrevista o professor regente disse que essa disciplina tem como objetivo estudar conceitos aprimorados sobre Funções e Geometria em relação ao Ensino Básico, de modo a melhor preparar o professor para atuar nesse nível de ensino. Além disso, são estudadas algumas metodologias de ensino para se trabalhar com esses conteúdos no Ensino Básico.

Na entrevista o professor regente afirma que apresenta à turma a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas, mas não costuma aplicá-la em sua prática de ensino. Até o momento da entrevista, o professor relata não ter utilizado uma metodologia de ensino específica em suas aulas, mas costuma trabalhar a exposição oral e o uso da tecnologia, principalmente o software GeoGebra, na abordagem de conceitos relacionados a Funções e Geometria.

O professor regente relatou estar discutindo em sala os processos de Polya, e que em seguida seria dada a continuidade com a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas. Ademais, conta que já havia iniciado a explorar o conteúdo de Função Polinomial do Segundo Grau, porém, retomaria em alguns momentos essa função devido a sua importância com as diversas aplicações possíveis.

Com base na entrevista constatamos a possibilidade de aplicar a atividade utilizada na experimentação da turma do Ensino Médio, com algumas alterações. Sentimos a necessidade de mudar o nome dos vértices do triângulo e melhorar o aplicativo do GeoGebra que foi disponibilizado durante a resolução. Além disso, o professor regente da turma de Pós-Graduação sugeriu alterações na escrita do enunciado do problema, as quais foram acatadas, conforme apresenta o Quadro 4.

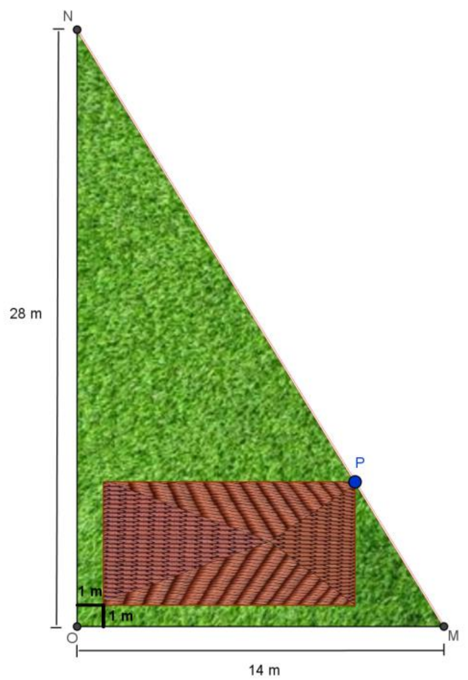
A atividade tem como objetivo abordar um problema de Máximos e Mínimos envolvendo a aplicação de uma Função Polinomial do Segundo Grau utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pela tecnologia.

Quadro 4 – Atividade aplicada a turma de Mestrado – Problema 1 Área da Casa

Problema 1 – Área máxima da casa

José ganhou como herança um terreno triangular, conforme Figura 1, e deseja construir uma casa retangular com a maior área possível. Entretanto, ele precisa respeitar algumas restrições impostas pelo Plano Diretor de sua cidade para a construção. Algumas das restrições são que o canto indicado pelo ponto P fique sobre a lateral MN do terreno e seja um dos cantos da casa, e que as laterais da casa, paralelas aos lados OM e ON do terreno, devem ficar a 1m de distância desses lados.

Figura 1 – Construção de uma casa em um terreno triangular



Fonte: Adaptada de Cardoso (2016)

Ajude José encontrar as medidas da casa, que deverá construir, para que a área dela seja máxima.

Fonte: a autora

A turma tinha um total de 18 alunos, mas no dia da experimentação estiveram presentes 13. Assim, os dados foram oriundos desses participantes. Apenas um dos mestrandos não era formado em Licenciatura em Matemática, tendo formação em Pedagogia.

O ambiente da experimentação foi num laboratório de informática, haja vista que era necessário o recurso tecnológico para o desenvolvimento da atividade.

Como a turma já havia estudado os processos de resolução de problemas de George Polya, mas ainda não a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas, no dia da experimentação, antes da resolução da atividade, a autora deste trabalho fez uma introdução acerca da metodologia que seria utilizada. Para isso utilizou uma apresentação em *Power Point*.

Na sequência foi distribuída a atividade e solicitado que os alunos fizessem a leitura do problema individualmente. Feito isso, foi solicitado que eles se reunissem em grupo de 4 a 5 pessoas, formando assim três grupos que chamaremos de T1, T2 e T3. O áudio dos três grupos foi gravado e transcrito para análise. Enquanto buscavam compreender o problema, o aplicativo[16] do software GeoGebra foi disponibilizado pelo professor no moodle[17].

[16] Link do aplicativo: https://ggbm.at/A5beu8fr
[17] Moodle é um ambiente virtual de aprendizagem utilizado por alguns professores nessa universidade.

Em seguida os alunos começaram a discutir estratégias de resolução e a autora e o professor da turma observavam e atendiam os grupos conforme solicitados. Após uma hora de trabalho, foi solicitado que os grupos escrevessem, em uma folha sulfite A0, sua resolução para discutirmos em plenária. E em seguida foi realizada a formalização, utilizando o software GeoGebra e livro do Iezzi e Murakami (1977).

A proposição de novos problemas (Apêndice I) foi feita após essa aula como uma tarefa a ser resolvida e entregue ao professor via moodle em data determinada.

A seguir serão relatados os resultados obtidos nesse contexto de experimentação.

4.2.1 Resultados - Mestrado

A análise dos resultados foi realizada através dos registros de resolução dos alunos, registros de observação e transcrição dos áudios.

Iniciando por uma abordagem ampla, constatamos que os três grupos demonstraram dificuldades em trabalhar com as restrições do problema. Eles acreditavam que a distância máxima entre o ponto O e o $x(P)$ seria 13, e entre o ponto O e o $y(P)$ seria 27, pois para eles bastava subtrair 1 metro das laterais OM e ON, restrição imposta pelo Plano Diretor no problema. O objetivo de inserir essas restrições ao problema era deixá-lo melhor contextualizado, inclusive, através do áudio gravado, verifica-se que um dos membros do T3 relata ao seu grupo enquanto leem o problema que já vivenciou um acontecimento semelhante ao problema em questão, mas não conta detalhes.

Os três grupos variaram suas estratégias de resolução entre os conceitos de Geometria Plana, como cálculo de área, ponto médio dos catetos, figura inscrita em outra figura plana, e/ou dobraduras. Além disso, os grupos também utilizaram conceitos de funções, como dependência entre as variáveis, lei de formação, semelhança de triângulos e derivada de função.

Todos os grupos partiram de ideias equivocadas. Por exemplo, foi possível averiguar que o grupo T1 teve uma ideia equivocada inicialmente quando afirmou que a área máxima era a que estava representada na Figura 1 (Quadro 3) da folha da situação-problema. Essa hipótese foi invalidada assim que manusearam o aplicativo do problema no GeoGebra.

Já o grupo T2, que parte de uma ideia sobre semelhança de triângulos, se equivoca no uso das restrições impostas pelo plano diretor. A primeira estratégia foi criar um novo triângulo (representação do terreno) sem as restrições.

T2_A1: Sabe o que que eu estava pensando na estratégia? É eliminar essa...

T2_A2: Isso. É criar um novo triângulo, tirando um metro... Um, menos um aqui. Vai ficar 27...
T2_A1: Isso, porque isso aqui atrapalha bastante, né?!
T2_A2: Isso. Cria um assim...Vai ficar 27 por 13.

A primeira estratégia apresentada por T3 foi o uso do conceito de função. Verificaram que o problema apresenta variáveis, que chamaram de x e y. Consideraram x a base e y a altura do retângulo (casa), e sabendo que a área total do terreno é $196\ m^2$, usaram uma desigualdade, conforme transcrição (T3_A2). O raciocínio está correto, mas é insuficiente para resolver o problema.

T3_A2: Na verdade, para maximizar... a área máxima... Área máxima é igual a base vezes altura. Restrição: base vezes altura é igual ou menor a 196m². Uma das restrições.

Ainda, foi possível verificar que o grupo T3 inseriu essa desigualdade no campo de entrada do GeoGebra. Ao visualizarem uma região no formato de hipérbole como representação gráfica, verificam que algo estava errado, pois não esperavam esse tipo de representação.

O Quadro 5 apresenta, em suma, as estratégias utilizadas pelos grupos.

Quadro 5 - Estratégias utilizadas pelos grupos do Mestrado na resolução do Problema 1 – Área da casa

Estratégias		**T1**	**T2**	**T3**
Trigonometria	Cálculo de área			X
	Ponto médio	X	X	
	Semelhança de triângulos	X	X	X
	Dobradura			X
Funções	Dependência entre as variáveis	X	X	X
	Coeficientes da função	X	X	
	Derivada de função	X	X	
	Zero da função derivada	X	X	
	Ferramentas do GeoGebra para plotar funções	X		X
Problema solucionado:	Parcialmente		X	X
	Completamente	X		
Problema não solucionado				

Fonte: a autora

Vamos agora detalhar especificamente cada grupo. Iniciamos pelo T1. Pelo áudio do grupo, percebe-se que em um determinado momento um dos membros parte da ideia intuitiva que a área máxima da casa é obtida pela metade dos catetos do triângulo (ponto médio), conforme transcrição T1_A2. Nesse momento o grupo já estava com o aplicativo do GeoGebra.

T1_A2: Tipo assim oh, ir chegando em um quadrado. Mais próximo possível de um quadrado. Daí, dividiria 27 por 2, que daria 13.5, e 13 dividido por 2, que daria 6.5. Chega mais ou menos aqui, oh. Nisso que a gente chegou aqui, entendeu?

Pelo áudio, os demais membros do grupo parecem não compreender o raciocínio, até mesmo porque T1_A2 não consegue provar que isso seria verdade. Seguido disso, o grupo parte para uma estratégia utilizando função.

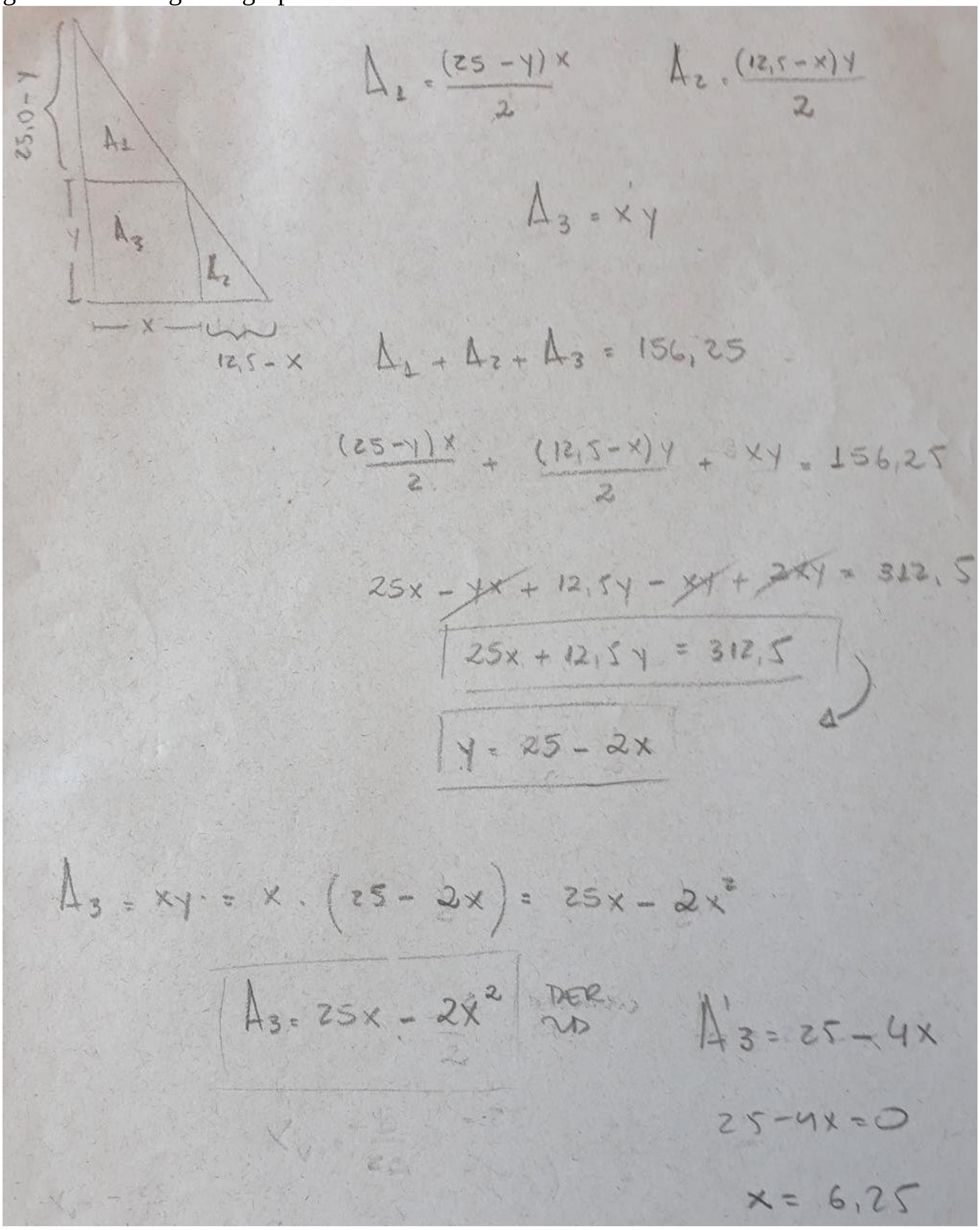
T1_V4: Ele quer as laterais da casa? Quanto que eu vou fazer de largura e de comprimento? Tipo um x e um y que ele quer descobrir.

Os alunos nesse momento conseguem fazer uma conversão do registro geométrico para o algébrico, conhecendo que as medidas estão variando e que a dependência entre elas define uma função. Pelo áudio e as resoluções desse grupo percebe-se que consideram três diferentes áreas em função de x e y. Representam essas áreas algebricamente, e afirmam que a soma das três áreas é igual a área do terreno menos as restrições. Isolam a variável y, e substituem na equação da área da casa dada pelo produto de x e y. Após isso, observam uma função quadrática, a qual utilizam derivada para descobrir o valor da base da casa com área máxima. Utilizando o aplicativo do GeoGebra, constatam que há algum erro em seus cálculos, visto que o valor da base para obter a área máxima seria 6.25m, e pelos cálculos do grupo o valor de base seria 6.5m. Porém, apesar de seus cálculos apresentarem algum erro, verificam que o resultado encontrado pela derivada é o mesmo encontrado por T1_A2 usando o ponto médio.

A professora interage com o grupo T1 durante a observação tentando compreender o que foi feito até o momento. Percebendo o erro cometido, pergunta ao grupo por que podem garantir que a medida máxima que a altura da casa pode atingir é 27m, bem como, a da base ser 13m. O grupo responde que descontaram o 1 metro dado como restrição no problema. A professora solicita que um dos membros do grupo mova o ponto P no aplicativo do GeoGebra de modo que a base da casa seja zero. Nesse instante o grupo percebe que o comprimento da casa vale 25m, ao invés de 27m como haviam afirmado. A professora pede que mova o ponto

P de modo que a altura seja zero. Assim, o grupo verifica que a medida correta da base não seria 13m, mas sim 12.5m. A professora questiona por que a hipótese inicial estaria errada. Um dos membros do grupo diz que isso ocorre porque é um triângulo. A professora complementa sua resposta dizendo que eles têm um problema de proporcionalidade e isso tem que ser considerado na resolução. Feita essa mediação, foi possível constatar que o grupo usou semelhança de triângulos para mostrar as novas medidas. Refizeram os cálculos usando as três áreas em função de x e y (Figura 8) e concluíram corretamente seus cálculos, mesmo que sem formalização matemática nos cálculos em relação ao domínio das funções, ponto crítico, teste da 1ª ou 2ª derivada, etc.

Figura 8 - Estratégia do grupo T1



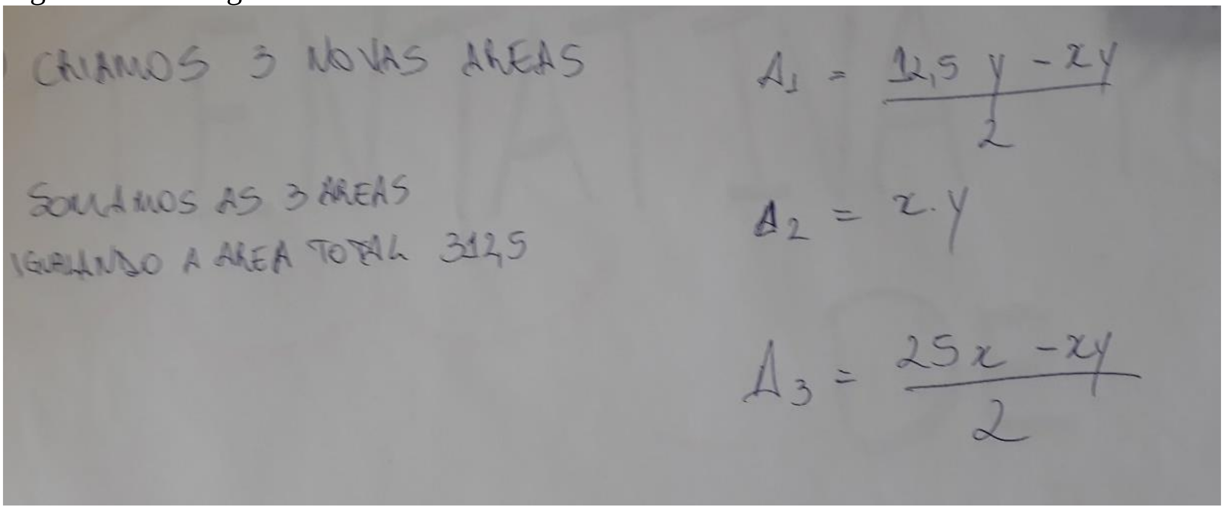
Fonte: registros do grupo T1

Além disso, tomaram a metade dos catetos do triângulo sem as restrições, com base 12,5 e altura 25m, e verificaram mais uma vez que a ideia intuitiva estava correta. Porém, nenhum dos membros do grupo sabia demonstrar matematicamente essa hipótese.

Partindo para análise detalhada do grupo T2, durante a observação percebeu-se que o grupo cometeu o mesmo erro que T1 em relação as restrições impostas pelo Plano Diretor, e o erro também foi sanado após mediação da professora.

No áudio é possível perceber que depois de algumas discussões, T2 passa a utilizar uma estratégia semelhante ao do T1 sobre função e derivada. Somam três áreas (Figura 9), mas obtém equações diferentes de T1, afinal partem da representação geométrica do dobro da área do terreno, de modo a formar um retângulo.

Figura 9 - Estratégia do T2



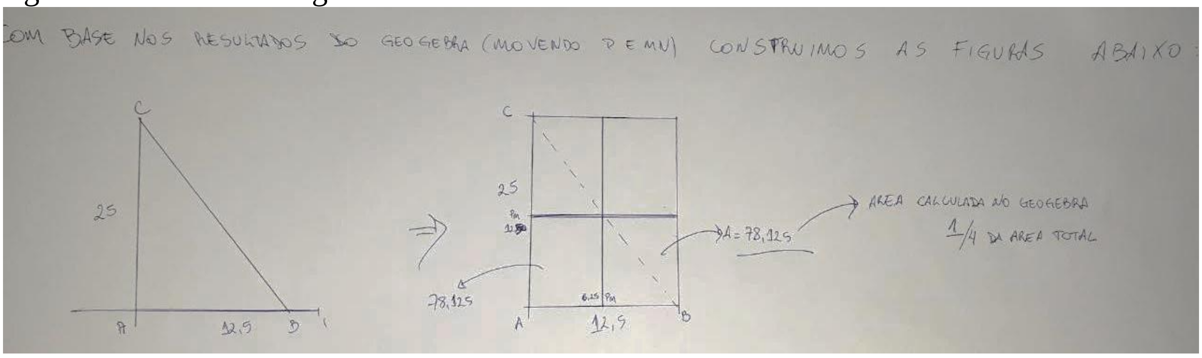
Fonte: registros do grupo T2

Na figura 9, A1, A2 e A3 representam respectivamente A2, A3 e A1 na Figura 8.

O grupo T2 erra ao igualar a soma das áreas com a área do retângulo (dobro do terreno) ao invés da área do terreno OMN. O erro é percebido durante a plenária.

Além disso, pelo áudio e pelos registros constatamos que T2 também percebe a partir de observações no aplicativo do GeoGebra que a área máxima é obtida com a metade dos catetos. A diferença de T1, é que T2 não partiu de uma ideia intuitiva, mas sim, de observação. Os alunos do T2 fizeram uma conversão do registro geométrico para o algébrico. Para tentar mostrar essa ideia, T2 usou Geometria. Construiu um retângulo (Figura 10) com mesma base e altura do triângulo, e dividiu em quatro partes iguais, constatando que a área máxima da casa é um quarto da área total do retângulo.

Figura 10 - Outra estratégia de T2



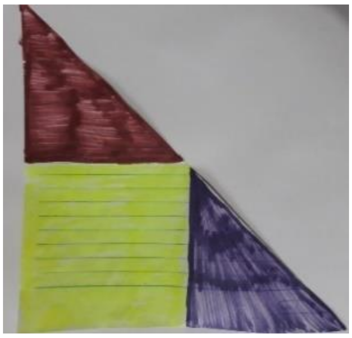
Fonte: registros do grupo T2

Em relação ao grupo T3, em um dos momentos da mediação, a professora, assim como fez nos demais grupos, percebendo que os alunos também estavam usando incorretamente as restrições de 1 metro, ou seja, consideram um triângulo com base 13m e altura 27m, fez com que o grupo percebesse seu erro utilizando o aplicativo no GeoGebra.

Após isso, pelo áudio se percebe que o grupo T3 recorre a internet para resolver o problema e encontra um artigo de Paterlini (2001), que apresenta o problema do retângulo inscrito. O problema não apresenta contextualização e nem restrições, como o da atividade aplicada. Com base no artigo, T3 utiliza semelhança de triângulos para resolver o problema. Porém, persistem no erro de considerar base e altura do triângulo sem as restrições, sendo 13m e 27m respectivamente.

Além dessa estratégia, o grupo T3, ainda com base no artigo encontrado, usa a dobradura para ilustrar que a área máxima da casa é obtida na metade de cada cateto do triângulo sem as restrições. Todavia, não apresentam um triângulo com as mesmas medidas do problema da experimentação, mas sim um triângulo isóscele, no qual a área máxima do retângulo é um quadrado (Figura 11).

Figura 11 - Estratégia T3



Fonte: mestrandos do grupo T3

Tendo todos os grupos realizado suas estratégias de resolução, eles as escreveram resumidamente em uma folha A0, e então, iniciamos as etapas seguintes da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas, que serão relatas a seguir.

4.2.2 Plenária, busca pelo consenso, formalização e proposição de novos problemas - Mestrado

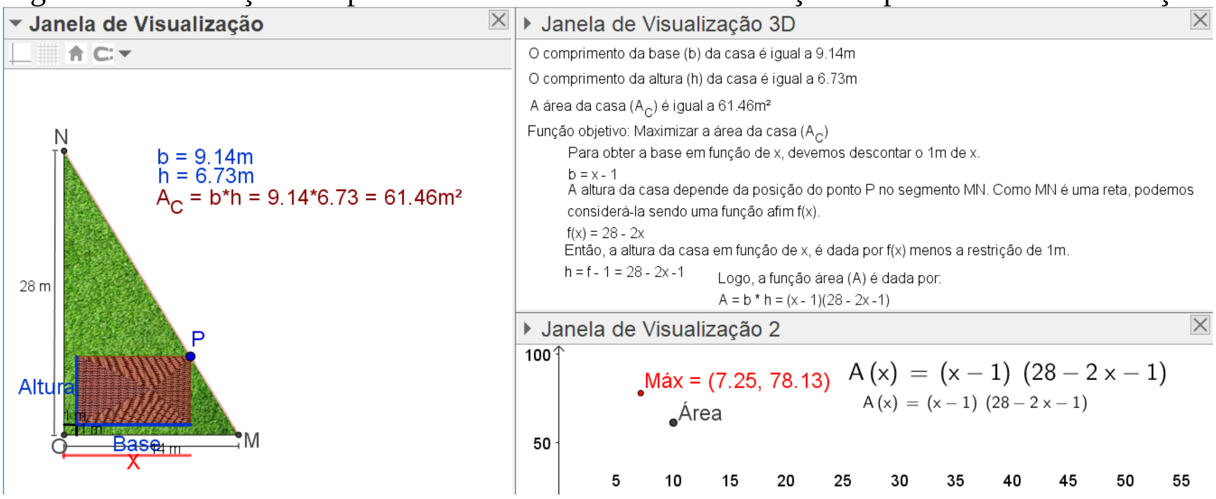
Durante a plenária os grupos perceberam que houve estratégias semelhantes. Teve pouca discussão entre a turma e o grupo que apresentava. A professora realizou algumas perguntas aos grupos conjuntamente. Como por exemplo, por que igualam a zero a primeira derivada; se usariam as estratégias utilizadas por eles para resolver o problema em uma turma do Ensino Médio; como surgiu a estratégia do ponto médio, etc.

Em relação a questão referente a derivada, os grupos T1 e T2 responderam que igualam a zero pois é o ponto em que a reta tangente é paralela ao eixo das abscissas, mas não mostravam muita confiança na resposta. O grupo T3 disse que usaria a resolução da dobradura se aplicassem em turmas do Ensino Médio. Já os demais grupos, não responderam essa pergunta. E sobre a estratégia do ponto médio, T1 disse que um dos membros do grupo tinha uma vaga lembrança de já ter visto esta relação em outra disciplina, e o T2 disse que a ideia surgiu enquanto manuseavam o GeoGebra.

Após isso, o professor regente resolveu o problema usando funções e semelhança de triângulos, recorrendo ao aplicativo[18] do GeoGebra quando necessário. O aplicativo utilizado durante a resolução do problema foi adaptado do utilizado na turma do Ensino Médio. Sentimos a necessidade de melhorar o aplicativo, de modo a utilizar melhor suas ferramentas de representações, variando entre gráfica, algébrica e figura dinâmica em um mesmo aplicativo conforme Figura 12.

[18] Link do aplicativo: https://ggbm.at/QpB7Z5wg

Figura 12 – Ilustração do aplicativo utilizado durante a resolução do problema e formalização



Fonte: a autora

Por fim, o professor fez a formalização usando o livro de Iezzi e Murakami (1977, p. 130-131)[19], o qual aborda a forma canônica da função e pode ser apresentada no Ensino Médio, recorrendo ao GeoGebra quando necessário.

Na entrevista pós-experimentação (Apêndice C), o professor relata que na aula seguinte a experimentação, na qual a autora deste trabalho não estava presente, ele retomou a formalização usando o Vértice da Parábola, e também, comentou rapidamente sobre a resolução usando o ponto médio ou derivada que permite calcular pontos de máximos e mínimos. Mesmo não sendo o objetivo da disciplina estudar conceitos do Cálculo, é interessante que o professor não deixe o aluno sem ter um retorno sobre sua estratégia de resolução.

Vale ainda ressaltar que na entrevista pós-experimentação o professor afirmou que não esperava que os alunos abordassem algumas das estratégias relatadas, como as estratégias com foco na Geometria Plana e dobradura, visto que, o conteúdo explorado previamente na disciplina era Função.

A avaliação da atividade foi realizada durante todo o momento da experimentação através dos registros de observação e a discussão em plenária. Ademais, foi utilizada como avaliação a resolução dos novos problemas propostos. Essas estratégias de avaliações serviram tanto para a autora do trabalho, como para o professor regente da turma. A única avaliação que foi analisada apenas pela autora do trabalho e não pelo professor regente, foram os registros de resolução entregues pelos alunos.

[19] Livro disponível para download em: < http://denrrou.com.br/downloads/livros/Fundamentos-da-Matematica-Elementar/Fundamentos-de-Matematica-Elementar-Volume-1-Conjuntos-e-Funcoes.pdf> Acessado em: 16 de jun. 2018.

A lista dos novos problemas propostos (Apêndice I) foi disponibilizada aos alunos via moodle após a experimentação. As respostas foram entregues individualmente pelos alunos também via moodle. Na análise das resoluções é possível verificar que os alunos não usaram as mesmas estratégias de resolução usadas durante a experimentação, e em alguns casos optaram por tentativa e erro, ao invés de usar o conteúdo formalizado sobre Máximos e Mínimos. Além disso, percebemos através das resoluções que os alunos discutiram entre si a resolução dos problemas até chegar em um consenso, mesmo que errôneo.

4.2.3 Considerações sobre os resultados - Mestrado

A análise de resoluções da atividade permite inferir sobre o conhecimento prévio dos alunos. Azevedo (2014), relata que a aplicação da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas em turmas de formação docentes possibilita verificar fragilidades nos conhecimentos do (futuro) professor. Analisando nossos resultados, constatamos fragilidades no domínio do conteúdo de funções. Alguns alunos demonstraram dificuldade em compreender a função dinamicamente, como algo que varia. As estratégias iniciais do grupo T2 foram principalmente usando proporcionalidade, porém, em momento algum foi discutido a proporcionalidade da função afim, que está presente no problema, e poderia ser bastante útil.

O conhecimento prévio dos alunos é um fator influenciador nos resultados de atividades guiadas pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação. Allevato e Onuchic (2014) defendem nas etapas da metodologia que o professor deve incentivar os alunos a usarem seus conhecimentos prévios. O grupo T1 deixou evidente no áudio o uso de conhecimentos já adquiridos, e foi positivamente guiado por esse conhecimento, demonstrando inclusive uma abordagem da resolução mediada pela ferramenta do Cálculo, como apresenta a transcrição do áudio do aluno T1_A4.

T1_A4: E se fosse resolver por máximos e mínimos a gente faz uma equação e maximiza, tira a derivada, né?!

Mesmo que os três grupos tenham utilizado, mesmo que brevemente, o conteúdo de funções, dois desses demonstraram muita dificuldade em transitar do registro gráfico e da linguagem natural, para o algébrico. A teoria de Duval (2009), afirma que a conversão entre as representações é mais difícil de realizar para a maioria dos alunos. O T1 utilizou a conversão do registro gráfico para o algébrico com mais facilidade, e mostrou a necessidade de realizar a conversão para outro registro (o algébrico) para facilitar os tratamentos elementares (DUVAL, 2013), o que por sua vez o grupo deve ter maior habilidade.

Pela observação e transcrição dos áudios, a dificuldade dos grupos T2 e T3 inicialmente sobre realizar estratégias que resolvessem o problema de Otimização, pode estar relacionada aos fatores relatados por Almeida e Viseu (2002): dificuldade em interligar condições de um mesmo problema e em relacionar informações do gráfico com os conhecimentos analíticos. As restrições impostas pelo Plano Diretor no problema foi a maior barreira para esses grupos, pois os mesmos não conseguiam escrevê-las algebricamente.

O aplicativo no GeoGebra, apresentado como outro registro de representação para o problema, permitiu que mediasse a conversão entre a representação na linguagem natural para a algébrica do problema (DUVAL, 2013). O primeiro contato com o aplicativo permitiu que os grupos, principalmente T1, refutasse a conjectura inicial sobre a Figura 1 (Quadro 4) no enunciado do problema estar necessariamente representando a casa com a maior área (ALLEVATO; JAHN; ONUCHIC, 2017).

Outro momento relevante no uso do GeoGebra que refutou conjecturas, foi quando todos os grupos afirmavam que as dimensões do triângulo sem as restrições, semelhante ao triângulo OMN, teria como base 13m e altura 27m. A professora usando o GeoGebra possibilitou que os alunos verificassem que não bastava subtrair 1 metro das laterais OM e ON para construir um terreno (triângulo) semelhante ao OMN.

Ademais, o GeoGebra foi utilizado para refutar hipóteses, induzir estratégias e realizar construções (ALLEVATO; JAHN; ONUCHIC, 2017; DIKOVIC, 2009). A visualização gráfica possibilitada pela tecnologia foi fundamental para que o T3 percebesse que a estratégia de inequação usada inicialmente não era suficiente para obter a resposta do problema.

A estratégia utilizada por T1 e T2 baseada no ponto médio dos catetos como base e altura para obter a área máxima, pode ter sido induzida pela possibilidade de visualizar o problema. Tall (1991), afirma que visualizar pode ajudar na intuição de conceitos. Após apresentada essa estratégia de resolução pelos alunos durante a experimentação, achamos conveniente criarmos o aplicativo ‘Área da casa - refutações[20]’ que auxilia o professor e o aluno a discutirem sobre essa hipótese quando a mesma surgir como estratégia de resolução.

Não houve rigor matemático nas resoluções. Os alunos mostraram não dar relevância a informações como domínio de funções, simbologia, demonstrações, etc. Embora isso, entre os cálculos verificados, não houve erro no tratamento das expressões, que são as transformações

[20] Link do aplicativo: https://ggbm.at/kshPWRaZ

efetuadas dentro de um mesmo sistema de registro (DUVAL, 2013). Porém, durante a transcrição do áudio constatamos que o grupo T3 teve grande dificuldade no tratamento das expressões presentes no artigo de Paterlini (2001), que tomaram como base para resolução do problema. A resolução do problema presente nesse artigo, quando compreendida, pode ser usada para resolver a área máxima da casa do problema de experimentação, utilizando apenas uma substituição dos valores. Mesmo assim, T3 por não compreender o que estava sendo feito, demonstrou dificuldade nesse tratamento. Espera-se que por estarmos trabalhando com professores (ou futuros professores), os mesmos tenham buscado suprimir essas fragilidades mesmo após a experimentação (AZEVEDO, 2014).

O objetivo da disciplina de Fundamentos da Matemática, na qual a atividade foi aplicada, era aprimorar os conceitos sobre Funções e Geometria para melhor preparar o professor para atuar no Ensino Médio. Diante disso, sentimos falta de os estudantes utilizarem os conceitos sobre Máximos e Mínimos de Funções vistos nesse nível de ensino. Dois grupos utilizaram conceitos do Cálculo, e o outro, dobradura, além das demais estratégias, como ponto médio. O T3 disse que se resolvesse o problema no Ensino Médio iria usar dobradura para solucioná-lo. Mas por que os grupos não utilizaram os conceitos de vértice e as fórmulas para obter a abscissa e a ordenada do vértice? Com base no referencial, presumimos que esse grupo de (futuros) professores têm dificuldade em relacionar conceitos do Ensino Médio com o Superior (SBEM, 2013).

Com isso, corroboramos com os autores Onuchic e Morais (2013) quando afirmam que a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas deve ser aplicada a turma de formação de professores com mais frequência, já que possibilita inter-relacionar conceitos dos diferentes níveis, e que para que haja conhecimento sobre essa metodologia.

Os grupos trabalharam de modo colaborativo, e permitiram que os professores em sala mediassem quando necessário (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Durante a plenária foi questionado aos grupos que usaram derivada por que devem igualar a zero para encontrar o ponto crítico. Alguns alunos responderam, sem mostrar muita segurança, que é devido a inclinação da reta tangente. Além disso, a professora pergunta por que consideram que o valor resultante da derivada igualada a zero é o valor da abscissa no ponto máximo da função. Os alunos não souberam responder. Assim, constatamos uma das dificuldades relatas por Dall'anese (2000), em relação aos alunos não buscarem compreender e interpretar o conceito gráfico da derivada, mas apenas realizarem os procedimentos mecânicos.

O GeoGebra foi eficaz durante a formalização e resolução do problema pelo professor regente. O mesmo possibilitou exemplificar, apresentar de maneira dinâmica os conceitos e articular entre as diferentes representações.

Após a entrega das resoluções dos problemas propostos pelos alunos, elaboramos uma análise a qual contatamos fragilidades no domínio das funções. Os alunos mostraram dificuldade em relacionar os conceitos de área e perímetro com a dependência funcional presente no problema. Além disso, os erros procedimentais e analíticos cometidos pelos alunos mostram que houve falta de atenção durante a resolução.

Foi bastante relevante a experimentação da atividade em uma turma de formação de professores para verificar fragilidades, para terem conhecimento dessa metodologia de ensino e para que eles tivessem a oportunidade de inter-relacionar conceitos de diferentes níveis de ensino (AZEVEDO, 2014; ONUCHIC, MORAIS, 2013; SBEM, 2013).

4.3 CONTEXTO DA EXPERIMENTAÇÃO NA TURMA DA GRADUAÇÃO

A experimentação ocorreu na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI - I), na turma do curso de Licenciatura em Matemática. Porém, também tinham alunos de outros cursos, como Engenharia Civil, Elétrica e Mecânica, matriculados na disciplina, que participaram da experimentação, inclusive alunos repetentes. Antes da experimentação em sala de aula, já tínhamos elementos sobre algumas características da turma, oriundos da entrevista (Apêndice B) com a professora regente. Antes de relatá-los, vale dizer que a autora, na qualidade de investigadora, participou como professora nessa experimentação. Além disso, foi possível contar com a colaboração da colega de Mestrado, Jéssica Meyer Sabatke, para auxiliar como observadora no primeiro dia de experimentação. Segundo a professora regente, a disciplina de CDI – I tem como objetivo principal desenvolver o raciocínio do aluno.

A professora regente relatou na entrevista que utilizava a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas em sua tese de doutorado, que ocorria em paralelo ao período da experimentação aqui relatada, assim, ela tinha um leque maior de experiências em relação a disciplina de CDI – I utilizando essa metodologia de ensino. No semestre em que ocorreu a experimentação, que está sendo contextualizada, a professora regente da disciplina afirmou não ter trabalhado com frequência essa metodologia em suas aulas, porém, disse ter utilizado em alguns momentos algumas etapas da metodologia, como a discussão em grupo, mediação do professor e formalização. Além disso, comentou que no início das aulas com essa turma ela apresentou todas as etapas da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas, e as do método de Polya também.

Durante a entrevista a professora regente conta que costumava trabalhar com listas de exercícios e apostilas, além de ser bastante frequente o uso do software GeoGebra em sala de aula na exploração visual de funções principalmente, e na resolução de trabalhos propostos.

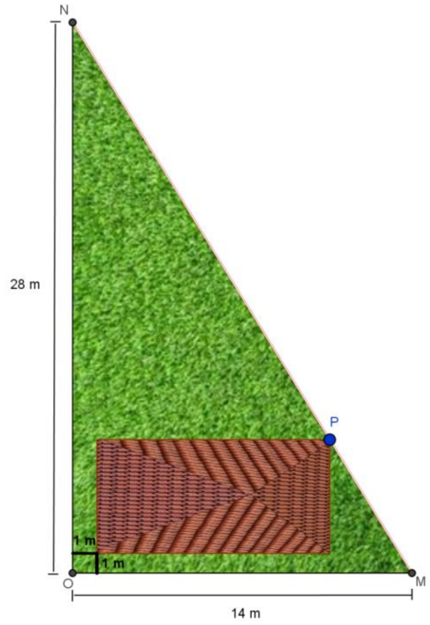
Os pontos de máximo e mínimo já haviam sido explorados na disciplina durante o conteúdo de funções, mas sem citar a resolução para encontrar esse(s) ponto(s) através da derivada.

Além da entrevista, a autora, com autorização da professora regente da turma, assistiu as quatro aulas anteriores a experimentação com o objetivo de adentrar ao contexto da turma e do conteúdo explorado. Durante a observação dessas aulas, constatou-se que o conteúdo lecionado era 'Análise da Variação de Funções'. Para introduzir esse conteúdo a professora regente optou por usar parte da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas. Com isso, naquelas aulas, ela entregou à turma uma atividade que tinha como objetivo que os alunos discutissem e concluíssem o conceito gráfico de: máximo e mínimos locais, máximo e mínimo absoluto, ponto crítico, teste da primeira derivada, ponto de inflexão, teste da segunda derivada e assíntotas. Feito isso, a professora regente formalizou o conteúdo com os alunos e concluiu com a resolução de um exemplo de construção de gráfico. Isso poderia colaborar com os resultados da experimentação, já que os alunos poderiam se apropriar desse conhecimento prévio para analisar e resolver um problema sobre a aplicação de Máximos de uma Função Polinomial.

Com posse dessas informações obtidas pela entrevista e observação de algumas aulas, a sequência didática a ser aplicada foi construída. Nessa experimentação foram aplicados dois problemas. O problema da área máxima da casa, apresentado no Quadro 6, e o problema do volume máximo da caixa, apresentado no Quadro 7.

Quadro 6 – Atividade aplicada a turma da Graduação – Problema 1 Área da Casa

Problema 1 – Área máxima da casa José ganhou como herança um terreno triangular, conforme Figura 1, e deseja construir uma casa retangular com a maior área possível. Entretanto, ele precisa respeitar algumas restrições impostas pelo Plano Diretor de sua cidade para a construção. Algumas das restrições são que o canto indicado pelo ponto P fique sobre a lateral MN do terreno e seja um dos cantos da casa, e que as laterais da casa, paralelas aos lados OM e ON do terreno, devem ficar a 1m de distância desses lados. Figura 1 – Construção de uma casa em um terreno triangular



Fonte: Adaptada de Cardoso (2016)

Ajude José encontrar as medidas da casa, que deverá construir, para que a área dela seja máxima.

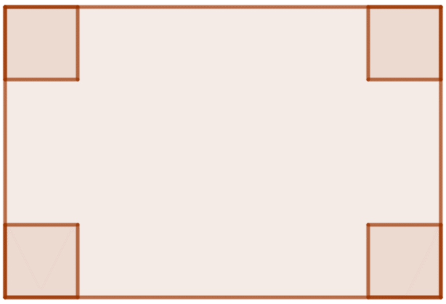
Fonte: a autora

Quadro 7 – Atividade aplicada a turma da Graduação - Problema 2 Volume da Caixa

Problema 2 – Volume da caixa

Dada uma folha retangular, construa uma caixa, sem tampa, cujo volume seja máximo. Construa essa caixa, usando as dimensões da folha retangular dada, após serem cortados quadrados dos cantos dessa folha, conforme Figura 1.

Figura 1 – planificação da caixa



Fonte: a autora

Quais são as dimensões da caixa para que o seu volume seja o maior possível? Qual o valor desse volume?

Fonte: a autora

Os problemas têm como objetivo introduzir o conteúdo de Otimização de Funções Polinomiais utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pela tecnologia.

A escolha por dois problemas, ao invés de um, se deu para que pudéssemos ter a oportunidade de verificar como os (futuros) professores trabalhariam com uma função do segundo grau, bastante frequente no Ensino Médio, bem como, com uma função de maior grau, mais frequente no Ensino Superior. A necessidade de calcular os pontos de máximo e mínimo de uma função cúbica, a qual não é possível encontrar esses pontos utilizando a estratégia de vértice da parábola estudada no Ensino Médio, possibilita que os alunos instiguem os conteúdos de Cálculo na resolução dessa função.

A experimentação ocorreu no segundo semestre de 2017, em dois dias, com duas aulas de 50 minutos cada, totalizando quatro aulas.

A turma tem um total de 38 alunos matriculados, segundo a professora regente, em média 30 alunos frequentavam a disciplina. No primeiro dia de experimentação em que foram recolhidos os dados e gravações dos áudios, houve a participação de 25 alunos. Assim, os dados serão oriundos desses participantes.

O ambiente da experimentação foi num laboratório de informática, haja vista que era necessário o recurso tecnológico para o desenvolvimento da atividade.

Primeiramente as atividades foram entregues e então solicitado aos alunos que fizessem a leitura individualmente. Feito isso, foi solicitado que eles se reunissem em grupo, formando assim sete grupos que chamaremos de E1, E2, E3, E4, E5, E6 e E7 e os integrantes de cada grupo serão chamados de E1_A1, E1_A2, ..., E2_A1, etc. Um dos estudantes optou por não se juntar em grupo e preferir fazer as atividades individualmente, sendo este o E6. Foram gravados e transcritos os áudios dos grupos E1, E2, E3 e E4. A escolha dos grupos que tiveram o áudio gravado se deu aleatoriamente.

Após se reunirem em grupos, a professora solicitou que os grupos abrissem o aplicativo ‘Área da casa’[21] e depois o aplicativo ‘Volume da caixa’[22] que estavam salvos nos computadores do laboratório.

Alguns grupos optaram por iniciar a resolução pelo problema ‘Área da casa’ e outros pelo problema ‘Volume da caixa’. Em seguida os alunos começaram a discutir estratégias de resolução e a professora e a observadora observavam e atendiam os grupos quando solicitado.

[21] Link do aplicativo: https://ggbm.at/A5beu8fr
[22] Link do aplicativo: https://ggbm.at/pqDrPPQT

Após uma hora de trabalho, foi solicitado que os grupos escrevessem, em uma folha sulfite A0, sua resolução para discutirmos em plenária.

Não sendo possível concluir a plenária no primeiro dia de experimentação devido ao tempo da aula, foi dado continuidade no segundo dia. Para evitar possíveis alterações nas resoluções, a professora recolheu todas as folhas A0. Encerrada a plenária a professora realizou a formalização do conteúdo e a proposição de novos problemas (Apêndice K). Os problemas listados no Apêndice K foram deixados como uma proposta de estudo para a avaliação que seria feita pela professora regente, sendo assim, não foi solicitada a entrega da resolução dos problemas, nem analisada na presente análise de dados.

A seguir serão relatados os resultados obtidos nesse contexto de experimentação.

4.3.1 Resultados - Graduação

A análise dos resultados foi realizada através das respostas dos alunos, dos registros de observação e transcrição dos áudios.

4.3.1.1 Resultados do Problema 1 – Área da casa

Com uma abordagem ampla, quase todos os grupos calcularam em algum momento o valor da semirreta MN (hipotenusa do triângulo) utilizando Pitágoras. Percebemos que os grupos tentam essa estratégia por conta de o formato do triângulo remeter a Geometria Plana, e esse ser um valor desconhecido do problema.

A maioria dos grupos percebeu a relação existente entre a variação da área e o conteúdo de funções, bastante presente na disciplina de CDI – I. Porém, nem todos conseguiram utilizar esses conceitos algebricamente.

Alguns grupos utilizaram semelhança de triângulos como uma estratégia de resolução, porém, mesmo que em algumas situações o conceito matemático estava correto, os valores utilizados não estavam. Isso deve-se as restrições impostas pelo problema. A maioria desses grupos acreditava que a distância máxima entre o ponto O e o $x(P)$ seria 13, e entre o ponto O e o $y(P)$ seria 27, pois para eles bastava subtrair 1 metro das laterais. Nesse momento os grupos já estavam com o aplicativo do GeoGebra em mãos.

Dos grupos que conseguiram encontrar uma função área que possivelmente representava a variação da área da casa, calcularam a derivada da função e o zero da função derivada para obter a abscissa do ponto máximo da área. Outros grupos se basearam na ideia que a área máxima é obtida pelo ponto médio do triângulo (terreno).

O Quadro 8 apresenta um apanhado das estratégias utilizadas pelos grupos.

Quadro 8 - Estratégias utilizadas pelos grupos da Graduação na resolução do Problema 1 – Área da casa

Estratégias		**E1**	**E2**	**E3**	**E4**	**E5**	**E6**	**E7**
Trigonometria	Cálculo de área							X
	Semelhança de triângulos			X	X		X	
	Ponto médio	X	X		X	X		
Funções	Coeficientes da função			X	X		X	X
	Coeficiente angular da reta tangente				X			
	Derivada de função						X	X
	Zero da função derivada						X	X
	Substituição do zero da função derivada na função área						X	X
Problema solucionado:	Parcialmente						X	X
	Completamente				X			
Problema não solucionado		X	X	X		X		

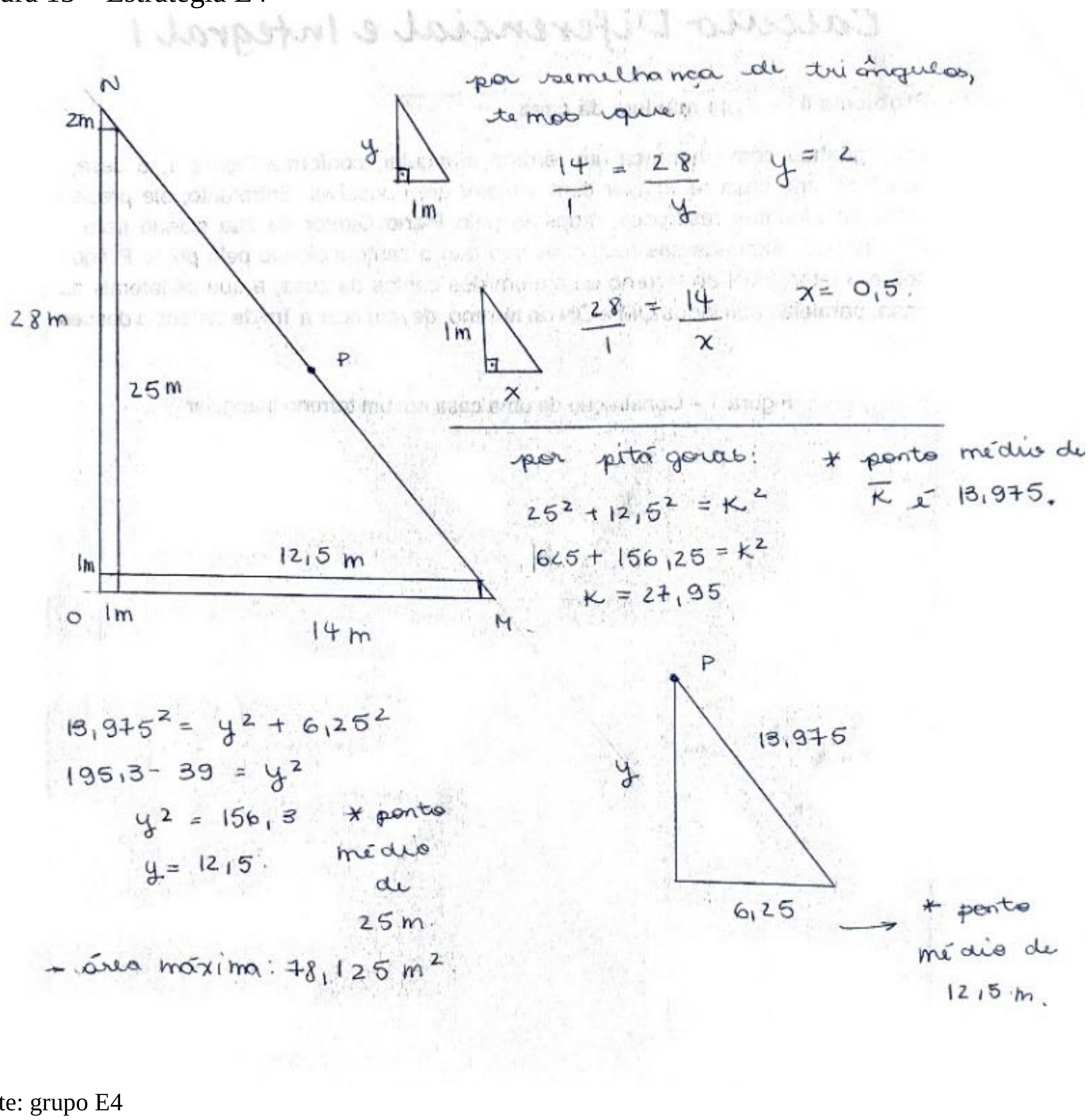
Fonte: a autora

Partindo para uma abordagem específica dos grupos, iniciamos analisando E1 e E4, que representaram as restrições corretamente. Os áudios nos permitem perceber que o GeoGebra auxiliou que esses dois grupos verificassem o valor máximo de O até $x(P)$ e de O até $y(P)$. Porém, o E1, embora tenha constado uma informação importante na resolução do problema sobre as restrições e ter uma hipótese inicial sobre o ponto médio do triângulo ser o ponto no qual obtemos a área máxima, o grupo opta por parar de resolver este problema e partir para o Problema 2 (o qual será relatado os resultados no tópico seguinte), conforme mostra a transcrição do áudio:

E1_A1: O máximo é 25. Então vai estar bem na metade.
E1_A3: Mas como vai ser 25 se tem 1 metro?
E1_A1: Sim, o metro é daqui até aqui, só que tipo... 1 metro dessa base, não quer dizer que chega até esse ponto.
E1_A3: Se os catetos fossem iguais daí ia dar certo.
E1_A1: Se pegar a metade da base e a metade da altura, vai ter o maior volume possível.
E1_A4: Uma 2x... tem que fazer alguma parada agora, que eu não sei.
[Silêncio]
E1_A1: Querem tentar resolver o da caixa primeiro então?

O áudio indica que o grupo com um pouco mais de discussão poderia resolver o problema ou pelo menos inferir que seria o ponto médio. Já o grupo E4 após constatar no GeoGebra informações importantes sobre as restrições, utiliza semelhança de triângulos para provar os reais valores possíveis na altura e base do triângulo sem as restrições. Feito isso, o grupo verifica a partir de cálculos que o ponto médio é onde obtemos a área máxima (Figura 13), todavia, os cálculos que demonstram essa hipótese não foram registrados na folha entregue à professora e a fala dos alunos ficou inaudível em alguns momentos durante a discussão de uma possível demonstração.

Figura 13 – Estratégia E4

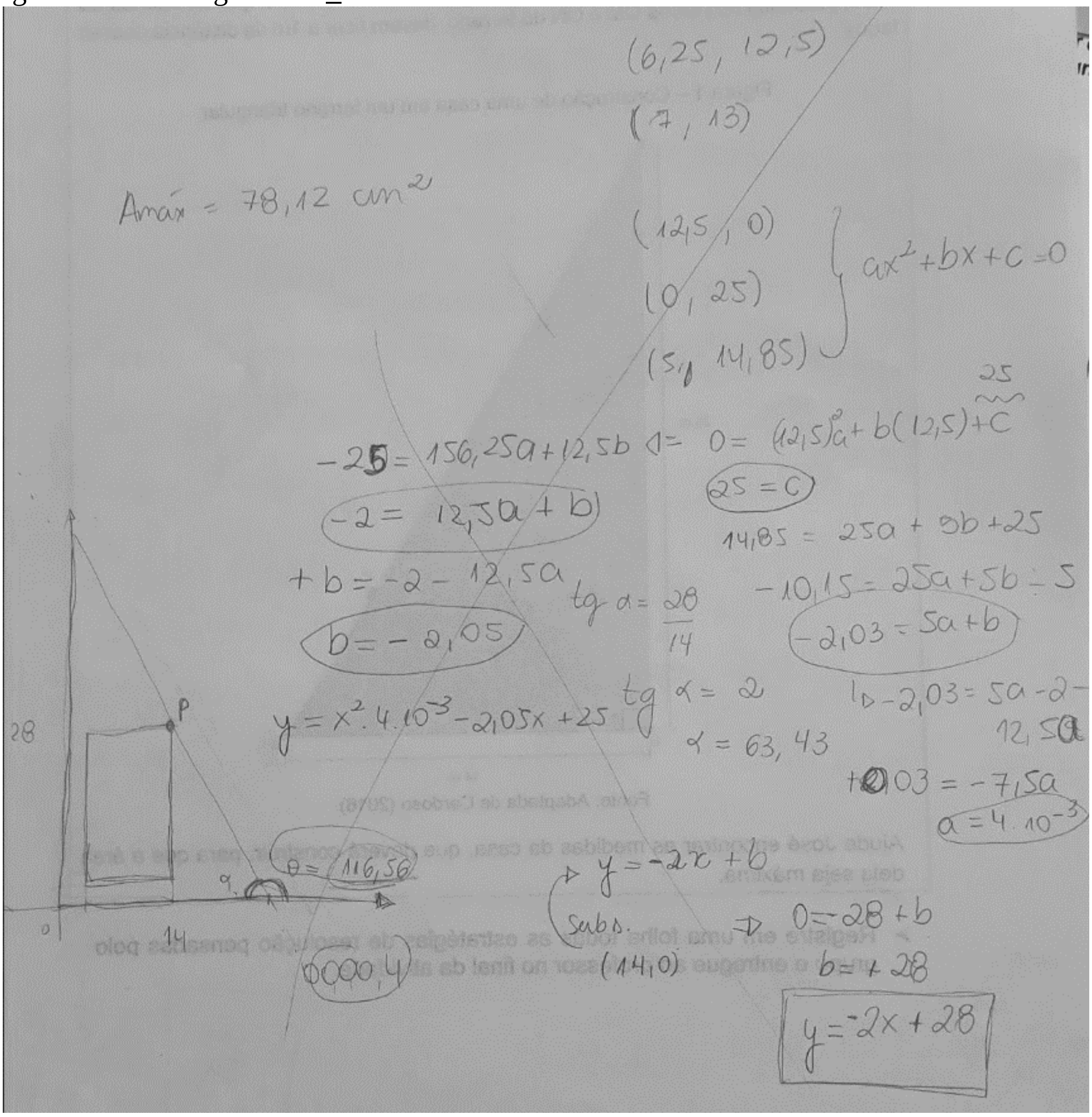


Fonte: grupo E4

Enquanto alguns membros do grupo E4 discutiam e resolviam o problema usando ponto médio, um outro membro encontrava a função área que é obtida pela relação de base (largura) e altura (comprimento) da casa. Esse membro E4_A1 do grupo utilizou sistemas lineares, para tentar encontrar os coeficientes *a, b* e *c* de uma função quadrática (função área da casa), e conceito de tangente, porém, por relatos do aluno, o mesmo diz não ter conseguido concluir devido ao tempo, mas pelas anotações dele entregue a professora (Figura 14) e pelo áudio transcrito da plenária, seus conceitos estavam corretos, conforme transcrição a seguir:

E4_A1: A gente pensou meio diferente um do outro, eu pensei que a função que determina a área vai ser relacionada com a base e altura, só que a base e altura estão relacionadas para que ela forme uma área máxima. Daí eu tirei pontos. Como o ponto P ele vai determinar a altura e a base... Eu coloquei no gráfico e a origem vai ser a base do triângulo ali. Eu usei esse aqui como a origem, daí o ponto P ele vai ser a base e altura da casinha...
Professora: As coordenadas do ponto P vão ser a base e a altura...
E4_A1: Isso, é. Daí eu peguei três pontos desses e uma função do segundo grau, que eu não consegui chegar porque primeiro eu fiz errado e depois não deu tempo de fazer. E isso, eu acho que essa função vai ser alguma coisa... a tangente dela vai ser determinada pela reta... essa reta aqui. Isso vai ser alguma coisa relacionado ao ponto P que vai determinar a base e altura para a área máxima.

Figura 14 – Estratégia do E4_A1

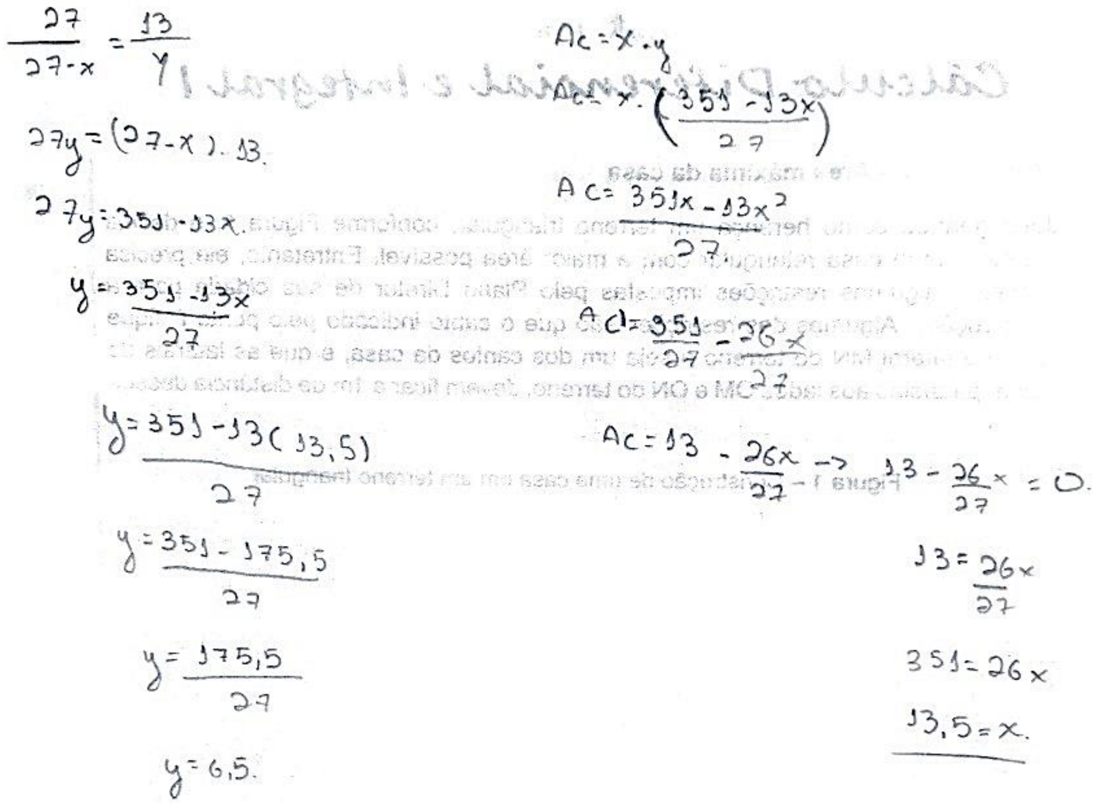


Fonte: aluno E4_A1

Esse aluno fez uma conversão do registro geométrico para o algébrico.

Partindo para o E6, que é formado por um único aluno, temos apenas um registro entregue por ele. Percebe-se que o problema foi resolvido utilizando semelhança de triângulos, funções e derivada. O único erro foi ter utilizado as medidas 27 e 13m para o terreno, ao invés de 25 e 12,5m. O aluno optou por não apresentar e nem passar a resolução para a folha A0. Pela Figura 15 podemos verificar seus cálculos.

Figura 15 – Estratégia E6



Fonte: aluno E6_A1

Mesmo que esteja parcialmente correta essa resolução, E6 não considerou o domínio das funções e nem verificou se o ponto crítico é máximo, mínimo, ou não existe derivada.

Pela transcrição do áudio do grupo E3, percebe-se que em uma de suas estratégias foi utilizado funções, e inclusive encontraram uma função a qual o grupo achava que deveria ser a função área. Todavia, além de usarem as restrições algebricamente erradas, a função que encontraram é semelhante a função altura (comprimento) da casa, e não a sua área. Porém, o grupo não conseguindo distinguir corretamente o que a função *y* encontrada estava definindo, após algumas discussões perceberam que essa não é a função área pois não é possível encontrar seu valor máximo (Ver transcrição a seguir).

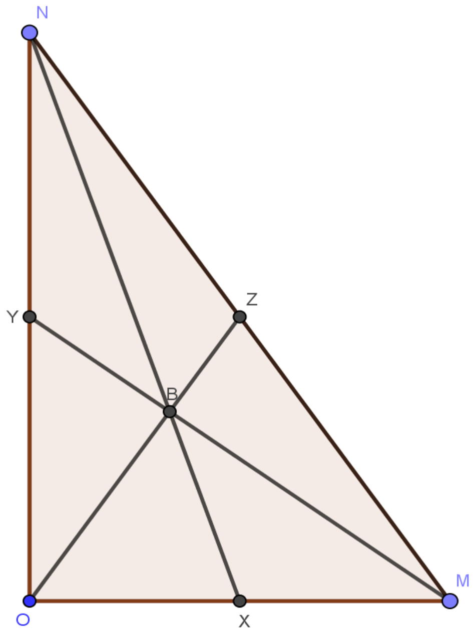
E3_A1: 2y é igual a menos 27x mais 27 sobre 13. O 13 eu passo para lá e aqui dividindo... Então a função y é igual a -27x/13 + 27.
E3_A2: Tá.
E3_A1: Lembra que a professora falou que...Espera... f de x... Então a gente tem uma função de primeiro grau, que é uma reta. Ela tem limite.
E3_A2: Não, não.
E3_A1: Uma reta né, tá em função só de x. É ax+b.
E3_A2: Sim, eu só estou pensando.
E3_A1: Pensando que tenha um valor máximo aqui...

E3_A2: Não, essa função não tá meio certa. Se ela é uma reta, ela é uma reta crescente ou decrescente. Então o valor máximo que poderia obter seria infinito.

Outra estratégia desse grupo é usando semelhança de triângulos, inclusive, percebe-se que o grupo opta pela semelhança de triângulos por ser um conteúdo previamente visto em sala, mas de todo modo, ainda não conseguiram resolver o problema.

O grupo E7 utilizou uma estratégia baseada em conceitos de Trigonometria e Funções, realizando a conversão desses registros em diversos momentos. Pelo registro entregue pelo grupo subentende-se que E7 divide o triângulo OMN em três partes: OXN, OYM, BMN. A Figura 16 ilustra o que o grupo objetivava fazer.

Figura 16 – Ilustração da estratégia de E7



Fonte: a autora

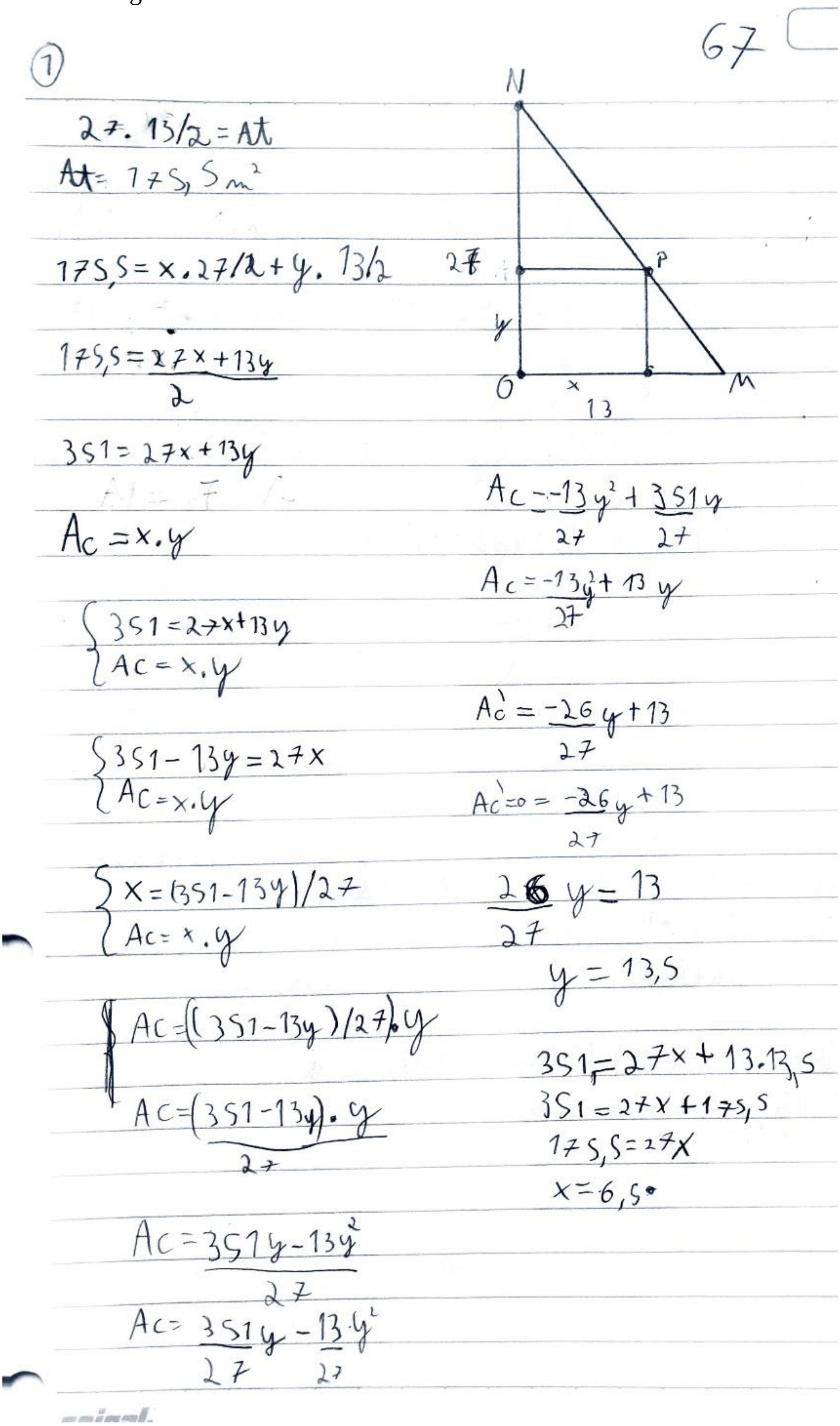
Feito isso, E7 iguala a área do triângulo OMN, a soma das áreas dos triângulos OXN e OYM, em função de X e Y[23]. Ao isolar a variável Y, obtém-se a função altura da casa (desconsiderando que há o erro em relação as restrições impostas pelo problema). Sendo assim, tem-se que sendo X a base e Y a altura da casa, a área é obtida através do produto dessas variáveis. A partir disso, E7 encontra a função derivada e calcula o zero da função derivada para obter o valor de máximo do retângulo OXPY (ou OXZY).

[23] Utilizaremos a notação X e Y se referindo a vértice e ao mesmo tempo variáveis, já que para que essa estratégia esteja correta, X e Y precisam ser ponto médio do triângulo.

Essa estratégia estaria correta se não fosse o erro em relação as restrições, porém, pelo registro do E7 (Figura 17) percebe-se que o grupo pode não ter utilizado os conceitos necessários da Geometria Plana que garantem que as informações são verdadeiras. Ou seja, primeiramente o grupo não poderia ter somado as áreas dos triângulos OXN e OYM e igualado a área total de OMN, sem considerar que X e Y são os pontos médios dos catetos desse triângulo. Afinal, essa soma só é verdade, pois, sendo o ponto B como na Figura 16 o baricentro do triângulo OMN, podemos garantir por definição de mediana e triângulos equivalentes que a área do quadrilátero OXBY é congruente a do triângulo BMN.

Ainda descrevendo sobre E7, esse grupo optou por não representar sua estratégia na folha A0 e nem apresentar em plenária. Mesmo que sua estratégia inicial era um tanto quanto diferente das demais, percebe-se que ao encontrar uma função quadrática o grupo utiliza o conceito de derivada para obter o ponto de máximo, assim como E6. Todavia, não foi apresentado o domínio das funções, e nem averiguado se o ponto crítico era um ponto de máximo, mínimo ou onde não existe a derivada. Com isso, verifica-se que houve pouco comprometimento do grupo em relação a formalização matemática.

Figura 17 - Estratégia E7



1

67

$27 \cdot 13/2 = At$

$At = 175{,}5\ m^2$

$175{,}5 = x \cdot 27/2 + y \cdot 13/2$

$175{,}5 = \dfrac{27x + 13y}{2}$

$351 = 27x + 13y$

$Ac = x \cdot y$

$\begin{cases} 351 = 27x + 13y \\ Ac = x \cdot y \end{cases}$

$\begin{cases} 351 - 13y = 27x \\ Ac = x \cdot y \end{cases}$

$\begin{cases} x = (351 - 13y)/27 \\ Ac = x \cdot y \end{cases}$

$Ac = ((351 - 13y)/27) \cdot y$

$Ac = \dfrac{(351 - 13y) \cdot y}{27}$

$Ac = \dfrac{351y - 13y^2}{27}$

$Ac = \dfrac{351}{27}y - \dfrac{13}{27}y^2$

$Ac = -\dfrac{13}{27}y^2 + \dfrac{351}{27}y$

$Ac = -\dfrac{13}{27}y^2 + 13y$

$Ac' = -\dfrac{26}{27}y + 13$

$Ac' = 0 = -\dfrac{26}{27}y + 13$

$\dfrac{26}{27}y = 13$

$y = 13{,}5$

$351 = 27x + 13 \cdot 13{,}5$

$351 = 27x + 175{,}5$

$175{,}5 = 27x$

$x = 6{,}5$

Fonte: Grupo E7

O Grupo E2 parte da ideia intuitiva que a área máxima da casa é obtida pelo ponto médio do triângulo descontando as restrições. Comete o mesmo erro que alguns dos demais grupo em relação ao uso das restrições. O E2 utiliza o GeoGebra para verificar se a área máxima da casa, sendo aproximadamente 78 m², tem como base a metade de 13m, e altura a metade de 27m. Assim que percebem que não é exatamente a metade, considerando um triângulo de 13 por 27m, partem para a leitura do problema do volume e não voltam mais a resolver o problema da área da casa.

A seguir serão relatas as estratégias dos grupos em relação ao problema do volume da caixa.

4.3.1.2 Resultados do Problema 2 – Volume da caixa

Durante a entrevista pré-experimentação com a professora regente da turma, foi relatado por ela que no início do semestre, enquanto lecionava o conteúdo de funções, foi proposto um problema da caixa, semelhante ao Problema 2 (Quadro 7). O problema proposto pela professora regente visava discutir com os alunos a expressão que representava o volume da caixa, o domínio dessa função, esboço do gráfico utilizando um software matemático, e por fim, analisando o gráfico, sem realizar cálculos, descrever qual o valor do lado do quadrado recortado para que a caixa tenha volume máximo. Com as transcrições dos áudios e resoluções entregues pelos alunos, foi possível perceber que todos os grupos utilizaram esse conhecimento prévio para resolver parte do problema. Alguns grupos conseguiram concluir a resolução utilizando a primeira derivada. Outros encontraram apenas a função volume. Vale ressaltar que a professora regente não utilizou os conhecimentos de derivada para resolver o problema proposto por ela no início do semestre. Utilizou apenas análise do ponto máximo do gráfico da função.

O Quadro 9 apresenta uma compilação das estratégias utilizadas pelos grupos.

Quadro 9 - Estratégias utilizadas pelos grupos da Graduação na resolução do Problema 2 – Volume máximo

Estratégias	**E1**	**E2**	**E3**	**E4**	**E5**	**E6**	**E7**
Função volume	X	X	X	X	X	X	X
Raízes da função volume			X		X		
Primeira derivada	X	X		X		X	X
Ponto crítico	X						
Zero da primeira derivada	X	X		X		X	X

Segunda derivada		X						
Substituição do zero da função derivada na função volume			X				X	
Ferramentas do GeoGebra		X		X				
Problema solucionado:	Parcialmente			X	X		X	X
	Completamente	X	X					
Problema não solucionado						X		

Fonte: a autora

Vamos iniciar abordando os grupos E3 e E5, que não chegaram a realizar cálculos com derivada. Esses grupos após encontrarem a função volume, igualaram a zero e calcularam as raízes dessa função. Feito isso, o grupo E5 não conseguiu dar continuidade a resolução. Enquanto que o E3, assim que percebeu que as raízes da função volume não iriam ajudar a encontrar o ponto de máximo, utilizou o GeoGebra para plotar o gráfico e encontrar o volume máximo da caixa a partir da visualização. Percebemos que não houve cálculos de derivada.

Analisando o áudio do grupo E1, verificamos que utilizou como conhecimento prévio o problema proposto pela professora regente, e também comentou em ter resolvido um problema semelhante na disciplina de Desenho Técnico. Porém, um dos membros do grupo citou em um momento que iria procurar na internet a resolução do problema. O problema da caixa é comum em livros de Cálculo e lista de exercícios, sendo assim, a procura na internet pode ter influenciado a resolução do grupo.

Dando continuidade à resolução, o grupo E1 discute sobre o ponto crítico da função o que foi feito por poucos grupos, conforme transcrição a seguir.

E1_A4: Vamos ter que achar a função do volume do negócio.
E1_A3: O que acontece com a primeira derivada? Ponto crítico? Vai ser onde zera a primeira derivada. Então o ponto de máximo vai ser o ponto crítico.
E1_A4: Dá uma função certinha do segundo grau?
E1_A3: Dá uma função cúbica.
E1_A4: Então, já não pode falar isso, porque ponto crítico é ponto de inflexão, ponto de um monte de coisa.

A troca de ideias auxilia no desenvolvimento da aprendizagem. Durante a transcrição do áudio percebemos no grupo E1 que isso ocorreu em vários momentos da atividade, assim como na maioria dos outros grupos que tiveram o áudio gravado. Abaixo está um dos momentos em que o trabalho em grupo desenvolve a aprendizagem:

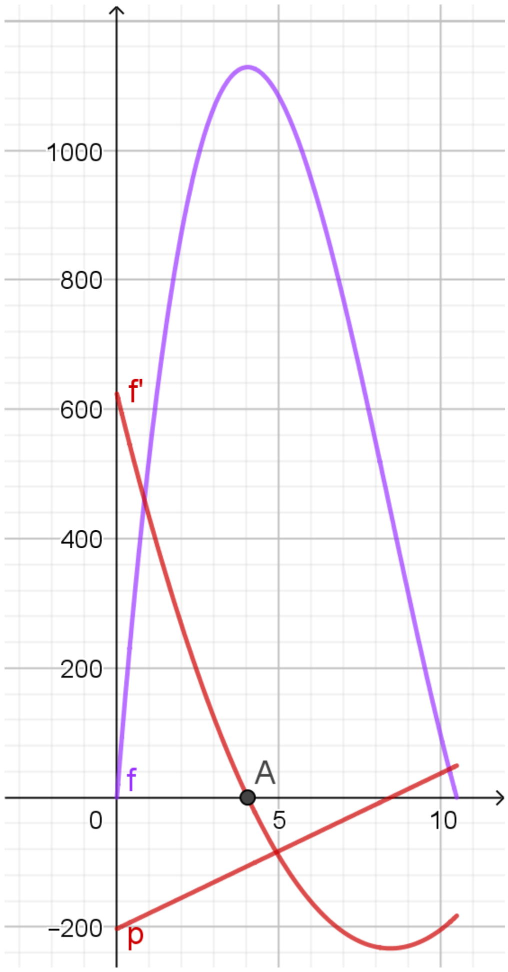
E1_A3: Como é que a gente faz para descobrir se é ponto de máximo ou de mínimo?
E1_A5: Vê onde a derivada é zero e vai testando hipótese. Mas você já achou a função?

Após encontrar a função, o E1 utilizou o GeoGebra como verificador de respostas, para calcular a primeira e segunda derivada e facilitar a conversão do registro algébrico para o gráfico. Isso foi constatado durante a transcrição do áudio, como mostrado a seguir.

E1_A5: Acho que essa é a equação. Coloca no GeoGebra para ver como é que vai ficar.
[...]
E1_A4: Não tem como colocar limitação para o x também? mudar o domínio da função? [...] O domínio seria x menor que 10,5.
E1_A2: Acho que não tem como.
E1_A4: Clica em propriedades. x menor que 10,5.
E1_A3: E maior que zero.
[...]
E1_A5: Escreve ali: derivada de f. Derivada de novo.
E1_A2: Escrevo derivada dentro da função?
E1_A5: Tá, já que um volume não pode ser negativo, coloca acima de zero.
E1_A3: Mas a segunda derivada pode ser negativa. É que a concavidade está voltada para baixo.
E1_A5: Ah é.
E1_A3: A segunda derivada vai estar na parte negativa.... Não, não é esse ponto que a gente quer. A gente quer o ponto da primeira derivada.
E1_A5: Então por que a gente fez a segunda derivada se a gente queria o ponto da primeira derivada?
E1_A2: Não sei.

O grupo até o momento da experimentação demonstra ainda não ter uma compreensão do teste da segunda derivada. Embora saibam que a segunda derivada representa a concavidade da função, o grupo não transitou entre os registros algébrico e gráfico, na qual é possível verificar que o ponto crítico é ponto de máximo do gráfico, pois a segunda derivada é negativa no domínio da função. Além disso, mesmo que o grupo tenha discutido sobre o ponto crítico, não deixou evidente a preocupação em utilizar a primeira derivada como teste para classificá-lo. A Figura 18, mostra como o grupo utilizou o GeoGebra na resolução. A Figura 18 mostra a função volume (f), sua derivada (f') e a segunda derivada (p), plotadas. Além disso, o E1 marca o ponto A onde a f' é nula.

Figura 18 – Estratégia E1 utilizando o GeoGebra



Fonte: grupo E1

O aplicativo que apresenta essa estratégia de resolução utilizando o GeoGebra foi salvo do computador em que o E1 utilizara.

Partindo para a análise do grupo E2, percebemos que os alunos também resolveram o Problema 2 corretamente utilizando derivada. Mas diferente de E1, não utilizou o GeoGebra na realização dos Cálculos, apenas para manusear dinamicamente o problema a partir do aplicativo que lhes foi disponibilizado.

No início da resolução de E2, o grupo citou que lembrava de ter resolvido um problema semelhante com a professora regente (conhecimento prévio) e discutiram os possíveis valores do corte quadrado a ser realizado na fabricação da caixa. Porém, durante a transcrição do áudio é possível perceber que o grupo discute esses valores, mas sem citar a palavra domínio. Inclusive, o domínio da função volume não é apresentado nem na folha A0 de apresentação, e nem nos registros das estratégias entregue para a professora. A transcrição a seguir apresenta uma parte da conversa.

E2_A3: Tá a gente sabe que vai ter um ponto daqui que ela não vai mais ser uma caixa.
E2_A2: É na metade.
E2_A3: Tá. Qual a medida que a gente tá usando?
E2_A4: 29.8 e 21.
E2-A1: Dobrar no meio não dá. Mas até perto do meio a gente pode.

Também foi possível constatar que o grupo E2 procurou resoluções e/ou conteúdo de Otimização na internet, e além disso, alguns membros do grupo se disseram ser repetentes na disciplina de CDI-I, o que pode influenciar nos dados.

Partindo para o grupo E4, percebemos que o grupo entrega a resolução parcial do problema, até o cálculo da primeira derivada ser nula. A resolução está incompleta na folha A0 também, porém, durante a plenária o grupo alegou que fez semelhante ao grupo E2, usando derivada, mas não conseguiram concluir devido ao tempo.

O E6 utilizou o procedimento de derivada para resolver o problema, porém, com o valor do comprimento sendo 15 ao invés de aproximadamente 21cm. Isso pode ter ocorrido ao tentar utilizar um problema semelhante como base. O grupo E7 também utilizou as medidas 15 x 30cm, como E6, e utilizou como estratégia de resolução a derivada. Mesmo não tendo concluído a resolução, na folha entregue para a professora é possível constatar que houve um erro algébrico logo no início dos cálculos, e com certeza influenciaria na resposta final do grupo. Como já mencionado, os dois grupos E6 e E7 optaram por não apresentar em plenária suas estratégias.

Dando continuidade as etapas da metodologia, a seguir serão relatados os resultados obtidos nas etapas de plenária, busca pelo consenso e formalização.

4.3.2 Plenária, busca pelo consenso e formalização - Graduação

Parte da plenária ocorreu no primeiro dia de experimentação, e o restante no segundo dia. Os dados que serão apresentados foram obtidos a partir da gravação da plenária, e também, pela gravação do áudio de alguns grupos em que os *tablets* continuaram gravando por alguns minutos quando foi dado início a plenária.

O grupo E3 optou por iniciar a apresentação das estratégias. Partiram do Problema 1. Iniciaram comentando como utilizaram algebricamente as restrições impostas pelo problema. Como já relatado nos resultados do Problema 1, o E3, assim como outros grupos, apenas subtraiu um metro das laterais obtendo um novo triângulo com medidas 13m de base e 27m de altura. A professora deixa o grupo concluir sua apresentação sobre o Problema 1, e pergunta aos demais grupos se mais alguém fez semelhante ao grupo. Apenas um grupo responde que não. Alguns não se manifestaram. A professora, utilizando o GeoGebra, move o ponto P até seu mínimo em MN e depois até seu máximo, possibilitando que a turma perceba que não basta subtrair um metro. A professora questiona a turma por que não é suficiente apenas fazer isso. Um membro do grupo E4 responde que é “porque tem que fazer Pitágoras naqueles triangulozinhos ali”. Um dos membros do E2 fala para seu próprio grupo “Por isso que não estava dando certo”. A professora-pesquisadora dá continuidade a essa breve explicação, sem realizar cálculos, visto que isso seria feito na formalização.

Após isso, o E3 comenta suas estratégias referente ao Problema 2. O grupo apresenta como obteve a função volume e afirma que encontrou o ponto máximo plotando a função no GeoGebra. A professora questiona como eles poderiam tentar encontrar o ponto máximo sem observá-lo no GeoGebra. Um dos membros do grupo diz que poderiam utilizar as equações da abscissa e ordenada do vértice. A professora retorna a pergunta se isso seria possível, já que temos uma função cúbica. O mesmo membro do E3 responde que bastaria colocar um x em evidência, obtendo o produto entre x e uma função quadrática. A partir disso, poderíamos utilizar as equações do vértice. A professora pede que pense melhor se é possível encontrar dessa forma e afirma que seria possível se fosse para encontrar as raízes. A partir disso, a professora questiona se o grupo saberia alguma forma de encontrar o máximo do volume usando o Cálculo. O grupo parece não saber. A professora retoma o conteúdo das últimas aulas em que foi realizada a análise de gráficos. Inclusive, enquanto a professora retomava alguns conceitos vistos nas últimas aulas antes da experimentação, um dos membros de E4, diz “Foi isso que a gente fez então...”. A professora começa a fazer perguntas aos grupos: O que é a derivada? O que acontece com a derivada quando temos um ponto de máximo ou mínimo? Alguns alunos respondem que é a inclinação da reta tangente, e no ponto máximo ela vale zero. A professora conclui falando que essa seria uma estratégia utilizando os conhecimentos do Cálculo, além do Ensino Médio.

A seguir, o grupo E2 inicia sua apresentação partindo do Problema 2. E2 mostra que após encontrarem a função volume, derivam e encontram as duas raízes da função derivada. Utilizando apenas uma das raízes, calculam as medidas da caixa e o volume máximo. Após concluírem a professora mostra que uma das raízes não foi utilizada pois não fazia parte do domínio da função volume. A professora entende que o grupo sabe o porquê não utilizou a segunda raiz, porém, ela formaliza o domínio matematicamente pois isso ficou incompleto na apresentação. A professora continua a plenária mostrando aos grupos que o valor encontrado como raiz da primeira derivada não pode ser usado imediatamente como ponto de máximo, pois, ele é um ponto crítico, ou seja, é candidato a máximo ou mínimo, ou ainda, ponto em que a derivada não existe. A partir disso, a professora questiona a turma como verificamos se o ponto crítico realmente é um ponto de máximo. O E3 responde que devemos analisar o sinal da primeira derivada, e assim, saber onde a função cresce ou decresce. A professora aproveita a discussão e retoma apenas verbalmente o teste da primeira derivada.

O grupo continua com a apresentação do Problema 1, e afirma, mesmo não tendo conseguido resolver, que percebeu que a área máxima era obtida no ponto médio. A professora conclui que essa estratégia estaria correta.

O E4 quando iniciou a apresentação disse que alguns membros do grupo pensaram diferente um do outro, como já relatado nos resultados do Problema 1. Na apresentação do Problema 2 o grupo afirmou que tentou usar uma estratégia semelhante ao E2.

Alguns grupos optaram por não apresentar, e os demais grupos que apresentaram, foram semelhantes as demais estratégias.

Concluída a plenária foi realizada a formalização do conteúdo, paralelamente a resolução dos problemas. Mesmo a professora questionando em vários momentos a turma sobre o que fazer, como fazer e se foi compreendido, não houve muita participação dos alunos durante a formalização do conteúdo, um comportamento diferente do que ocorreu em plenária.

A professora iniciou resolvendo o Problema 1 encontrando a função área e definindo seu domínio, recorrendo ao aplicativo[24] do GeoGebra quando necessário, com o objetivo de facilitar a partir da visualização o que era dito. Definida a função área, a professora comenta que uma possível maneira de calcular o máximo da função seria utilizando os conhecimentos do Ensino Médio sobre Vértice de Parábola. Feito isso, a professora calcula e define ponto crítico, usando agora os conhecimentos do Cálculo. Em seguida utiliza e formaliza o teste da primeira derivada, deixando claro que também seria possível utilizarmos o teste da segunda derivada. Para formalizar o teste da primeira derivada a professora utiliza o *power point* disponibilizado pela professora regente, como mostra a Figura 19.

[24] Link do aplicativo: https://ggbm.at/QpB7Z5wg

Figura 19 – Teste da primeira derivada apresentado utilizando a ferramenta *power point*.

Teste da primeira derivada

Seja $y = f(x)$ uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto c.

i. Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem máximo relativo em c;

ii. Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem mínimo relativo em c;

iii. Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f não tem ponto nem de máximo nem de mínimo relativo em c;

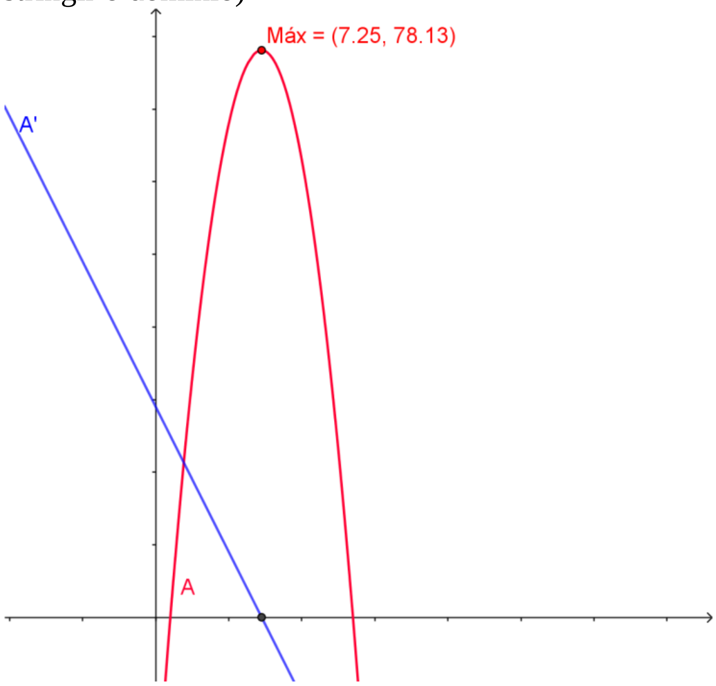
iv. Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f não tem ponto nem de máximo nem de mínimo relativo em c;

Teorema de Weierstrass: Se f é uma função contínua, definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Então f assume seu máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.

Fonte: material disponibilizado pela professora regente da turma

Dando continuidade à formalização do teste, a professora aplica o teste no problema utilizando o aplicativo do GeoGebra que apresenta a função área (Figura 20), para que o aluno relacionasse o gráfico com a parte algébrica representada no quadro branco.

Figura 20 – Ilustração da análise do teste da primeira derivada na função área da casa do Problema 1 (sem restringir o domínio)

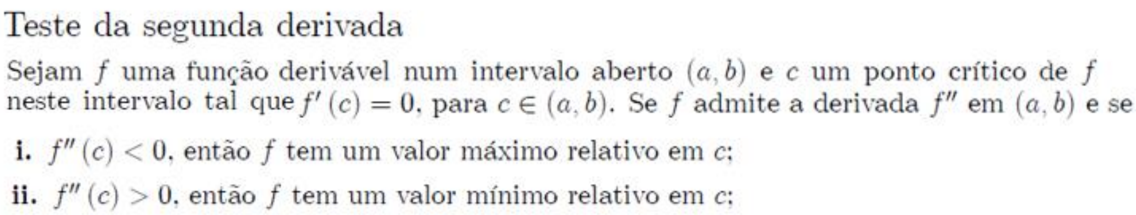


Fonte: a autora

Com isso, é calculado a área máxima e as medidas da casa.

A professora parte para o Problema 2. Encontra a função volume e para definir o domínio da função, realiza cortes quadrados nos quatro cantos de uma folha sulfite até que os próprios alunos percebam que não é possível realizar cortes para valores maiores do que a metade do menor lado da folha. Além disso, utiliza o aplicativo[25] do GeoGebra para apresentar dinamicamente. A partir disso, a professora escreve matematicamente o domínio e encontra o ponto crítico. Feito isso, a professora formaliza o teste da segunda derivada utilizando o *power point*, conforme Figura 21.

Figura 21 - Teste da segunda derivada apresentado utilizando a ferramenta *power point*



Teste da segunda derivada

Sejam f uma função derivável num intervalo aberto (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo tal que $f'(c) = 0$, para $c \in (a, b)$. Se f admite a derivada f'' em (a, b) e se

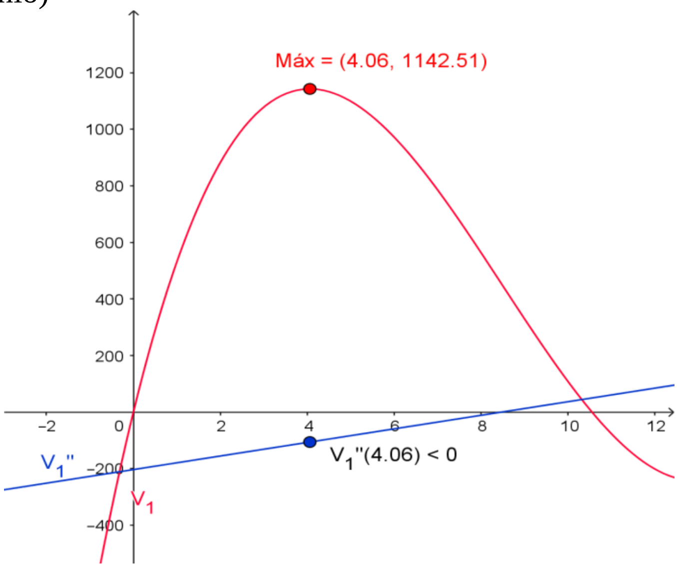
i. $f''(c) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em c;

ii. $f''(c) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em c;

Fonte: material disponibilizado pela professora regente da turma

Com isso, utiliza o GeoGebra para averiguar a concavidade e o valor da segunda derivada no ponto crítico, confrontando a definição do teste com sua experimentação no problema (Figura 22). E paralelo a isso, faz os cálculos necessários no quadro branco.

Figura 22 – Ilustração da análise do teste da segunda derivada na função volume do Problema 2 (sem restringir o domínio)



Fonte: a autora

[25] Link do aplicativo: https://ggbm.at/zyJwdBkT

Por fim, encontra as medidas da caixa e o seu volume máximo.

Um dos membros do E5 questiona como seria utilizado o teste da segunda derivada no Problema 1, visto que a segunda derivada é uma constante, e não uma função polinomial. A professora retoma o Problema 1, aplicando o teste da segunda derivada. O resultado da segunda derivada é uma constante negativa, o que não permite que seja substituído o ponto crítico. A professora lê novamente a definição do teste da segunda derivada, de modo que os alunos percebam que apesar de não ser possível substituir o ponto crítico, o teste garante pela negatividade da segunda derivada que o ponto é máximo. Além disso, aproveita para resgatar conceitos do Ensino Médio em relação a concavidade da função. A professora exemplifica utilizando uma função do segundo grau com o coeficiente do maior grau sendo positivo. A turma sabendo que a concavidade da função é para cima e que assim tem um ponto de mínimo, a professora faz um gancho com a definição do teste da segunda derivada e garante que é dessa forma que podemos afirmar aos alunos do Ensino Médio que a concavidade da função está relacionada ao sinal do coeficiente.

Feita a formalização, a professora entrega aos alunos uma lista contendo outros problemas de Otimização. Lê alguns dos problemas com a turma, enfatizando que o uso do GeoGebra pode ser fundamental na resolução de alguns problemas.

Não foi realizada a formalização do problema 1 utilizando a estratégia de ponto médio feita por alguns grupos devido ao limite de aulas concedidas a professora para realização da atividade.

A avaliação foi realizada durante a experimentação, enquanto eram analisadas as discussões dos grupos e a discussão em plenária. Além disso, a transcrição dos áudios além de servir como base de dados para a dissertação, é um meio possível e interessante de avaliação, afinal, a partir deles foi possível verificar discussões importantes entre os alunos, que não foram percebidas através das anotações.

4.3.3 Considerações sobre os resultados - Graduação

As considerações dos problemas serão apresentadas conjuntamente, e caso haja a necessidade de explorar análises particulares, o problema em questão será citado.

Os grupos trabalharam de modo colaborativo (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), exceto o E4 que devido a discrepância entre as ideias de estratégias optaram por resolver, em alguns momentos, individualmente.

No Problema 1 os grupos pouco se preocuparam com formalidades matemáticas, como, domínio, análise de ponto crítico, comportamento da função, etc. Já no Problema 2, no qual a maioria tomou como base e conhecimento prévio o problema semelhante resolvido pela professora regente, abordaram melhor as formalidades matemáticas.

Conceitos de Geometria estavam bastante presentes nas estratégias de resolução do Problema 1 de quase todos os grupos, como cálculo de área, ponto médio, Teorema de Pitágoras, etc. Deve-se isso a forte visualização presente na Geometria. Esse conteúdo matemático é um dos que mais trabalha a visualização, e não fica apenas no abstrato. Embora o objetivo do problema proposto não seja trabalhar a Geometria, o fato dos alunos abordarem esse conteúdo como estratégia é visto como positivo, já que desta forma, possibilita que os futuros professores percebam que um problema pode comportar várias estratégias de resolução, e não apenas aquela de seu interesse.

Além de Geometria, os grupos abordaram conceitos de Funções, porém, usando esta estratégia os alunos demonstraram maior dificuldade. O conteúdo de funções é um tanto abstrato, e dificulta a conversão entre as representações semióticas, ainda mais quando se busca sair do registro gráfico para o algébrico (DUVAL, 2009).

O grupo E3 mostrou dificuldade em verificar as dependências funcionais presentes no problema. Suas estratégias abordavam ideias e conceitos necessários para a resolução, mas o grupo teve fragilidade em relacionar suas ideias com as condições dos problemas (ALMEIDA; VISEU, 2002), principalmente o Problema 1.

Apenas o E3 afirma que seria possível utilizar os conceitos de Vértice de Parábola utilizados no Ensino Médio para resolver o Problema 1, isso ocorre durante a plenária. Em nenhuma das gravações, ou observações feitas em sala, percebeu-se os grupos citando conceitos vistos especialmente no Ensino Médio. Assim como SBEM (2013) afirma, os (futuros) professores precisam fazer e conhecer essa relação entre sua formação e sua atuação profissional. Durante a formalização, a professora citou isso durante a sua explicação citando os conceitos da Otimização de Funções visto no Cálculo, que dão fundamento para o Ensino Médio, como por exemplo, a questão de concavidade relacionada ao teste da segunda derivada e a fórmula da abscissa do vértice demonstrada a partir do teste da primeira derivada.

A experimentação possibilitou perceber algumas fragilidades (AZEVEDO, 2014). Os erros cometidos estavam principalmente relacionados ao conceito de função, como por exemplo, a proporcionalidade presente no Problema 1.

O GeoGebra foi bastante utilizado pelos grupos. Durante a observação foi verificado que os grupos manipularam diversas vezes os aplicativos disponibilizados. Alguns grupos usaram o GeoGebra para visualizar gráficos, plotar funções, realizar cálculos e analisar parâmetros de funções. Além disso, pelos áudios transcritos e observações em sala, percebe-se que o GeoGebra auxiliou os alunos a relacionarem as condições impostas pelo problema com a resolução, verificar respostas e conectar conhecimentos. Essas vantagens observadas na experimentação vão ao encontro do que é abordado em nossos referenciais (RICHIT, 2016; NUMER; JUSTO, 2015; ONUCHIC; ALLEVATO, 2012; SILVA, 2010; DIKOVIC, 2009; ARAÚJO; NÓBRIGA, 2008).

A recorrência ao software GeoGebra ocorreu principalmente para verificar os resultados das estratégias utilizadas e facilitar os cálculos manuais de derivada e raízes.

Allevato e Onuchic (2014) e Polya (1995) aconselham que o aluno busque conhecimentos prévios, problemas já resolvidos anteriormente que sejam semelhantes ao problema em questão. Nos dois problemas aplicados, principalmente no Problema 2, os grupos buscaram utilizar essa técnica, que demonstrou favorecer a resolução do problema. O fato da professora regente ter resolvido um problema semelhante ao da caixa com a turma no início do conteúdo de Funções, possibilitou que os grupos percebessem na atual etapa da disciplina que eles passam a ter bagagem para encontrar o máximo local de uma função cúbica através de cálculos, e não apenas por análise gráfica de funções.

A plenária possibilitou avaliar os alunos e fazê-los discutir sobre alguns conceitos presentes na Otimização de Funções. Houve pouca interferência da professora com os grupos durante a resolução dos problemas, isso pois, se percebeu um pouco de timidez e recusa quando a professora buscava saber se havia alguma dúvida. Sendo assim, durante a plenária a professora realizou mais perguntas para poder compreender melhor as estratégias dos alunos, os erros as vezes cometidos e possíveis dúvidas não respondidas. A professora buscou no momento da plenária induzir conceitos do Cálculo necessários para a resolução, o que pareceu facilitar a compreensão dos alunos para a formalização.

A formalização realizada com auxílio do GeoGebra, possibilitou que os conceitos sobre os testes da primeira e segunda derivada fossem visualizados. O uso de mais de uma representação semiótica, favoreceu a aprendizagem do aluno, já que segundo Duval (2009), o indivíduo só aprende quando transita em pelo menos duas representações do objeto.

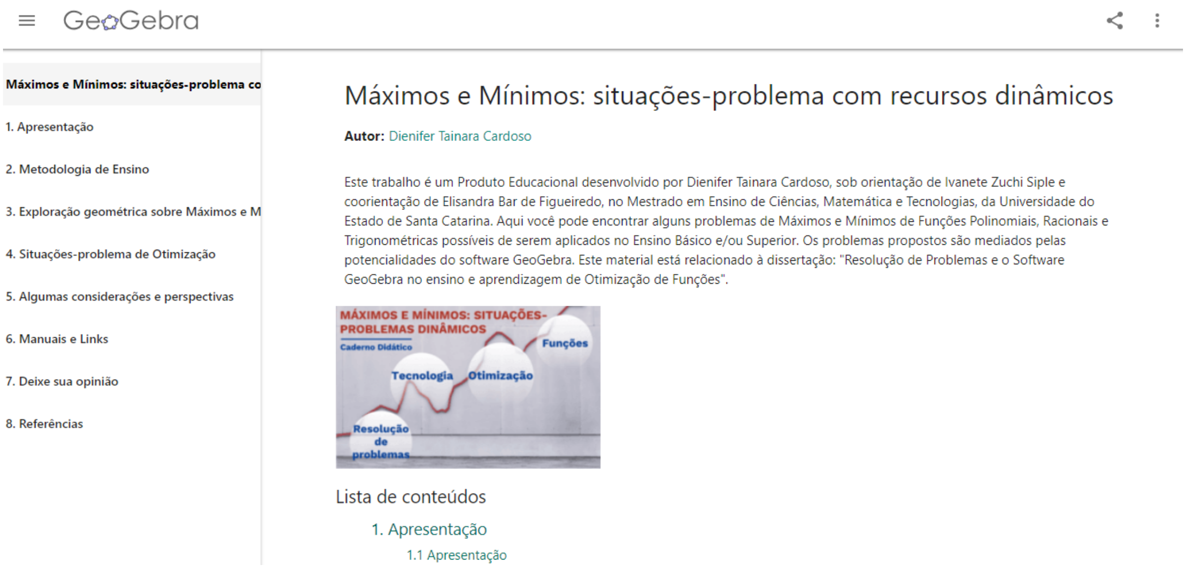
Por fim, constatamos que a inter-relação de conceitos do Ensino Médio com o Superior foi oportunizado durante a formalização e plenária com as questões e citações feitas pela professora. Segundo Onuchic e Morais (2013) é importante que sejam aplicados problemas no Ensino Superior que possibilitem os (futuros) professores inter-relacionar os conceitos, e além disso, ter o conhecimento de uma nova metodologia de ensino.

5 PRODUTO EDUCACIONAL

Para contribuir com o ensino e aprendizagem de Otimização de Funções desenvolvemos um Caderno Didático utilizando a ferramenta GeoGebraBook, intitulado: Máximos e Mínimos: situações-problema com recursos dinâmicos. A Figura 23 ilustra a tela inicial do produto.

Algumas características desse nosso Produto Educacional foram inspiradas no Produto Educacional produzido por Lemke (2017), tais como a forma de apresentação, os ícones, bem com a organização do respectivo produto.

Figura 23 – Tela inicial do Caderno Didático



Fonte: a autora

Parte deste produto foi experimentado conforme detalhado no Capítulo 4. Após essas experimentações, alterações foram realizadas como melhorias ao caderno. Focaremos aqui em apresentar as sequências didáticas que foram experimentadas, e apresentar brevemente o restante do caderno. A descrição do Produto Educacional completa pode ser consultada no documento que acompanha essa dissertação denominado “Máximos e Mínimos: situações-problema com recursos dinâmicos”[26].

Capítulo 1: “Apresentação”. Aborda uma sucinta apresentação do caderno, informações sobre as autoras e descrição desse Produto Educacional disponível em pdf. Além disso, temos a explicação dos ícones que serão utilizados ao longo do caderno.

---

[26] O documento pode ser encontrado na página do Portal eduCapes pelo link https://educapes.capes.gov.br/

Capítulo 2: “Metodologia de Ensino”. A metodologia que foi utilizada como foco nesse caderno foi a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas. Sendo assim, utilizamos esse capítulo para tratar de uma concisa apresentação sobre essa metodologia.

Capítulo 3: “Exploração geométrica sobre Máximos e Mínimos”. Desenvolvemos aplicativos que podem ser apresentados no Ensino Médio e outros no Ensino Superior utilizando os principais conceitos envolvidos na caracterização de Máximos e Mínimos de Funções. No total foram desenvolvidos 9 (nove) aplicativos.

Capítulo 4: “Situações-problema de otimização”. Nesse capítulo são apresentadas todas as situações-problema criadas ou adaptadas para serem resolvidas utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pela tecnologia. No total são 11 (onze) situações e 17 (quinze) aplicativos desenvolvidos para esse capítulo. A tela inicial está ilustrada pela Figura 24.

Figura 24 – Tela inicial do Capítulo 4

Fonte: a autora

As atividades que foram experimentadas compõem os itens 4.1 e 4.2.

Na tela do item 4.1 são apresentados o objetivo, público-alvo e a situação-problema, conforme apresentado abaixo:

Público alvo: Ensino Médio ou Superior.

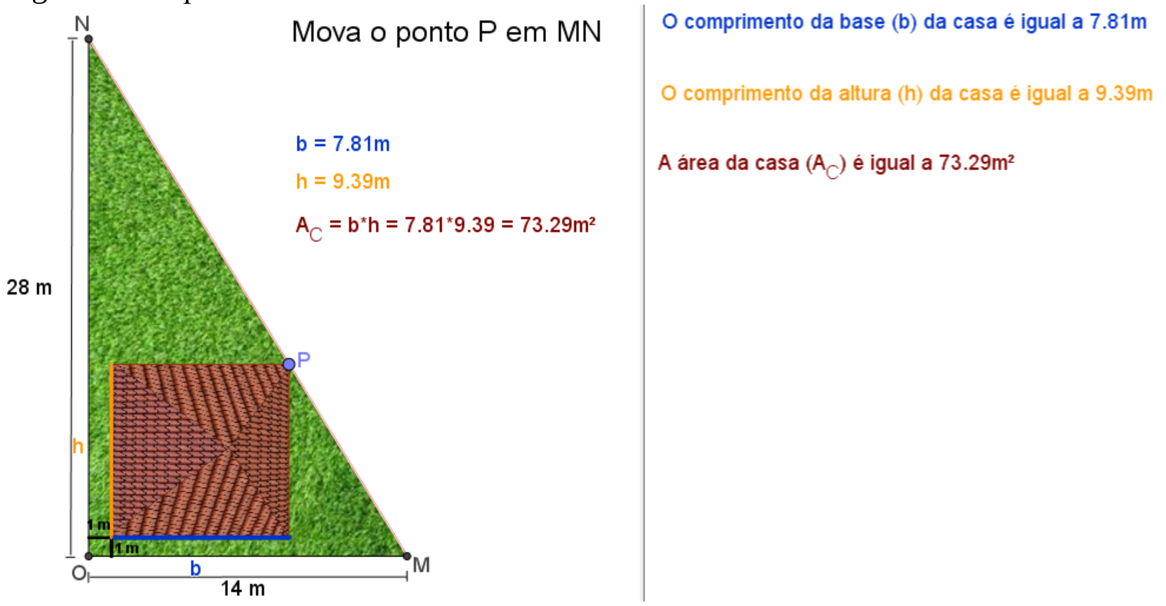
Objetivo: Abordar um problema de otimização envolvendo a aplicação de uma função quadrática utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

Situação-problema:

> José ganhou como herança um terreno triangular, conforme aplicativo 'Área da casa' abaixo, e deseja construir uma casa retangular com a maior área possível. Entretanto, ele precisa respeitar algumas restrições impostas pelo Plano Diretor de sua cidade para a construção. Algumas das restrições são que o canto indicado pelo ponto P fique sobre a lateral MN do terreno e seja um dos cantos da casa, e que as laterais da casa, paralelas aos lados OM e ON do terreno, devem ficar a 1m de distância desses lados. Ajude José encontrar as medidas da casa, que deverá construir, para que a área dela seja máxima.

Aplicativo: O Aplicativo 'Área da casa' foi criado de modo que ajudasse na compreensão do problema e a criar conjeturas. A Figura 25 ilustra esse aplicativo.

Figura 25 – Aplicativo 'Área da casa' referente ao Problema Área da casa



Fonte: a autora

Perguntas:

- A área da casa está variando? (Analise o aplicativo 'Área da casa')
- Existe alguma dependência entre as medidas da casa?
- O que está limitando a medida altura da casa?
- Existe uma função que representa a medida 'base' da casa? E alguma que represente a 'altura'? Quais? (não esqueça de considerar as restrições).
- É possível descrever uma função que represente a área da casa? Se sim, qual?
- Qual o valor da área máxima da casa nessa situação? (Realize os cálculos e verifique no aplicativo).

As perguntas acima são apresentadas na página on-line e podem ser respondidas utilizando a própria plataforma. Para isso haverá um campo escrito ‘Digite aqui sua resposta’ abaixo de cada questão. Nas questões com apenas uma resposta correta, o usuário pode verificar a resposta clicando em ‘Verifique sua resposta’. Em todas as demais perguntas que serão apresentadas nesse capítulo, utilizamos essa ferramenta disponibilizada pelo GeoGebraBook.

Após isso, estão disponibilizados em PDF a situação-problema (Apêndice L), o material para o professor (Apêndice M) sobre algumas considerações da atividade e a situação-problema generalizada (Apêndice N). Ainda, são apresentados os três links para baixar os aplicativos que podem ser úteis na resolução do problema. Na tela os links aparecerem como ilustra a Figura 26.

Figura 26 – Links para baixar os aplicativos presentes no item 4.1

Atividade 01 - primeiro momento

Atividade 01 - segundo momento

Atividade 01 - refutações

Fonte: a autora

A outra situação-problema experimentada, ‘4.2 Volume máximo da caixa’, também inicia apresentando público-alvo, objetivo e então a situação-problema:

Público alvo: Ensino Médio ou Superior.

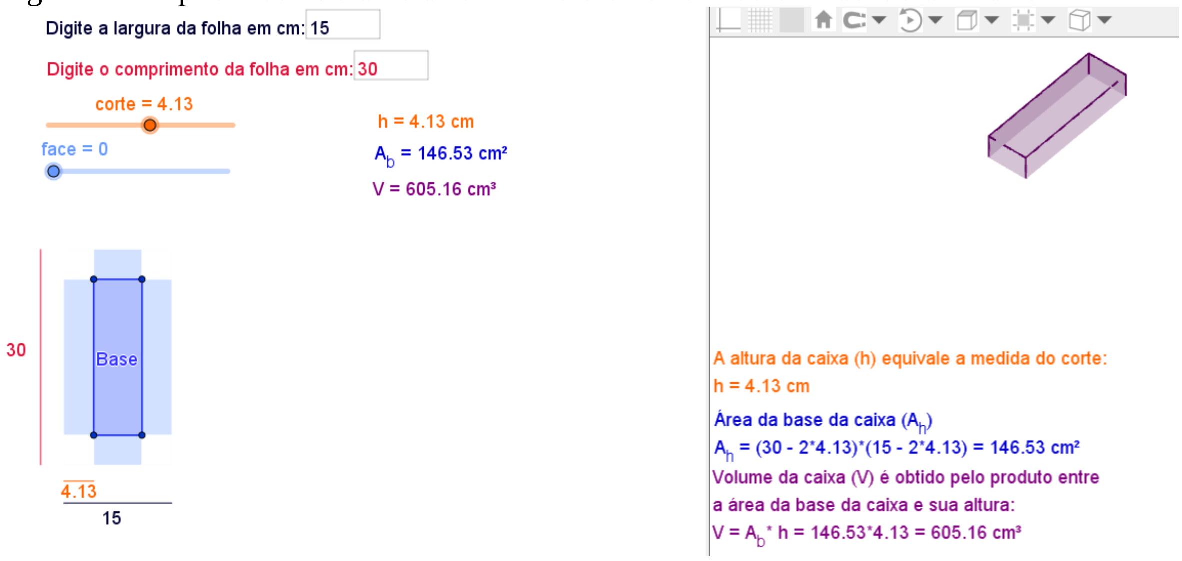
Objetivo: Abordar um problema de otimização envolvendo a aplicação de uma função cúbica utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

Situação-problema:

> Dada uma folha retangular, construa uma caixa, sem tampa, cujo volume seja máximo. Construa essa caixa, usando as dimensões da folha retangular dada, após serem cortados quadrados dos cantos dessa folha, conforme apresenta o aplicativo 'Volume da caixa'.
> Sendo assim, quais devem ser as dimensões da caixa para que o seu volume seja o maior possível? Qual o valor desse volume?

Aplicativo: O Aplicativo ‘Volume da caixa’ foi criado de modo que ajudasse na compreensão do problema e a criar conjeturas. A Figura 27 ilustra esse aplicativo.

Figura 27 – Aplicativo ‘Volume da caixa’ referente ao Problema do Voluma da caixa



Fonte: adaptado de Dantas (2015)

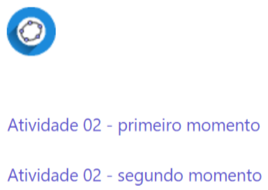
Perguntas:

- Se o tamanho do corte fosse 5 cm, qual seria a área da base da caixa? E o volume dessa caixa? E se fosse 2 cm? (Analise no aplicativo 'Volume da casa'). Quais os cálculos realizados para verificar esses valores?
- Existe alguma dependência entre a medida do lado do quadrado (corte) e as medidas da caixa? (Analise pelo aplicativo 'Volume da casa')
- Que função descreve a área da base da caixa? E a função volume?
- Qual o volume máximo?

Após isso, estão disponibilizados em PDF a situação-problema (Apêndice O), o material para o professor (Apêndice P) que descreve algumas considerações sobre a situação, e a situação-problema generalizada (Apêndice Q).

Além disso, estão disponíveis os links para baixar os aplicativos citados no Apêndice P. Na tela os links aparecerem como ilustra a Figura 28.

Figura 28 - Links para baixar os aplicativos presentes no item 4.2



Fonte: a autora

Nos demais itens desse capítulo estão apresentados todas as outras sequências didáticas.

Capítulo 5: “Algumas considerações e perspectivas”. São apresentadas algumas considerações e perspectivas sobre o Caderno Didático.

Capítulo 6: "Manuais e Links". Esse capítulo é dividido em dois itens: 6.1 Manuais do Produto/GeoGebra e 6.2 Links do Caderno Didático. O 6.1 apresenta um PDF com as principais ferramentas e comandos necessários para manusear o Produto Educacional no GeoGebraBook, e outros materiais que servem como manual. O 6.2 apresenta o link de todos os aplicativos apresentados ao longo do Produto Educacional.

Capítulo 7: "Deixe sua opinião". Esse capítulo serve para que os usuários possam deixar suas opiniões que poderão servir como melhorias ao Caderno Didático. Essa ideia de o usuário poder registrar sua opinião, foi adaptada de Lemke (2017).

Capítulo 8: "Referências". Por fim, são apresentadas as referências utilizadas no Caderno Didático.

De maneira sucinta esse é o produto desenvolvido para compor essa dissertação. Os aplicativos desenvolvidos estão listados no Quadro 10 e também apresentados no capítulo 6.

Quadro 10 – Apresentação dos links dos aplicativos desenvolvidos

Nome	**Disponível em:**
Reta Tangente a Curva	https://ggbm.at/A9HZEWpe
Analisando o coeficiente angular da reta tangente	https://ggbm.at/gSdmff6D
Analisando o gráfico da função derivada	https://ggbm.at/ajnmAxWR
Ensino Médio: Derivada e ponto de Máximo ou Mínimo	https://ggbm.at/gxCJCVvk
Teorema de Bolzano: encontrando raízes reais	https://ggbm.at/XtbtZ2as
Teste da Primeira Derivada - Máximos e Mínimos	https://ggbm.at/zkEUJGvZ
Simulações com o Teste da Primeira Derivada	https://ggbm.at/VeEWFWM4
Teste da Segunda Derivada - Concavidade - Máximo e Mínimos	https://ggbm.at/veZTcyeM
Simulações com Teste da Segunda Derivada	https://ggbm.at/XKKwp495
Área máxima da casa	https://ggbm.at/BSeh8kqS
Área máxima da casa - resolução	https://ggbm.at/EsWSPnrb
Área máxima da casa - refutações	https://ggbm.at/kshPWRaZ
Volume máximo da caixa	https://ggbm.at/tn7rmsgu
Volume máximo da caixa - resolução	https://ggbm.at/gTZBH6hV
Área de figuras usando barbante	https://ggbm.at/fKQfaZuE
Área de figuras usando barbante - resolução	https://ggbm.at/DcpzJXEw
Capacidade máxima da calha - seção retangular	https://ggbm.at/hPT5szHP

Capacidade máxima da calha -seção retangular - resolução	https://ggbm.at/tjfD4JPU
Capacidade máxima da calha - seção triangular	https://ggbm.at/QP2barJF
Capacidade máxima da calha - seção triangular - resolução	https://ggbm.at/MQcQ26sR
Capacidade máxima da calha - seção trapezoidal	https://ggbm.at/Xg6UwAjf
Capacidade máxima da calha - seção trapezoidal - resolução	https://ggbm.at/amZjMwwD
Capacidade máxima da calha - seção semicircular	https://ggbm.at/rszbmzjc
Capacidade máxima da calha – seção semicircular – resolução	https://ggbm.at/shfakpay
Capacidade máxima da calha - seção retângulo-circular	https://ggbm.at/YKscxk6E
Capacidade máxima da calha - seção retângulo-circular - resolução	https://ggbm.at/N8fKHXrm

Fonte: a autora

6 CONSIDERAÇÕES

A resolução de problemas e a tecnologia, mesmo que quando não trabalhadas juntas, vem ganhando destaque em pesquisas no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. Com esse trabalho percebemos que quando conciliadas podem fortalecer o ensino e a aprendizagem de Máximos e Mínimos de Funções, visto que priorizam o uso dinâmico de alguns conceitos enquanto ampliam as estratégias de resolução. Nas experimentações realizadas os grupos utilizavam o(s) aplicativo(s) desenvolvido(s) em quase todos os momentos. O aplicativo parece ter dado maior segurança aos grupos, como um guia de suas estratégias, verificador de respostas e facilitador na compreensão do problema.

Trabalhamos a tecnologia na resolução de problemas como um meio do professor proporcionar a aprendizagem de determinado conteúdo, de modo que instigue o aluno a buscar compreendê-lo através de uma situação-problema. E então, paralelo a isso, possibilitar que o aluno, durante a resolução, crie conjecturas, investigue hipóteses, visualize conceitos e analise comportamento de funções, para que com isso desenvolva um conhecimento intuitivo sobre determinados conceitos.

Nosso Caderno Didático, criado como um Produto Educacional, foi desenvolvido para professores e alunos de CDI e/ou do Ensino Médio. Além de poder contribuir com o ensino e aprendizagem de Máximos e Mínimos desses níveis, buscamos de alguma maneira evidenciar a relação entre esses dois mundos de ensino, que para muitos são distintos, enquanto que na verdade se completam e se relacionam continuamente. Nesse viés, algumas das sequências didáticas podem ser utilizadas nos dois níveis de ensino.

As experimentações realizadas durante o desenvolver deste trabalho contribuíram com melhorias importantes para o caderno. Uma das principais adaptações foi a de apresentar dinamicamente os valores de área, medidas, volume, etc, seguido disso, foram as conexões com as cores entre diferentes registros de representações (gráfico, algébrico e/ou figura) e as perguntas apresentadas ao longo da sequência didática. As experimentações foram realizadas utilizando apenas duas das atividades desenvolvidas, e as contribuições advindas dessas, serviram como base para as demais atividades implementadas.

Mesmo as experimentações serem realizadas em níveis diferentes de ensino, alguns elementos analisados foram constatados nas três experimentações. Em relação as dificuldades dos alunos, uma das maiores, foi representar algebricamente as restrições impostas pelo Problema 1 – Área da casa. Uma falha cometida por quase todos os grupos, foi a falta de formalidade matemática, principalmente na restrição do domínio da(s) função(ões). Essa falha é ainda mais preocupante quando nos referenciamos aos (futuros) professores. Outro fator também identificado nas análises, foi que a maioria dos grupos tomaram como base algum conhecimento prévio, que possibilitou ampliar as estratégias de resolução. Conceitos de Geometria estiveram bastante presentes principalmente nas estratégias do curso de CDI e do Mestrado. A ideia de ponto médio foi apresentada por vários grupos dessas turmas.

Em relação a atuação do professor, foi possível verificar diferentes dificuldades durante cada experimentação. Na turma do Ensino Médio, a professora regente teve imprevisto com a tecnologia, mas que pôde ser resolvido parcialmente, já que alguns dos alunos portavam seus próprios notebooks. Na turma do Mestrado, a professora, também autora desse trabalho, verificou que houve pouco comprometimento dos alunos com a lista de problemas proposta. Alguns alunos pareceram usar como base a resolução do colega, o que fez com que erros cometidos por esse fossem repetidos pelos demais. Na turma da Graduação, inicialmente percebeu-se que nem todos os alunos estavam satisfeitos com a ideia de formarem grupos, tanto que um aluno optou por realizar a atividade individualmente. Enquanto a professora e autora observava e incentivava, foi percebido um pouco de timidez e recusa vinda da maioria dos grupos, dificultando a abordagem da professora. E além disso, outra dificuldade percebida foi a rejeição da maioria dos grupos dessa turma quando a professora solicitou que participassem da plenária, inclusive, houve grupos que optaram por não participar, o que pode inibir dados de pesquisa relacionados a aprendizagem dos alunos. Além das dificuldades apresentadas para cada turma, um fator relevante em todas as experimentações foi o tempo. Na concepção da autora, em relação a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação, é interessante que ao menos as etapas de 1 à 5 sejam realizadas em um mesmo dia de aula. Todavia, isso nem sempre é possível. Nas experimentações, percebemos que alguns grupos se sentiram prejudicados pelo limite de tempo.

O Caderno Didático contempla um manual com as instruções básicas para seu manuseio, criado pela autora, e outros links com diferentes instruções referente as ferramentas do GeoGebra. O professor ao utilizar o Caderno Didático, pode tomar como base as sugestões realizadas no Material para o Professor na preparação de sua aula. Esses materiais foram desenvolvidos para colaborar inclusive com os professores iniciantes no uso de tecnologias em sala, servindo como guia e facilitador nas possíveis experimentações. Assim, mesmo os professores com maiores dificuldades em utilizar a tecnologia, podem usufruir do caderno com mais facilidade e sem apreensão.

O produto não é algo fechado e obstruído de modificações. No Caderno Didático deixamos um capítulo destinado aos usuários que queiram fornecer sugestões de melhorias ao caderno. Aos professores que experimentarem as atividades propostas no caderno didático e que queiram compartilhar as experiências podem também fazer por meio desse tópico. As sugestões e contribuições são elementos importantes da evolução do produto proposto. Em virtude do tempo de desenvolvimento deste produto não foi possível aplicar todas as atividades propostas nele. Acreditamos que novas experimentações, em novas turmas, tanto do Ensino Superior quanto do Ensino Médio, poderão trazer sugestões de melhorias advindas dos relatos de experiência dos professores e alunos.

Vale ressaltar que para os professores com pouco acesso à tecnologia na sua escola ou universidade, podem utilizar os aplicativos apresentados no caderno através de um smartphone, o qual aumenta a chance dos alunos portarem.

Durante o desenvolvimento dessa dissertação e do Produto Educacional, ampliei meus conhecimentos sobre conceitos de CDI, a otimização presente no Ensino Médio, e ainda, habilidades com as ferramentas do software GeoGebra. Ao buscar apresentar de uma maneira dinâmica conceitos e situações-problema de máximos e mínimos, aprendi a ter outra visão quando me deparo com um problema. A possibilidade de verificar algo dinâmico, e que muitas vezes é tratado de maneira estática, fornece uma maior capacidade de resolução e compreensão. Na situação-problema da calha isso foi bastante evidente. A possibilidade de manusear e visualizar dinamicamente e obter instantaneamente respectivos valores de área, volume e medidas, rompe com incertezas e hipóteses iniciais, dando oportunidade de perceber a importância em utilizar a Matemática na comprovação de resultados.

Esse trabalho pode potencializar o trabalho do professor dando possibilidades de colaborar com conteúdo de Otimização de Funções, tanto na maneira de ensinar, utilizando uma abordagem dinâmica, e avaliar os alunos constantemente e principalmente durante a plenária. As sequências didáticas podem ser utilizadas tanto nas aulas regulares, como atividade extraclasse.

Aqui trago algumas considerações e potencialidades em utilizar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pela tecnologia na Otimização de Funções, e me questiono o quanto poderia ser proveitoso se o caderno comportasse uma maior dimensão de conceitos de CDI. Sugerimos então, que o caderno seja implementado com outros conceitos tanto de derivadas, como limites e integrais, além da proposição de novas situações-problema sobre Máximos e Mínimos de Funções.

Esperamos que esse trabalho possa contribuir com ensino e aprendizagem de Otimização de Funções, e fomente o interesse em implantar a tecnologia na sala de aula, com o viés de possibilitar aos alunos manusear e visualizar conceitos dinâmicos.

REFERÊNCIAS

ABDELMALACK, Andrea. **O Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Derivada para o Curso de Engenharia Através da Resolução de Problemas**. Dissertação (Mestrado), Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2011, 175 f.

ALLEVATO, Norma S. Gomes. **Associando o computador à resolução de problemas fechados**: análise de uma experiência. Tese de Doutorado em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP, 2005, 378 f.

ALLEVATO, Norma S. Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensinando Matemática Na Sala De Aula Através Da Resolução De Problemas. **ICME11-11º Congresso Internacional de Educação Matemática**. 2008.

ALLEVATO, Norma S. Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas?. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTILIN, Andressa Maria. **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p. 35 – 52.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; JAHN, Ana Paula; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. O computador no ensino e aprendizagem de Matemática: reflexões sob a perspectiva da resolução de problemas. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; LEAL JR, Luiz Carlos; PIRONEL, Márcio. **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

ALMEIDA, Conceição; VISEU, Floriano. Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. **Revista Portuguesa de Educação,** Braga - Portugal, v. 15, n. 1, 2002, p.193-219.

ARAÚJO, Luis Cláudio Lopes; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. Explorando Tópicos de Matemática do Ensino Fundamental e Médio Através do GeoGebra. **IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática**, Rio de Janeiro, 2008. Disponível em: http://www.limc.ufrj.br/htem4/papers/60.pdf. Acessado em: 10 de fevereiro de 2017.

ÁVILA, Geraldo. O Ensino de Cálculo no 2º grau. **Revisa do Professor de Matemática.** N.18, 1991. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/18/1.htm> Acesso em: 26 jan. 2018.

AZEVEDO, Elizabeth Quirino. **O Processo De Ensino-Aprendizagem-Avaliação De Matemática Através Da Resolução De Problemas No Contexto Da Formação Inicial Do Professor De Matemática**. Tese (Doutorado). Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro, 2014.

BEZERRA, Adriana da Sailva Veloso. **Conceito e representações de função via resolução, proposição e exploração de problemas:** um trabalho com alunos de graduação. 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Coleção Ciências da Educação**. Traduzido por Maria

João Avarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Editora: Porto Editora, 1994, 167 f.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Maria Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 3 ed. 2007, 100 f. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAhCCwAB/livro-informatica-educacao-matematica-completo>. Acessado em: 18 de fevereiro de 2018.

BRANDÃO, Leônidas de Oliveira; ISOTANI, Seiji. Uma ferramenta para ensino de Geometria Dinâmica na Internet: iGeom. **IX Workshop em Informática na Educação (WIE)**. Instituto Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo (USP). 2003.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM)**. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. 2000, 141 f.

BRAVIANO, Gilson; RODRIGUES, Maria Helena Wyllie Lacerda. Geometria Dinâmica: Uma Nova Geometria?, **RPM: Revista Do Professor De Matemática**, n. 49, p 22-26, SBM, 2002.

CABRAL, Joana F. Oliveira. **Problemas de otimização no contexto das derivadas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade de Lisboa, Lisboa. 2015, 277 f.

CABRAL, Tânia Cristina Baptista. **Contribuições da psicanálise à educação matemática**: a lógica da intervenção nos processos de aprendizagem. Tese (Doutorado). São Paulo: USP,1998.

CARDOSO, Dienifer Tainara. **Teorema Fundamental do Cálculo**: uma abordagem dinâmica. Monografia (Graduação). Universidade do Estado de Santa Catarina. 2016, 132 f.

CONEXÕES COM A MATEMÁTICA / obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; Editor responsável Fábio Martins de Leonardo. V. 2, 3. ed., São Paulo: Moderna, 2016.

DALL'ANESE, Claudio. **Conceito de Derivada:** uma proposta para seu ensino e aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000, 140 f.

DANTAS, Sérgio. **Estudo do volume máximo de uma caixa**. 2015. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/Z2k8KRSy. Acessado em: 30 mai. de 2018.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. v. 1. 3 ed. São Paulo: Ática, 2004.

DANTE, Luiz Roberto**. Matemática**: ensino médio. v. único, 1. ed., São Paulo: Ática, 2005.

DIKOVIC, Ljubica. Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level. **ComSIS**. V. 6, n. 2, 2009, p. 191- 203.

DOMÈNECH, Núria Iranzo. **Influence of dynamic geometry software on plane geometry problem solving strategies**. Tese (Doutorado). Departamento de Didática da

Matemática e das Ciências Experimentais – Universidade Autônoma de Barcelona, 2009, 234 f.

DUVAL, Raymond. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Traduzido por Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática.** V. 7, n. 1, 2012a, p. 97 – 117.

DUVAL, Raymond. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. Traduzido por Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática.** Florianópolis. V.11, n.2, 2016, p. 1-78.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Traduzido por Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis. V. 7, n. 2, 2012b, p. 266-297.

DUVAL, Raymond. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silva Dias Ancântara. (Org.) Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. 8 ed. Editora Papirus, Campinas, São Paulo, 2013.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Traduzido por Lênio Fernandes Levy e marisa Rosâni Abreu da Silveira. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2009.

DUVAL, Raymond. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática,** Campo Mourão, v. 2, n. 3, 2013, p.10-34. Entrevista concedida a José Luiz Magalhães Freitas e Veridiana Rezende.

GONÇALVES, José Lafayette de Oliveira. Raciocínio heurístico e a resolução de problemas. **REUNI – Revista Unijales**. 1 ed, n. 1, 2006.

HITT ESPINOSA, Fernando. Researching a problem of convergence with mathematica: historyand visualisation of a mathematical idea. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,** p. 697-706, 1997.

HOFFMANN, Laurence D; BRADLEY, Gerald L. **Cálculo**: um curso moderno e suas aplicações**.** 7ª ed. Rio de Janeiro: LTC. 2002.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar**. 3 ed. São Paulo. Editora Atual, v. 1. 1977.

LEMKE, Raiane. **Funções Reais De Duas Variáveis E Geogebra:** um livro dinâmico para o ensino de Cálculo. Dissertação (Mestrado). Universidade do Estado de Santa Catarina. 2017, 183 f.

LEMKE, Raiane. **F2V:** recursos dinâmicos para Cálculo. Disponível em: < https://ggbm.at/GdZ9wzW8>. Acesso em 01 jun. 2018.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua**. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1990. (Coleção educação contemporânea; 59).

MACHADO, Nilson José. **Cálculo Diferencial e Integral na Escola Básica***:* possível e necessário. São Paulo: USP, 2008. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20080311.pdf>. Acesso em 27 jan. 2018.

MARIN, Douglas; PENTEADO, Miriam Godoy. Professores que utilizam tecnologia de informação e comunicação para ensinar Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 3, 2011, p. 527-546.

MENINO, Fernanda dos Santos; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. O problema da calha e o uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas nos cursos de Engenharia. In: ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; JUNIOR, Luiz Carlos Leal; PIRONEL, Márcio. (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo, Ed. Livraria da Física, 2017.

MENK, Leonor Farcic Fic. **Contribuições De Um Software De Geometria Dinâmica Na Exploração De Problemas De Máximos E Mínimos**. Dissertação (Mestrado) Universidade Estadual de Londrina, 2005, 269 f. Disponível em: http://www.uel.br/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/Leonor_Menk.pdf. Acessado em: 18 de fevereiro de 2018.

MENK, Leonor Farcic Fic; PÓLA, Marie Claire R. Póla; BARBOSA, Sandra Malta. Resoluçãode Problemas de Cálculo Diferencial Integral, Aplicados à Engenharia, Usando Múltiplas Representações e Software de Geometria Dinâmica. **XXXIII – Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**. 2005.

MORAIS, Rosilda dos Santos; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Uma abordagem histórica da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTILIN, Andressa Maria. **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

NUMER, Francine Mirele; JUSTO, Adriano Rizzotto. Problemas de máximos e mínimos com o auxílio do software GeoGebra e conhecimento de derivadas. **Curso de Especialização em Matemática, Midias Digitais e Didática para a Educação Básica oferecido pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática**. Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2015.

NUNES, Célia Barros. **Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas:** perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010. 430 f.

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de; RAAD, Marcos Ribeiro. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo**. Boletim GEPEM**. n 61, 2012, p. 125–137.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos?. **Revista Espaço Pedagógico** – Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, v. 20, n. 1, 2013, p. 88-104.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.(org.). **Pesquisa em Educação Matemática.** São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199-220.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO Norma Suely Gomes. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. **Educação Matemática: pesquisa em movimento** / Maria Aparecida Viggiani Bicudo, Marcelo de Carvalho Borba. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema,** São Paulo, v. 25, n. 41, 2011, p. 73-98.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTILIN, Andressa Maria. **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; MORAIS, Rosilda dos Santos. Resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.15, n.3, 2013, p. 671-691.

PAGANI, Erica Marlucia Leite. **O ensino-aprendizagem-avaliação de derivadas no curso técnico integrado ao Médio através da Resolução de Problemas**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul – UNICSUL. 2016.

PAIVA, Manoel. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2005.

PATERLINI, Roberto Ribeiro. O problema do retângulo inscrito. Sociedade Brasileira de Matemática. **Revista do Professor de Matemática**, n. 47, UFSCar São Paulo. 2001.

PEREIRA, Vinicius Mendes Couto. **Cálculo no Ensino Médio:** Uma Proposta para o Problema da Variabilidade. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ. 2009, 183 f.

PEREIRA, Ana M. G. Gonçalves. **Problemas de otimização matemática no estudo das derivadas numa turma do 12º ano de escolaridade**. Relatório de estágio de mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário. Universidade do Minho. 2014.

PJANIC, Karmelita; LIDAN, Edin; KURTANOVIC, Admir. Visualization of relationship between a function and its derivative. **Eğitim Bilimleri Araştırmaları Dergisi - Journal of Educational Sciences Research**, v. 5, n.1, 2015, p. 205–213.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. George Polya. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2 ed., 1995, 196 f.

PROENÇA, Marcelo Carlos. **A resolução de problemas na licenciatura em Matemática**: análise de um processo de formação no contexto do estágio curricular supervisionado. Tese (Doutorado). Universidade Estadual Paulista. Bauru, 2012, 208 f.

REZENDE, Wanderley Moura. **O Ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. Tese (Doutorado em Educação na área de Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003, 450 f.

RICHIT, Adriana. Interfaces entre as tecnologias digitais e a resolução de problemas na perspectiva da educação matemática. **REMATEC – Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Cultura Matemática e suas Epistemologias na Educação Matemática, n. 21, 2016, p. 109-122.

RICHIT, Andriceli. **Aspectos Conceituais e Instrumentais do Conhecimento da Prática do Professor de Cálculo Diferencial e Integral no Contexto das Tecnologias Digitais**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, São Paulo, 2010, 243 f.

RICHIT, Andriceli; BENITES, Vanessa Cerignoni; ESCHER, Marco Antonio; MISKULIN, Rosana G. Sguerra. Contribuições do software GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia. **1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra**. São Paulo, 2012, p. 90-99.

SBEM. A formação do professor de Matemática nos cursos de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária. *Boletim Informativo*, n.21, 43p, 2013. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/Boletim21.pdf>. Acesso em: 26 jan. 2018.

SCHROEDER, Thomas L.; LESTER JUNIOR, Frank K. Developing Understanging in Mathematics via Problem Solving. In: P. R. Trafton (Ed.) New Directions for Elementar School Mathematics. **National Conuncil of Teachers os Mathematics**, Reston, NCTM, 1989, p. 31-42.

SILVA, Fernanda Laureano. **Matemática & Educação**: Uma proposta pedagógica no ensino do Cálculo. Monografia (Especialização) - Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Federal de Minas Gerais. Departamento de Matemática. 2010, 57 p.

SILVA, Jóse Roberto Damasceno. **Um estudo de registros de representação semiótica na aprendizagem dos conceitos de máximos e mínimos de funções**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2005, 120 f.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. Matemática Ensino Médio. v. 3, 8. ed., São Paulo: Saraiva, 2013.

STEWART, James. ***Cálculo*****.** Vol 1. 6ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

TALL, David. Intuition and rigour :the role of visualization in the calculus. Visualization in Mathematics. **Zimmermann & Cunningham**.n *19*, 1991, p. 105–119.

TALL, David. **Students' Difficulties in Calculus.** ICME - Québec, Canada, 1992.

TALL, David; SMITH, David; PIEZ, Cynthia. Technology and Calculus. **Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics**, v. 1, 2008, p. 207-258.

TRAVASSOS, Maria Lúcia Galvão Leite; ARAIUM, Raquel; MORAIS, Rosilda dos Santos; SOUZA, Tatiane da Cunha Puti. Números e Operações. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTILIN, Andressa Maria. **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

UDESC. Plano de Ensino: Cálculo Diferencial e Integral. NÉ, Adriano Luiz dos Santos. **Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC**. 2014. Disponível em:

<http://www.matematica.joinville.udesc.br/files/planos_de_ensino/2014-2/2/Plano%20de%20ensino%202014-2%20CDI1001.pdf> Acessado em: 20 de julho de 2017.

UDESC. Plano de Ensino: Engenharia de Produção. **Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC**. 2002. Disponível em: <http://www.cct.udesc.br/arquivos/id_submenu/317/ppc_eps.pdf> Acessado em: 28 de mai. 2018.

UNESP. Plano de Ensino: Cálculo Diferencial e Integral. **Universidade Estadual Paulista – Unesp**. 2011. Disponível em: <http://www.feb.unesp.br/Home/Departamentos343/EngenhariaMecanica/planos-1ano.pdf> Acessado em: 20 de julho de 2017.

USP. Plano de Ensino: Cálculo I. **Universidade de São Paulo - USP.** 2017. Disponível em: <https://uspdigital.usp.br/jupiterweb/jupDisciplina?sgldis=SMA0353&codcur=18023&codhab=0> Acessado em: 20 de julho de 2017.

VALE, Isabel. Resolução de Problema um tema em continua discussão: vantagens das resoluções visuais. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; LEAL JR, Luiz Carlos; PIRONEL, Márcio. **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

VAN DE WALLE, John. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre*:* Artmed, 2009, 584 f.

VAZ, Francieli Aparecida; GOMES, Ana Paula Falcão. Resolução de Problemas matemáticos: desafios da Graduação. **XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul**, Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé-RS, 2014.

APÊNDICES

APÊNDICE A – ENTREVISTA PRÉ-EXPERIMENTAÇÃO COM O PROFESSOR REGENTE DA TURMA DA PÓS-GRADUAÇÃO

Etapa 2 – Entrevista pré-experimentação com professor da Pós-Graduação

Perguntas:

Bloco I

1) Qual o nome completo do professor?

2) Qual o nome do curso e a disciplina lecionada?

3) Qual o número e bloco da sala utilizada frequentemente? Que tipo de equipamentos tem essa sala (como: quadro, computador, televisão)? Tem algum laboratório de informática que o professor costuma utilizar no horário da aula? (o objetivo é apenas se adequar ao ambiente que será desenvolvida a aplicação e verificar a necessidade de reservar laboratório).

4) Quantas vezes já lecionou essa disciplina? (o objetivo dessa pergunta é saber se depois da aplicação, com os resultados obtidos, é possível comparar a experiência do professor, com as turmas anteriores, e o resultado obtido na aplicação)

5) Quantos alunos estão frequentando atualmente a disciplina?

Bloco II

6) Qual é o objetivo da disciplina?

7) Qual a metodologia de ensino utilizada pelo professor?

8) Já foi discutido em sala sobre a metodologia ou método de resolução de problemas? (tem como objetivo saber se a turma conhece a metodologia que será utilizada)

9) O professor já utilizou o método de resolução de problemas de Polya, ou a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Onuchic em alguma de suas aulas? Se sim, utilizou com alguma turma anterior a essa, ou em alguma outra disciplina que leciona(ou)? Comente a experiência em relação ao ensino e a aprendizagem da turma. (o objetivo é complementar as duas perguntas anteriores, bem como, saber se o professor se sente confortável com essa metodologia)

10) Quais os materiais didáticos que utiliza para lecionar a disciplina? O professor utiliza listas de exercícios? Utiliza algum software de geometria dinâmica para explorar alguns conceitos? Os alunos já utilizaram o GeoGebra para desenvolver alguma atividade? (o objetivo é saber se os alunos poderão ter dificuldades quanto ao uso do GeoGebra durante a aplicação)

11) Quais os conteúdos estudados até o momento? Já foi discutido sobre funções quadráticas? E aplicações de funções quadráticas? (Quais)(o objetivo é verificar se foi ou não estudado o conteúdo de funções quadráticas e otimização, para saber qual resolução de problemas é a mais adequada – Polya, caso já tenham visto o conteúdo, ou Onuchic, caso ainda não tenham estudado).

12) Como foram abordadas as aplicações de funções? (o objetivo é saber se foi lecionado tradicionalmente, em forma de apresentação de trabalho por algum grupo ou utilizando alguma metodologia diferenciada)

APÊNDICE B – ENTREVISTA PRÉ-EXPERIMENTAÇÃO COM O PROFESSOR REGENTE DA TURMA DA GRADUAÇÃO

Etapa 2 – Entrevista pré-experimentação com professor de Cálculo

Perguntas:

Bloco I

1) Qual o nome completo do professor?

2) Qual o nome do(s) curso(s) e a disciplina lecionada?

3) Qual o número e bloco da sala utilizada frequentemente? Que tipo de equipamentos tem essa sala (como: quadro, computador, televisão)? Tem algum laboratório de informática que o professor costuma utilizar no horário da aula? (o objetivo é apenas se adequar ao ambiente que será desenvolvida a aplicação e verificar a necessidade de reservar laboratório).

4) Quantas vezes já lecionou essa disciplina? (o objetivo dessa pergunta é saber se depois da aplicação, com os resultados obtidos, é possível comparar a experiência do professor, com as turmas anteriores, e o resultado obtido na aplicação)

5) Quantos alunos estão frequentando atualmente a disciplina?

Bloco II

6) Qual é o objetivo da disciplina?

7) Qual a metodologia de ensino utilizada pelo professor?

8) Já foi discutido em sala sobre a metodologia ou método de resolução de problemas? (tem como objetivo saber se a turma conhece a metodologia que será utilizada)

9) O professor já utilizou o método de resolução de problemas de Polya, ou a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Onuchic em alguma de suas aulas? Se sim, utilizou com alguma turma anterior a essa, ou em alguma outra disciplina que leciona(ou)? Comente a experiência em relação ao ensino e a aprendizagem da turma. (o objetivo é complementar as duas perguntas anteriores, bem como, saber se o professor se sente confortável com essa metodologia)

10) Quais os materiais didáticos que utiliza para lecionar a disciplina? O professor utiliza listas de exercícios? Utiliza algum software de geometria dinâmica para explorar alguns conceitos? Os alunos já utilizaram o GeoGebra para desenvolver alguma atividade? (o objetivo é saber se os alunos poderão ter dificuldades quanto ao uso do GeoGebra durante a aplicação)

11) Quais os conteúdos estudados até o momento? Já foi discutido sobre otimização? (o objetivo é verificar se foi ou não estudado o conteúdo de otimização, para saber qual resolução de problemas é a mais adequada – Polya, caso já tenham visto o conteúdo, ou Onuchic, caso ainda não tenham estudado).

12) Como foram abordadas as aplicações? (o objetivo é saber se foi lecionado tradicionalmente, em forma de apresentação de trabalho por algum grupo ou utilizando alguma metodologia diferenciada)

APÊNDICE C – ENTREVISTA PÓS-EXPERIMENTAÇÃO COM O PROFESSOR REGENTE DA TURMA DA PÓS-GRADUAÇÃO

Etapa 6 – Entrevista pós-experimentação com professor

Perguntas:

Bloco I - Ensino

1) O que o professor constatou durante a etapa 5 da metodologia que é o momento em que o professor observa e incentiva? O professor fez muitas intervenções? Que tipo de consideração o professor fez em cada grupo? Disse a algum grupo que sua resolução estava incorreta? O objetivo é saber se a mediação do professor foi influenciadora em alguma resposta.

2) Qual a maior dificuldade/divergência, em relação a outras metodologias, que o professor teve enquanto aplicava a Resolução de Problemas?

3) Em sua formalização, conseguiu contemplar as diferentes estratégias apresentadas pelos alunos? Houve o uso da tecnologia? Comentar sobre suas escolhas.

4) Têm sugestões de melhoria para a sequência? Quais?

5) Aplicaria a sequência didática em outra turma?

Bloco II - Aprendizagem

6) O professor esperava que as estratégias de resolução fossem usando geometria e derivada? Quais outras estratégias esperava?

7) Percebeu motivação dos alunos em resolver o problema proposto comparado com aulas anteriores?

8) A tecnologia auxiliou na aprendizagem? De que forma?

APÊNDICE D – CARTA DE ANUÊNCIA

DECLARAÇÃO DA INSTITUIÇÃO PARTICIPANTE
CARTA DE ANUÊNCIA

Autorizamos a pesquisadora responsável Dienifer Tainara Cardoso, mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, na Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), orientada pela professora Dra. Ivanete Zuchi Siple, a realizar uma aplicação para a Dissertação de Mestrado nas dependências do Instituto Federal Catarinense – *Campus* Araquari (IFC – *Campus* Araquari), intitulada "Resolução de problemas e o software GeoGebra: uma abordagem a problemas de otimização" sendo esta a instituição coparticipante, motivo ao qual está sendo direcionada a carta de anuência.

Como mencionado anteriormente, a pesquisa será realizada nas dependências do IFC – *Campus* Araquari, onde a pesquisadora trabalha como docente atualmente, sendo este bem equipado e adequado para realização da pesquisa que necessitará de computadores e internet, além de quadro branco, caneta para quadro branco, etc.

Concordamos que os resultados desta pesquisa poderão ser apresentados por escritos e oralmente em banca de Dissertação, em exposição oral, congressos e revistas científicas.

Araquari, ___ de _______ de 2017.

Atenciosamente,

____
Coordenadora Geral do Ensino Técnico

APÊNDICE E – TERMO DE CONSENTIMENTO PARA TURMA DO ENSINO MÉDIO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) a participar de uma pesquisa, inserida no Trabalho de Pós-Graduação intitulado "*Resolução de problemas e o software GeoGebra: uma abordagem a problemas de otimização*" da acadêmica Dienifer Tainara Cardoso, respondendo a atividade que será proposta com o objetivo de introduzir o conteúdo de máximos e mínimos. A sua identidade será preservada, pois cada indivíduo será identificado por um número. Os benefícios e vantagens em participar desta pesquisa serão que os dados oriundos dela poderão substanciar ações de melhorias no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

As pessoas que estarão acompanhando o desenvolvimento desta pesquisa serão as professoras Dra. Ivanete Zuchi Siple e Dra. Elisandra Bar de Figueiredo.

Você poderá se retirar do estudo a qualquer momento.

Solicitamos a sua autorização para o uso das respostas das atividades realizadas nessa pesquisa para a produção do trabalho final de pós-graduação, de relatórios, de artigos técnicos e científicos. A sua privacidade será mantida por meio da não identificação do seu nome.

Agradecemos a sua participação e colaboração.
PESSOA PARA CONTATO:
Profa. Dra Ivanete Zuchi Siple
NÚMERO DO TELEFONE: 3481-7836
ENDEREÇO: Centro de Ciências Tecnológicas - CCT / Rua Paulo Malschitzki, 200 - Campus Universitário Prof. Avelino Marcante - Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC - Brasil - CEP: 89.219-710

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto. Declaro que fui informado que posso me retirar do estudo a qualquer momento.

Nome por extenso	Assinatura	Data
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

APÊNDICE F – TERMO DE CONSENTIMENTO ASSINADO PELOS PAIS DOS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

TERMO DE CONSENTIMENTO

O(a) seu(ua) filho(a)/dependente está sendo convidado a participar de uma pesquisa de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, intitulada: *Resolução de problemas e o software GeoGebra: uma abordagem a problemas de otimização*, tendo como objetivo analisar as soluções apresentadas nas atividades de Máximos e Mínimos aplicadas nas aulas de Matemática, da qual eu, Dienifer Tainara Cardoso, sou professora dele(a), com a concordância da Coordenadora Geral do Ensino Técnico Sra. Erica Perez Marson Bako, do Instituto Federal Catarinense – *Campus* Araquari.

O(a) seu(ua) filho(a)/dependente não terá despesas e nem será remunerado pela participação na pesquisa. Os riscos destes procedimentos são mínimos, havendo a possibilidade de cansaço para responder as atividades. Para minimizar estes riscos, as atividades serão realizadas em grupo em horário regular de aula.

A identidade do(a) seu(ua) filho(a)/dependente será preservada pois cada indivíduo será identificado por um número.

Os benefícios e vantagens em participar deste estudo serão teóricos e empíricos, pois permitirão conhecer e analisar os desafios encontrados nas estratégias de resolução de problemas das atividades de Máximos e Mínimos de Funções Polinomiais do Segundo Grau, podendo substanciar ações de melhorias no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

As pessoas que estarão acompanhando os procedimentos serão a estudante de mestrado Dienifer Tainara Cardoso, e as professores orientadoras Ivanete Zuchi Siple e Elisandra Bar de Figueiredo.

Solicitamos a sua autorização para o uso dos dados de do(a) seu(ua) filho(a)/dependente , como as resolução das atividades e da transcrição de áudios que serão/foram realizados em sala de aula para a produção de uma Dissertação de Mestrado. A privacidade do(a) seu(ua) filho(a)/dependente será mantida através da não-identificação do nome. O(a) senhor(a) poderá solicitar o não uso das transcrições dos áudios e resoluções das atividades do(a) seu(ua) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento, sem qualquer tipo de constrangimento.

Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e outra com o sujeito participante da pesquisa.

Mestranda Dienifer Tainara Cardoso Telefone: (47)3465-7837, Celular: (47)99612-5612 Endereço: Rua Rua Paulo Malschitzki, s/n Campus Universitário Prof. Avelino Marcante	Professora Ivanete Zuchi Siple Telefone: (47)4009-17836 Endereço: Rua Paulo Malschitzki, s/n Campus Universitário Prof. Avelino Marcante

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto e, que todos os dados a respeito do meu(minha) filho(a)/dependente serão sigilosos. E ainda, fui informado que posso retirar meu(minha) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento.

Nome por extenso

____

Assinatura ____________________________ Local: ___________________ Data: ____/____/____ .

APÊNDICE G – MATERIAL DE AULA PARA O ENSINO MÉDIO

Máximos e Mínimos de função

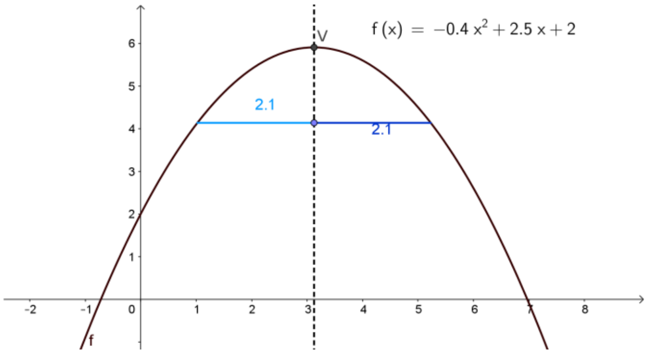
O vértice do gráfico da função quadrática:

Ao construir gráficos de funções quadráticas, você notou que, com exceção da ordenada y_v do vértice, cada imagem está associada a dois valores de x?

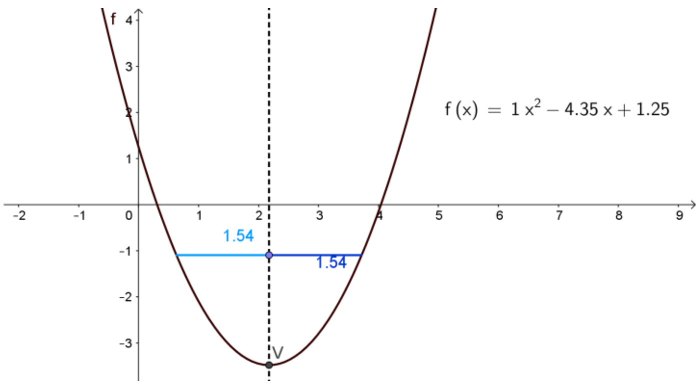
Na parábola, dois pontos de ordenadas iguais estão à mesma distância da reta perpendicular ao eixo que passa pelo vértice $V(x_v, y_v)$ dessa parábola. Essa reta é chamada de **eixo de simetria** e seus pontos são tais que $x = x_v$ qualquer que seja o valor de y.

Exemplos: (Ver também aplicativo do GeoGebra)

a)



b)



Mas como podemos encontrar o ponto V de cada parábola?

Perceba que $x_v = \frac{x_1+x_2}{2}$, em que x_1 e x_2 são raízes da equação do segundo grau.

Sabemos ainda que:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= -\frac{2b}{2a}$$

$$= -\frac{b}{a}$$

Assim, $x_v = \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{a} \div 2 = -\frac{b}{2a}$.

Ainda nos falta encontrar y_v. Para isso, basta substituirmos x_v na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, ou seja, calcular $f(x_v)$:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$= \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{2ab^2}{8a^2} - \frac{4ab^2}{8a^2} + c$$

$$= -\frac{2ab^2}{8a^2} + c$$

$$= -\frac{b^2}{4a} + c$$

$$= -\frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$= -\frac{\Delta}{4a}$$

Logo, o vértice $V(x_v, y_v)$ é dado por $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Ponto de máximo ou mínimo da função quadrática:

O valor de máximo ou de mínimo da função quadrática é a ordenada do vértice da parábola. Quando a concavidade da parábola é voltada para baixo, a função tem um valor máximo; caso contrário, tem um valor mínimo.

Exemplo 1: Atividade da área máxima da casa do José.

Exemplo 2: O lucro de uma empresa é dado pela lei $L(x) = -x^2 + 8x - 7$, em que x é quantidade vendida (em milhares de unidades) e L é o lucro (em milhares de reais).

a) Calcule a quantidade que se deve vender para obter lucro máximo.

b) Determine o lucro máximo.

APÊNDICE H – TERMO DE CONSENTIMENTO PARA A TURMA DA PÓS-GRADUAÇÃO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) a participar de uma pesquisa, inserida no Trabalho de Pós-Graduação intitulado "*Resolução de problemas e o software GeoGebra no ensino e aprendizagem de otimização de funções*" da acadêmica Dienifer Tainara Cardoso, respondendo a atividade que será proposta com o objetivo de abordar um problema de otimização envolvendo a aplicação de uma função quadrática utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problema mediada pelo software GeoGebra. A sua identidade será preservada, pois cada indivíduo será identificado por um número. Os benefícios e vantagens em participar desta pesquisa serão que os dados oriundos dela poderão substanciar ações de melhorias no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

As pessoas que estarão acompanhando o desenvolvimento desta pesquisa serão as professoras Dra. Ivanete Zuchi Siple e Dra. Elisandra Bar de Figueiredo.

Você poderá se retirar do estudo a qualquer momento.

Solicitamos a sua autorização para o uso das respostas das atividades realizadas e a transcrição do áudio gravado nessa pesquisa para a produção do trabalho final de pós-graduação, de relatórios, de artigos técnicos e científicos. A sua privacidade será mantida por meio da não identificação do seu nome.

Agradecemos a sua participação e colaboração.

PESSOA PARA CONTATO:

Profa. Dra Ivanete Zuchi Siple

NÚMERO DO TELEFONE: 3481-7836

ENDEREÇO: Centro de Ciências Tecnológicas - CCT / Rua Paulo Malschitzki, 200 - Campus Universitário Prof. Avelino Marcante - Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC - Brasil - CEP: 89.219-710

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto. Declaro que fui informado que posso me retirar do estudo a qualquer momento.

Nome por extenso	Assinatura	Data
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

APÊNDICE I – PROPOSIÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS PARA A TURMA DA PÓS-GRADUAÇÃO

***Fundamentos da Matemática* - Lista com problemas de otimização**

Acadêmico:

Problemas

1) Suponha que você queira cercar uma área retangular no seu terreno, com tela de arame, que será reservada a uma horta. Para economizar nessa construção, você aproveita um canto perpendicular do muro no seu terreno. Assim, apenas restam serem cercados dois lados para obter o espaço para a horta, porém você tem um orçamento de R$ 150,00 para investir na cerca da horta. Após realizar uma pesquisa num site de comparação de preços verifica-se que o menor preço da tela é aproximadamente R$ 18,20 por metro numa loja próxima de sua casa.

a) Represente geometricamente e algebricamente a função que descreve a variação da área da horta (utilize o GeoGebra para ajudar na investigação do seu problema).

b) Determine as dimensões da horta para que a sua área seja máxima.

2) A professora de joão propôs um trabalho para a turma dele no qual cada aluno deveria propor um problema usando os conhecimentos de funções. João pensou em explorar a construção de figuras geométricas que maximizam a área. Para a construção das figuras ele dispunha de um barbante de 10 metros de comprimento. Assim, ele pensou que com esse barbante ele poderia:

a) construir um quadrado;

b) construir uma circunferência;

c) cortar em dois pedaços (não necessariamente de mesmo tamanho) de modo que um dos pedaços fosse usado para construir um quadrado e o outro para construir uma circunferência.

Em qual situação joão conseguirá a área máxima? E a área mínima? Resolva o problema proposto por joão criticamente, apontando os conceitos envolvidos, as potencialidades/deficiências do problema e proponha uma adaptação.

(Arquivo GeoGebra: Problema 02 - barbante <https://ggbm.at/XBPbnxR2>)

3) Num voo com capacidade para 100 pessoas, uma companhia aérea cobra R$200,00 por pessoa quando todos os lugares são ocupados. Se existirem lugares não ocupados, ao preço de cada passagem será acrescida a importância de R$4,00 por cada lugar não ocupado. Sendo assim, responda:

a) Se todos os lugares estivessem ocupados, qual o faturamento obtido pela companhia?

b) Se o número de lugares não ocupados fosse 3, qual o faturamento obtido? E se fosse 10?

c) Escreva o problema matematicamente utilizando seu conhecimento sobre funções, argumente qual a função que descreve o faturamento da companhia aérea.

d) Represente a função que descreve o faturamento no GeoGebra interpretando os dados do problema.

e) Qual é o domínio da função?

f) Qual é o faturamento máximo da empresa e quando isso acontece?

APÊNDICE J – TERMO DE CONSENTIMENTO PARA A TURMA DA GRADUAÇÃO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) a participar de uma pesquisa, inserida no Trabalho de Pós-Graduação intitulado "*Resolução de problemas e o software GeoGebra no ensino e aprendizagem de otimização de funções*" da acadêmica Dienifer Tainara Cardoso, respondendo a atividade que será proposta com o objetivo de abordar problemas de máximos e mínimos envolvendo a aplicação de funções polinomiais utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas mediada pelo software GeoGebra. A sua identidade será preservada, pois cada indivíduo será identificado por um número. Os benefícios e vantagens em participar desta pesquisa serão que os dados oriundos dela poderão substanciar ações de melhorias no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

As pessoas que estarão acompanhando o desenvolvimento desta pesquisa serão as professoras Dra. Ivanete Zuchi Siple e Dra. Elisandra Bar de Figueiredo.

Você poderá se retirar do estudo a qualquer momento.

Solicitamos a sua autorização para o uso das respostas das atividades realizadas e a transcrição do áudio gravado nessa pesquisa para a produção do trabalho final de pós-graduação, de relatórios, de artigos técnicos e científicos. A sua privacidade será mantida por meio da não identificação do seu nome.

Agradecemos a sua participação e colaboração.
PESSOA PARA CONTATO:
Profa. Dra Ivanete Zuchi Siple
NÚMERO DO TELEFONE: 3481-7836
ENDEREÇO: Centro de Ciências Tecnológicas - CCT / Rua Paulo Malschitzki, 200 - Campus Universitário Prof. Avelino Marcante - Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC - Brasil - CEP: 89.219-710

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto. Declaro que fui informado que posso me retirar do estudo a qualquer momento.

Nome por extenso	Assinatura	Data
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

APÊNDICE K – PROPOSIÇÃO DE NOVOS PROBLEMAS PARA A TURMA DA GRADUAÇÃO

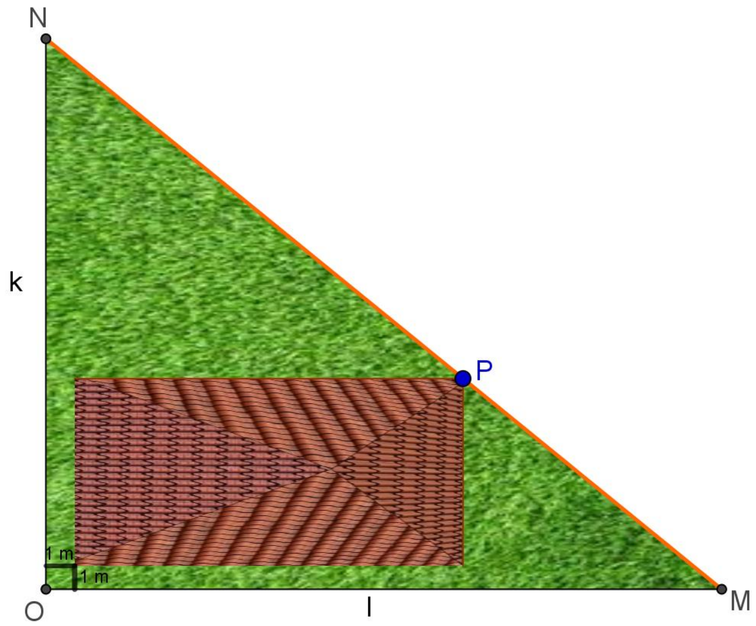
Cálculo Diferencial e Integral I

Lista com problemas de otimização

Acadêmico:
Problemas

1) Agora que você já resolveu o problema para a situação específica do caso de José, generalize-o considerando as mesmas restrições anteriores: o canto indicado pelo ponto P deve ficar sobre a lateral MN do terreno e ser um dos cantos da casa, e as laterais da casa, paralelas aos lados OM e ON do terreno, devem ficar a 1m de distância desses lados. A partir disso, considere agora que o lado ON vale k e o lado OM vale l, conforme Figura 2, e represente algebricamente o valor máximo da casa.

Figura 2 – Construção de casa retangular em terreno triangular qualquer



Fonte: Adaptada de Cardoso (2016)

2) Agora que você já resolveu o problema do volume da caixa para as medidas específicas, considere uma folha retangular de medidas a e b quaisquer. Recorte quadrados iguais dos cantos dessa folha. As abas que sobram são então dobradas para cima de modo a formar uma caixa sem tampa, como no problema já resolvido. A partir disso, generalize os cálculos de modo a representar algebricamente a função volume da caixa e as dimensões que maximizam o volume.

3) Suponha que você queira cercar uma área retangular no seu terreno, com tela de arame, que será reservada a uma horta. Para economizar nessa construção, você aproveita um canto perpendicular do muro no seu terreno. Assim, apenas restam serem cercados dois lados para obter o espaço para a horta, porém você tem um orçamento de R$ 150,00 para investir na cerca da horta. Após realizar uma pesquisa num site de comparação de

preços verifica-se que o menor preço da tela é aproximadamente R$ 18,20 por metro numa loja próxima de sua casa.

c) Represente geometricamente e algebricamente a função que descreve a variação da área da horta (utilize o GeoGebra para ajudar na investigação do seu problema).

d) Determine as dimensões da horta para que a sua área seja máxima.

4) A professora de joão propôs um trabalho para a turma dele no qual cada aluno deveria propor um problema usando os conhecimentos de funções. João pensou em explorar a construção de figuras geométricas que maximizam a área. Para a construção das figuras ele dispunha de um barbante de 10 metros de comprimento. Assim, ele pensou que com esse barbante ele poderia:

a) construir um quadrado;

b) construir uma circunferência;

c) cortar em dois pedaços (não necessariamente de mesmo tamanho) de modo que um dos pedaços fosse usado para construir um quadrado e o outro para construir uma circunferência.

Em qual situação joão conseguirá a área máxima? E a área mínima? Resolva o problema proposto por joão criticamente, apontando os conceitos envolvidos, as potencialidades/deficiências do problema e proponha uma adaptação.

(Arquivo GeoGebra: Problema 02 - barbante< https://ggbm.at/XBPbnxR2 >)

5) Num voo com capacidade para 100 pessoas, uma companhia aérea cobra R$200,00 por pessoa quando todos os lugares são ocupados. Se existirem lugares não ocupados, ao preço de cada passagem será acrescida a importância de R$4,00 por cada lugar não ocupado. Sendo assim, responda:

g) Se todos os lugares estivessem ocupados, qual o faturamento obtido pela companhia?

h) Se o número de lugares não ocupados fosse 3, qual o faturamento obtido? E se fosse 10?

i) Escreva o problema matematicamente utilizando seu conhecimento sobre funções, argumente qual a função que descreve o faturamento da companhia aérea.

j) Represente a função que descreve o faturamento no GeoGebra interpretando os dados do problema.

k) Qual é o domínio da função?

l) Qual é o faturamento máximo da empresa e quando isso acontece?

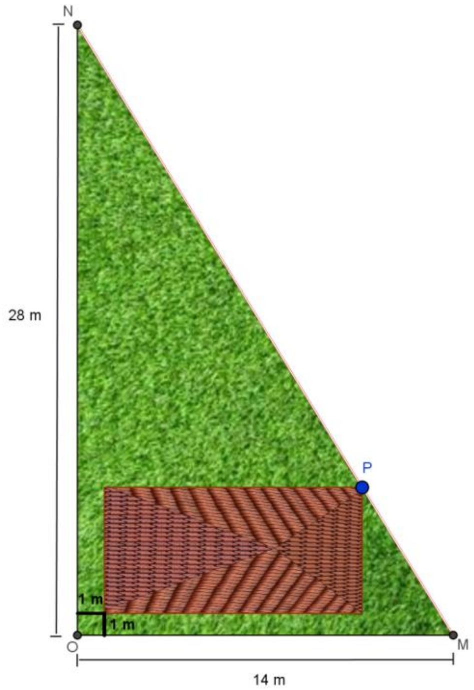
APÊNDICE L – PROBLEMA ‘ÁREA DA CASA’

Aluno(s):
Data:

Problema – Área máxima da casa

José ganhou como herança um terreno triangular, conforme Figura 1, e deseja construir uma casa retangular com a maior área possível. Entretanto, ele precisa respeitar algumas restrições impostas pelo Plano Diretor de sua cidade para a construção. Algumas das restrições são que o canto indicado pelo ponto P fique sobre a lateral MN do terreno e seja um dos cantos da casa, e que as laterais da casa, paralelas aos lados OM e ON do terreno, devem ficar a 1m de distância desses lados.

Figura 1 – Construção de uma casa em um terreno triangular



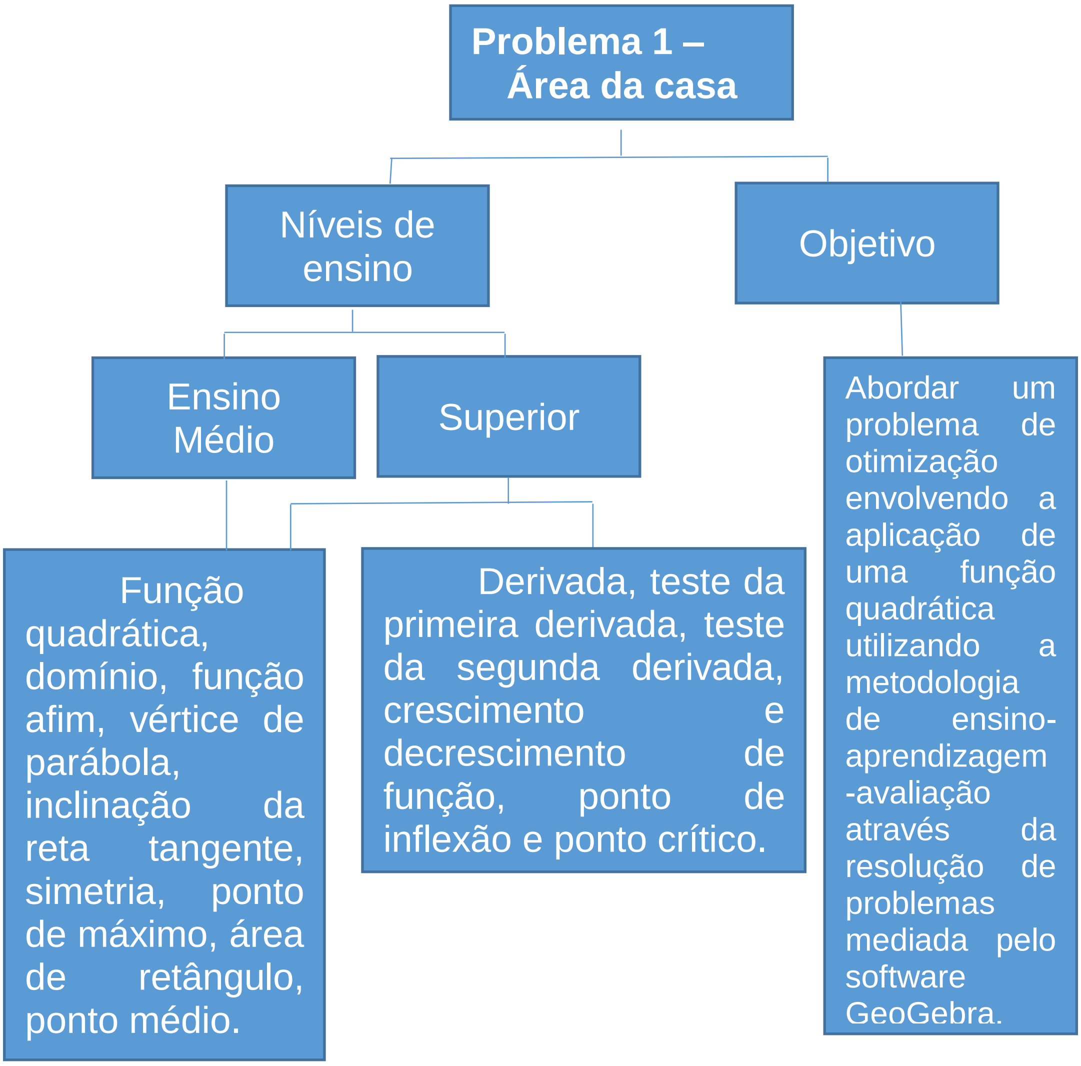
Fonte: Adaptada de Cardoso (2016)

Ajude José encontrar as medidas da casa, que deverá construir, para que a área dela seja máxima.

- Registre em uma folha todas as estratégias de resolução pensadas pelo grupo e entregue ao professor no final da atividade.

APÊNDICE M – MATERIAL ‘CONVERSANDO COM O PROFESSOR’

MATERIAL PARA O PROFESSOR



Professor, é interessante que o problema seja aplicado em um laboratório de informática que esteja disponível o software GeoGebra, ou então, tenha a possibilidade de usar tecnologias móveis (tablets ou smartphones), haja vista que o GeoGebra é compatível com tais tecnologias.

Inicialmente é conveniente que o professor estipule um tempo para a resolução do problema.

Seguindo a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), apresentada no capítulo Metodologia, assim que apresentar o problema aos alunos deve-se disponibilizar o **‘Aplicativo 01 – primeiro momento’** em anexo. Para isso, o professor pode enviar o link ‘https://ggbm.at/BSeh8kqS’ por e-mail, ou salvar o aplicativo e compartilhar através de um pen drive.

O professor deve estar preparado para conferir estratégias de resolução não necessariamente ligadas ao conteúdo de otimização, como por exemplo, conceitos de Geometria, Trigonometria ou dobradura (essas estratégias estão presentes na aplicação do trabalho de Cardoso (2018)).

Durante a resolução do problema, caso os alunos estejam discutindo a possibilidade de o valor máximo da área da casa ser o ponto médio do triângulo OMN, o professor poderá utilizar o arquivo **‘Aplicativo 01 - refutações’** em anexo na página do GeoGebraBook para garantir isso visualmente, depois o professor pode demonstrar esse resultado algebricamente. O aplicativo também pode ser utilizado para verificar outras hipóteses. Porém, como até esse momento os alunos podem não ter concluído a resolução, sugere-se que o professor feche a ‘Janela de visualização 2’ e ‘Janela de visualização 3D’.

Enquanto o professor observa e media, o professor pode fazer as seguintes questões se achar conveniente:

- Existe alguma dependência entre as dimensões da casa?
- Vocês acham conveniente representar a figura sobre um plano cartesiano? Se sim, o que a reta MN pode representar em relação ao conteúdo de funções já visto?
- É possível plotar valores no plano cartesiano considerando a dependência da base com a altura? (Nesse momento o professor poderá auxiliar os alunos a usarem o software GeoGebra para plotar os pares ordenados).
- Qual o comportamento desses pares ordenados? Que tipo de figura eles sugerem?
- Existem diferentes construções com a mesma área?
- Matematicamente pode-se construir uma lei de formação com esses dados?
- Qual é a função?
- Essa função apresenta pontos extremos? O que ele(s) significa(m)?
- Como encontrá-los?

Obs.: Essas questões devem ser feitas à medida que o problema estiver sendo desenvolvido. O professor poderá perceber a necessidade de fazer outras questões, ou ainda, não ver necessidade em usá-las caso os grupos estejam tendo um bom desempenho.

Finalizadas as resoluções e discussões, o professor junto com a turma deve chegar a uma resposta correta e então explorar o aplicativo **'Aplicativo 01 – segundo momento'** em anexo. Ademais, durante a formalização é interessante que o professor varie pelo menos entre a representação analítica e gráfica do conteúdo utilizando o GeoGebra.

Por fim, na proposição de novos problemas aos alunos, sugerimos que o professor utilize alguns dos demais problemas apresentados nesse GeoGebraBook, bem como, o **'Problema 1 - generalização',** em anexo, que visa generalizar o problema da área máxima da casa. Para isso, o professor pode utilizar o arquivo em PDF e também o aplicativo '**Aplicativo 01 - refutações',** já citado. Outra sugestão é que o professor instigue os alunos a resolver o seguinte problema:

> Um retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados e localizado no primeiro quadrante tem um vértice na origem, um vértice sobre o eixo x , um vértice sobre o eixo y e o quarto vértice sobre a reta $2x + y = 100$. Qual a área máxima de tal retângulo?

O professor pode solicitar que os alunos construam a representação desse problema no GeoGebra dinamicamente. Os alunos deverão perceber que o apesar de mudar o contexto do problema em relação ao Problema 1, as estratégias de resolução podem ser as mesmas.

Bom trabalho!

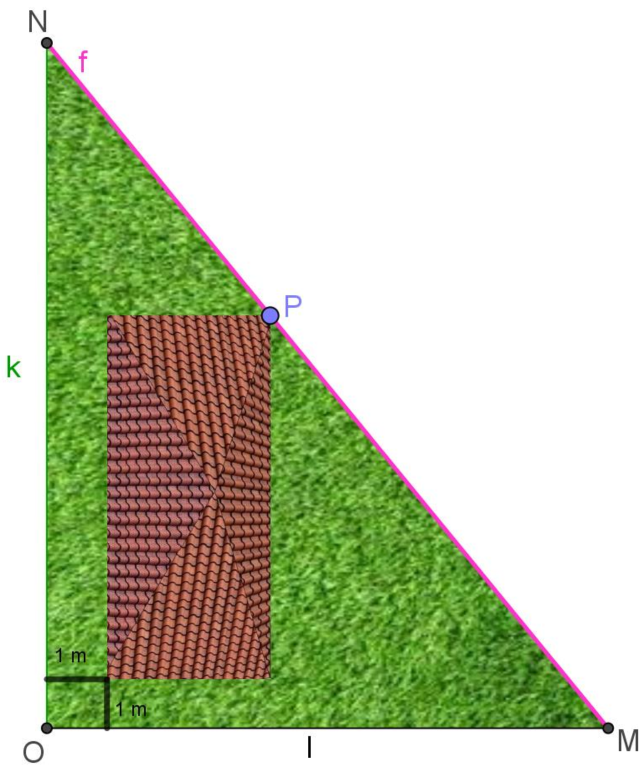
APÊNDICE N – GENERALIZAÇÃO DO PROBLEMA ‘ÁREA DA CASA’

Aluno(s):
Data:

Problema – Generalização do problema da área da casa

Agora que você já resolveu o problema para a situação específica do caso de José, generalize-o considerando as mesmas restrições anteriores: o canto indicado pelo ponto P deve ficar sobre a lateral MN do terreno e ser um dos cantos da casa, e as laterais da casa, paralelas aos lados OM e ON do terreno, devem ficar a 1m de distância desses lados. A partir disso, considere agora que o lado ON vale $\boldsymbol{k}$ e o lado OM vale $\boldsymbol{l}$, conforme Figura 2, e represente algebricamente o valor máximo da casa.

Figura 2 – Construção de casa retangular em terreno triangular qualquer



Fonte: Adaptada de Cardoso (2016)

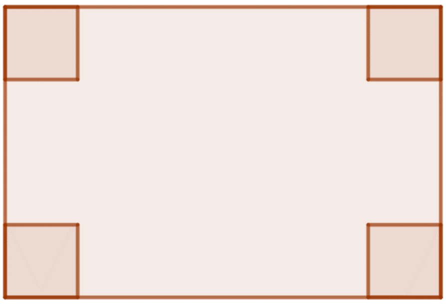
APÊNDICE O – PROBLEMA ‘VOLUME MÁXIMO DA CAIXA’

Aluno(s):
Data:

Problema – Volume da caixa

Dada uma folha retangular, construa uma caixa, sem tampa, cujo volume seja máximo. Construa essa caixa, usando as dimensões da folha retangular dada, após serem cortados quadrados dos cantos dessa folha, conforme Figura 1.

Figura 1 – planificação da caixa



Fonte: a autora

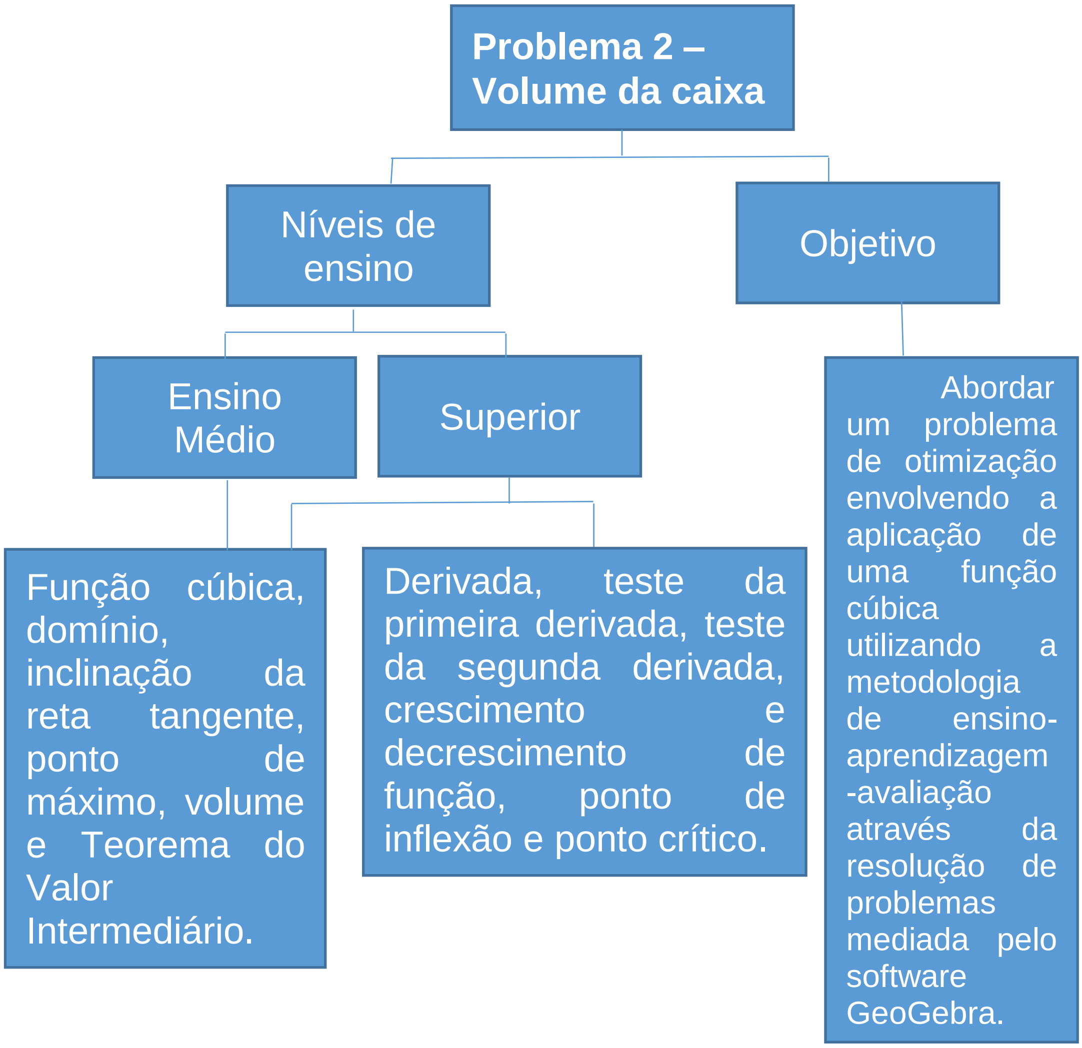
Quais são as dimensões da caixa para que o seu volume seja o maior possível? Qual o valor desse volume?

Fonte: adaptado de Travassos et al. (2014)

- Registre em uma folha todas as estratégias de resolução pensadas pelo grupo e entregue ao professor no final da atividade.

APÊNDICE P – MATERIAL ‘CONVERSANDO COM O PROFESSOR’

MATERIAL PARA O PROFESSOR



Professor, é interessante que o problema seja aplicado em um laboratório de informática que esteja disponível o software GeoGebra, ou então, tenha a possibilidade de usar tecnologias móveis (tablets ou smartphones), haja vista que o GeoGebra é compatível com tais tecnologias.

Inicialmente é conveniente que o professor estipule um tempo para a resolução do problema.

Para aplicar esse problema o professor pode entregar uma folha sulfite aos alunos e pedir que eles usem essa medida como base. Ou ainda, caso o professor prefira, podem ser disponibilizados diferentes tamanhos de folhas para os alunos, como sugere Travassos et al. (2014).

Seguindo a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), apresentada no capítulo

Metodologia, assim que apresentar o problema aos alunos deve-se disponibilizar o **‘Aplicativo 02 – primeiro momento’** em anexo no GeoGebra Book. Para isso, o professor pode enviar o link ‘https://ggbm.at/tn7rmsgu’ por e-mail, ou salvar o aplicativo e compartilhar através de um pen drive.

Enquanto o professor observa e media, o professor pode fazer as seguintes questões se achar conveniente (TRAVASSOS et al., 2014):

- Cortando quadrados dos cantos da folha, qual a figura que pode ser formada? (espera-se que os alunos percebam que é uma caixa, se não, o professor poderá simular o levantamento de uma das abas).
- Considerando a base da caixa a face oposta à tampa, se ela existisse, quais as dimensões (comprimento, largura) da base da caixa?
- Qual a área da base da caixa?
- Há alguma restrição para a medida dos lados dos quadrados, isto é, há um limite máximo ou mínimo para essas medidas?
- O lado do quadrado recortado representa que dimensão da caixa?
- Existe alguma dependência entre a medida do lado do quadrado e o volume da caixa?
- Que função representa essa situação?
- Como encontrar o(s) extremo(s) em seu domínio?
- O que é possível observar para valores de $f(x)$, no domínio da função, em torno de um possível ponto de máximo? (Caso a turma seja do Ensino Médio, a partir daqui o professor pode intuitivamente apresentar o Teorema do Valor Intermediário).

Obs.: Essas questões devem ser feitas à medida que o problema estiver sendo desenvolvido. O professor poderá perceber a necessidade de fazer outras questões, ou ainda, não ver necessidade em usá-las caso os grupos estejam tendo um bom desempenho.

Inicialmente o professor pode ter receio em aplicar essa atividade ao Ensino Médio, todavia, o Teorema do Valor Intermediário, ou ainda, o Teorema de Bolzano que é um caso particular desse teorema, pode auxiliar de modo prático os alunos a encontrarem o valor máximo do volume da caixa (em seu domínio), sem que o professor necessite explorar formalmente o conteúdo de derivadas. Para essa abordagem é importante o uso de uma calculadora, ou o uso da calculadora do próprio software GeoGebra.

Finalizadas as resoluções e discussões, o professor junto com a turma deve chegar a uma resposta correta e então explorar o aplicativo **‘Aplicativo 02 – segundo momento’** em anexo. Ademais, durante a formalização é interessante que o professor varie ao menos entre a representação analítica e gráfica do conteúdo utilizando o GeoGebra.

Por fim, na proposição de novos problemas aos alunos, sugerimos que o professor utilize alguns dos demais problemas apresentados nesse GeoGebra Book, bem como, o **‘Problema 2 - generalização’,** em anexo, que visa generalizar o problema do volume máxima da caixa. Para isso, o professor pode utilizar o arquivo em PDF e também o aplicativo ‘**Aplicativo 02 – segundo momento’,** que permite explorar diferentes dimensões para uma folha retangular.

Essa atividade foi aplicada a uma turma de Cálculo Diferencial e Integral e relatada em Cardoso (2018).

Bom trabalho!

APÊNDICE Q – GENERALIZAÇÃO DO PROBLEMA ‘VOLUME MÁXIMO DA CAIXA’

Aluno(s):
Data:

Problema – Generalização do volume de uma caixa

Agora que você já resolveu o problema do volume da caixa para as medidas específicas, considere uma folha retangular de medidas a e b quaisquer. Recorte quadrados iguais dos cantos dessa folha. As abas que sobram são então dobradas para cima de modo a formar uma caixa sem tampa, como no problema já resolvido. A partir disso, generalize os cálculos de modo a representar algebricamente a função volume da caixa e as dimensões que maximizam o volume.